VARIÉTÉS AFFINES – DÉFINITION ET EXEMPLES

SÉMINAIRE "VARIÉTÉS AFFINES" DE L'AUTOMNE 2010

1. **La notion de (G, X)-structure**

Ma première source pour le début de ces exposés a été un texte dactilographié d'André Haefliger [Haef–82]. Une partie importante des chapitres 1 et 2 en est largement recopiée.

On se donne une variété différentiable connexe X (sous-entendu séparée) et un groupe d'homéomorphismes G de X satisfaisant à la *condition de rigidité* suivante :

(o) soit $g \in G$; s'il existe un ouvert non vide V de X tel que la restriction de g à V est l'identité, alors $g = e$.

(Exemple de situation où la condition est satisfaite : G est un groupe de transformations analytiques.)

1.1. **Définition principale.** Une (G, X)-variété est déterminée par un espace topologique séparé M et un atlas $\mathcal{A} = \{f_i : U_i \longrightarrow V_i\}_{i \in I}$ où

(i) les U_i sont des ouverts qui recouvrent M,
(ii) les V_i sont des ouverts de X,
(iii) les f_i sont des homéomorphismes,
(iv) tout changement de cartes

$$f_j f_i^{-1} : f_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow f_j(U_i \cap U_j)$$

coïncide sur chaque composante connexe de $f_i(U_i \cap U_j)$ avec la restriction d'un élément de G.

Deux atlas $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ définissent la même structure de (G, X)-variété si leur réunion satisfait (iv).

Dans [Ehre–36], nos (G, X)-variétés sont les *espaces localement homogènes*, et nos (G, X)-variétés complètes (voir 2.4 ci-dessous) sont les *espaces localement homogènes normaux*, ou les *formes de Clifford de X*. Dans [Ausl–56], Auslander adopte la terminologie de *variétés munies d'une connection affine à courbure et torsion nulles*.

Date: Exposés des 4 & 11 novembre 2010 (Pierre de la Harpe) ; notes (revues et augmentées) du 23 novembre, plus corrections du 15/12 (au chapitre 2 surtout).

1.2. **Définitions naturelles :** isomorphisme et automorphisme de (G,X)-variétés, isomorphisme local de (G,X)-variétés (le lecteur explicitera de lui-même).

1.3. **Structures de (G,X)-variété sur les revêtements et sur ouverts.** Soient M une (G,X)-variété et $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ un revêtement. Il existe sur $\widetilde{M}$ une structure de (G,X)-variété unique pour laquelle p est un isomorphisme local. Toute application continue bijective $\widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}$ au-dessus de l'identité est alors un automorphisme de (G,X)-variété.

Tout ouvert d'une (G,X)-variété est une (G,X)-variété. En particulier, tout ouvert de X est une (G,X)-variété.

1.4. **Quelques espèces de (G,X)-structures sur des variétés de dimension n.**

(i) Variétés affines plates : $X = \mathbf{R}^n$ et $G = \mathrm{Aff}(n)$, groupe des isomorphismes affines de $\mathbf{R}^n$, isomorphe à $\mathbf{R}^n \rtimes GL_n(\mathbf{R})$.

(ii) Variétés affines avec une notion de volume : $X = \mathbf{R}^n$ et $G \approx \mathbf{R}^n \rtimes S^{\pm}L_n(\mathbf{R})$, avec $S^{\pm}L_n(\mathbf{R}) = \{g \in GL_n(\mathbf{R}^n) \mid \det g = \pm 1\}$.

(iii) Variétés euclidiennes, ou variétés riemanniennes plates : $X = \mathbf{R}^n$ et $G = E(n)$, groupe des déplacements euclidiens, isomorphe à $\mathbf{R}^n \rtimes O(n)$.

(iv) Variétés hyperboliques : $X = \mathbf{H}^n$ et $G =$ groupe des isométries hyperboliques, isomorphe à $PO(n,1) := O(n,1)/\{\pm \mathrm{id}\}$.

(v) Variétés hyperboliques orientées : $X = \mathbf{H}^n$ et G la composante connexe du groupe de (iv), isomorphe à $SO_0(n,1)$.

(vi) Variétés projectives : $X = \mathbf{S}^n = \{\text{demi-droites dans } \mathbf{R}^{n+1}\}$ et $G = S^{\pm}L_{n+1}(\mathbf{R})$.

- L'espace $X = \mathbf{S}^n$ muni du groupe G est donc la *sphère projective*, revêtement à deux feuilles de l'espace projectif réel de dimension n. Selon une variante du *théorème fondamental de la géométrie projective,* si $n \geq 2$, une bijection de $\mathbf{S}^n$ est dans G si et seulement si elle conserve les triplets de points alignés (= sur un même grand cercle).

Contrairement aux exemples précédents, la variété X de l'exemple (vi) est compacte, ce qui modifie beaucoup le paysage ; voir les nos 10 et 11 de [Ehre–36]. (Le cas de $\mathbf{S}^1$, dont le revêtement universel n'est pas compact, doit être traité à part.)

Pour le lecteur plus savant ou plus curieux :

(vii) $X = \mathbf{S}^{n-1}$ et G le groupe engendré par les inversions, c'est-à-dire le groupe conforme, qui est le groupe de (iv).

(viii) Les 8 géométries de Thurston, c'est-à-dire (iii) et (iv) avec $n = 3$, et les 6 autres (voir le no 3.8 de [Thur–97]), dont les géométries Nil et Sol des nos 3.5 et 5.4 ci-dessous.

(ix) Variétés avec structures polynomiales : $X = \mathbf{R}^n$ et G le groupe des bijections $\mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$ qui sont polynomiales, ainsi que leurs inverses (structures étudiées notamment par Paul Igodt et Karel Dekimpe, voir [DeIg–00]).

(x) Il n'est pas nécessaire que G soit transitif sur X. Exemples à prospecter : G le groupe des translations entières de $X = \mathbf{R}$, ou $G = PSL_2(\mathbf{R})$ agissant sur la droite projective complexe $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ avec trois orbites dont celle de (iv), etc, etc. Exemple trivial : $G = \{e\}$; dans ce cas, il existe pour toute (G, X)-variété M un homéomorphisme local de source M et d'image un ouvert de X (sic : de source M, et pas $\widetilde{M}$ comme au no 2.1).

On oublie souvent "plate" dans "variété affine plate", en espérant ne pas engendrer de confusion avec les "variétés affines" de la géométrie algébrique standard.

1.5. **Remarque sur la connexité simple de X.** Supposons X non simplement connexe ; soit $X' \longrightarrow X$ son revêtement universel. Notons G' le groupe des homéomorphismes de X' se projettant sur des homéomorphismes de X appartenant à G ; c'est une extension de la forme

$$\{e\} \longrightarrow \Pi \longrightarrow G' \longrightarrow G \longrightarrow \{e\}$$

où Π est le groupe fondamental de X.

Pour toute variété M, il existe une correspondance bijective canonique entre les (G, X)-structures sur M et les (G', X')-structures sur M. Dans un sens, on peut donc se ramener au cas où X est simplement connexe. Cependant, notons en anticipant sur le chapitre suivant :

ATTENTION ! si M est une variété munie d'une (G, X)-structure, son groupe d'holonomie comme (G', X')-variété est une extension de son groupe d'holonomie comme (G, X)-variété.

1.6. **Exemples de structures affines sur le tore $\mathbf{T}^2$.** (Esquisse ! exemples dus à John Smillie, et repris du chapitre 3 de [Thur–80].)

Soit Q un quadrilatère du plan euclidien, de sommets A, B, C, D. Soit g [respectivement h] la similitude du plan préservant l'orientation appliquant le segment $\overline{AD}$ sur $\overline{BC}$ [resp. $\overline{AB}$ sur $\overline{DC}$]. On peut montrer que g et h commutent, par exemple en vérifiant que g et h ou bien ont un point fixe commun, ou bien sont deux translations.

Soit M l'espace obtenu à partir de Q en recollant les côtés opposés avec g et h. Puisque les similitudes préservent les angles, la somme des angles de M au point image des sommets de Q est égale à 2π. Il en résulte[1] que M, ainsi définie, est une variété affine et plus précisément un *tore affine*, homéomorphe à $\mathbf{T}^2$. (Mieux : la variété M est ainsi munie d’une structure de similitude directe.) On peut montrer que, si Q est un parallélogramme, alors M est complète au sens de 2.4 ci-dessous ; sinon, les similitudes g et h ont un point fixe commun dans le plan, et on peut identifier l’image du développement au complémentaire de ce point dans le plan, de sorte qu’en particulier M n’est pas complète.

Un résultat de Benzécri (voir [Miln–58]) : les seules surfaces closes qui admettent des structures affines sont le tore et la bouteille de Klein.

Pour la classification des structures affines sur le tore $\mathbf{T}^2$, voir l’exposé de Bruno Duchesne du 25 novembre (ainsi que 2.11 ci-dessous pour les structures complètes). Références : [Kuip–53], [Benz–60], [NaYa–74], [FuAr–75] et [Beno–00].

1.7. **Comparaison de (G, X) et (H, X)-structures lorsque $H < G$.** Si H est un sous-groupe du groupe de transformations G de X (supposé rigide), alors toute (H, X)-structure sur une variété M définit une (G, X)-structure “sous-jacente” naturelle sur M. En considérant l’inclusion $E(n) < \mathrm{Aff}(n)$, on peut donc reformuler l’un des résultats de Bieberbach comme suit :

> deux variétés euclidiennes compactes de groupes fondamentaux isomorphes sont isomorphes comme variétés affines.

Un résultat de [FrGo–83] : soient $M = \Gamma\backslash\mathbf{R}^n$ et $M' = \Gamma'\backslash\mathbf{R}^n$ deux variétés affines plates compactes complètes (au sens de 2.4) ; on suppose que leurs groupes fondamentaux (qui sont les groupes cristallographiques affines Γ et Γ', selon la terminologie de 2.7) sont polycycliques. Alors M et M' sont isomorphes comme variétés polynomiales (autrement dit Γ et Γ' sont conjugués dans le “groupe polynomial” de l’exemple 1.4.ix) si et seulement si les groupes Γ et Γ' sont abstraitement isomorphes ; plus précisément, tout isomorphisme $\Gamma \longrightarrow \Gamma'$ est de la forme $\gamma \longmapsto h\gamma h^{-1}$, pour un automorphisme polynomial h. (Voir aussi 2.9.)

2. Développement et holonomie

On considère une paire (G, X) comme au chapitre 1 et une variété M munie d’une (G, X)-structure. On note $p : \widetilde{M} \longrightarrow M$ le revêtement

[1]Observation de géométrie plane élémentaire. Notons $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ les angles internes de Q aux points A, B, C, D respectivement. On observe donc quatre angles en C : l’angle $\gamma = (\widehat{D, C, B})$ de Q, l’angle $(\widehat{B, C, g(C)})$ de $g(Q)$, égal à δ, l’angle $(\widehat{D, C, h(C)})$ de $h(Q)$, égal à β, et l’angle complémentaire $(\widehat{g(C), C, h(C)}$, nommons-le ξ. Alors $\xi = \alpha$, puisque la somme des angles internes d’un quadrilatère est 2π.

universel de M, et on identifie le groupe fondamental $\pi_1(M)$ à un groupe agissant sur $\widetilde{M}$.

2.1. **Théorème du développement.** *Il existe un homomorphisme*

$$\Phi \,:\, \pi_1(M) \longrightarrow G$$

appelé l'holonomie de M *et une application continue Φ-équivariante*[2]

$$D \,:\, \widetilde{M} \longrightarrow X$$

appelée le développement de M, *qui est un isomorphisme local.*

Le couple (Φ, D) est unique au sens suivant : pour tout isomorphisme local $D' : \widetilde{M} \longrightarrow X$, il existe $g \in G$ tel que $D' = gD$; de plus D' est Φ'-équivariant, pour l'homomorphisme Φ' conjugué de Φ par g, c'est-à-dire pour $\Phi' : \pi_1(M) \longrightarrow G$, $\gamma \longmapsto g\Phi(\gamma)g^{-1}$.

Le *groupe d'holonomie*[3] de M est l'image, souvent notée Γ ci-dessous, de Φ dans G ; c'est un sous-groupe de G bien défini à conjugaison près.

2.2. **La démonstration des notes de Thurston** [Thur–80]**.** Choisissons d'abord, arbitrairement, un point $x_0 \in M$, un relevé $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0) \subset \widetilde{M}$, et une carte $f_1 : \widetilde{U}_1 \longrightarrow X$ autour de $\tilde{x}_0$ de la (G, X)-structure de $\widetilde{M}$. (Note : pour d'autres choix fournissant $f_1' : \widetilde{U}_1' \longrightarrow X$, il existerait $g \in G$ tel que $f_1'(\tilde{x}) = gf_1(\tilde{x})$ pour tout x dans la composante connexe de $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_1'$ contenant x_0.)

Il est alors clair qu'on peut prolonger f_1, ou plus précisément son *germe*, le long de tout chemin dans $\widetilde{M}$; par exemple, si $f_2 : \widetilde{U}_2 \longrightarrow X$ est une seconde carte telle que $\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2$ soit non vide et connexe, il existe $g_{1,2} \in G$ tel que le changement de cartes $f_1(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2) \longrightarrow f_2(\widetilde{U}_1 \cap \widetilde{U}_2)$ soit (une restriction de) $g_{1,2}$, et on définit $D : \widetilde{U}_1 \cup \widetilde{U}_2 \longrightarrow X$ par $D(\tilde{x}) = f_1(\tilde{x})$ si $\tilde{x} \in \widetilde{U}_1$ et $D(\tilde{x}) = {g_{1,2}}^{-1} f_2(\tilde{x})$ si $\tilde{x} \in \widetilde{U}_2$.

Pour conclure la démonstration de l'existence de D, il faut se convaincre de "It follows immediately that there is a global analytic continuation of f_1 defined on the universal covering of M" (recopié du paragraphe 3.5 de [Thur–80]). Quant au "immediately", les sceptiques pourront par exemple lire le début de [Epst–84].

La démonstration de l'unicité pour D repose sur la condition de rigidité de la paire (G, X).

---

[2]C'est-à-dire telle que $D\gamma = \Phi(\gamma)D$ pour tout $\gamma \in \pi_1(M)$.

[3]Il vaudrait sans doute la peine de préciser dans quel sens la notion introduite ici est un cas particulier de la notion générale de groupe d'holonomie en géométrie différentielle, introduite par Élie Cartan (1926) ; voir aussi [Rham–52]. De même, s'il semble naturel d'attribuer le théorème 2.1 à Ehresmann, il a certainement des ancêtres dans les travaux de Cartan.

Une fois D défini, on définit Φ comme suit : pour $\gamma \in \pi_1(M)$, il existe $\delta \in G$ tel que $D(\gamma\tilde{x}_0) = \delta D(\tilde{x}_0)$, et on pose $\Phi(\gamma) = \delta$. □

2.3. **Démonstration d’Ehresmann du théorème 2.1.** Nous suivons la rédaction de [Haef–82]. Voir aussi les articles d’Ehresmann, en particulier [Ehre–36], le no 5 pour le développement et le no 6 pour l’holonomie.

Premier pas : définition du G-espace $\widehat{M}$.

Soit $\widehat{M}$ l’ensemble des germes aux points de M des isomorphismes d’ouverts de M sur ouverts de X. Rappelons que deux isomorphismes f et f' d’ouverts U et U' de M sur des ouverts de X ont même germe en $x \in U \cap U'$ si f coïncide avec f' sur un voisinage de x. Notons $\alpha : \widehat{M} \longrightarrow M$ et $\beta : \widehat{M} \longrightarrow X$ les projections associant au germe de f respectivement le point x et le point $f(x)$.

Le groupe G opère sur $\widehat{M}$ de la manière suivante : si φ est le germe en x de f et si $g \in G$, alors $g\varphi$ est le germe de $g \circ f$ en x. Cette action préserve les fibres de α, autrement dit $\alpha(g \circ \varphi) = \alpha(\varphi)$, et l’application β est G-équivariante, autrement dit $\beta(g \circ \varphi) = g\beta(\varphi)$. De plus, G opère de manière simplement transitive sur chaque fibre de α : autrement dit, si $\alpha(\varphi) = \alpha(\varphi')$, d’abord il existe $g \in G$ tel que $\varphi' = g \circ \varphi$, par définition même de la (G, X)-structure sur M, ensuite cet élément g est unique, d’après l’hypothèse (o) sur l’action de G sur X.

Sur $\widehat{M}$, on définit une topologie comme suit. Soit f un isomorphisme d’un ouvert U de M sur un ouvert de X. En prenant les germes de f aux divers points de U, on obtient un sous-ensemble U_f de $\widehat{M}$. Ces sous-ensembles U_f constituent une base pour la topologie de $\widehat{M}$. Pour cette topologie, α et β sont des homéomorphismes locaux. On munit $\widehat{M}$ de la (G, X)-structure pour laquelle α est un isomorphisme local ; alors β est aussi un isomorphisme local.

La projection $\alpha : \widehat{M} \longrightarrow M$ fait de $\widehat{M}$ un *revêtement principal* [4] [5] *de groupe G*. En effet, si f est un isomorphisme d’un ouvert U de M

[4]Un revêtement $p : E \longrightarrow B$, est dit *principal* si le groupe $\mathrm{Aut}(E)$ de ses automorphismes opère transitivement sur chaque fibre (ou, c’est sauf erreur équivalent, s’il opère transitivement sur *une* fibre). Un revêtement est *galoisien* s’il est principal et si E est connexe. Bien connu : un revêtement $p : E \longrightarrow B$ d’espace total E connexe est galoisien si et seulement si l’image naturelle de $\pi_1(E)$ est un sous-groupe normal de $\pi_1(B)$.

[5]ATTENTION : l’espace $\widehat{M}$ est en général bien loin d’être connexe. Par exemple si $M = X$, alors les composantes connexes de $\widehat{M}$ sont en bijection avec G.
(SAUF ERREUR – À VÉRIFIER !!!),

sur un ouvert de X, alors $\alpha^{-1}(U)$ est la réunion disjointe $\bigsqcup_{g\in G} U_{g\circ f}$, comme on l’a remarqué plus haut.

Deuxième pas : propriété universelle de $\widehat{M}$.

Rappel sur la propriété universelle des revêtements universels. Soit B un espace connexe possédant une bonne théorie des revêtements (il suffit par exemple que B soit localement connexe). Un revêtement connexe $p : E \longrightarrow B$ est *universel* si[6] tout revêtement connexe $p' : E' \longrightarrow B$ est une image de p.

Soit M' une (G, X)-variété et soient

$$\alpha' : M' \longrightarrow M \quad \text{et} \quad \beta' : M' \longrightarrow X$$

des isomorphismes locaux. Il existe une application unique $f : M' \longrightarrow \widehat{M}$ qui fait commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
& \widehat{M} \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & \\
X & & M \\
& M' \arrow[ul, "\beta'"] \arrow[ur, "\alpha'"'] \arrow[uu, "f"] &
\end{tikzcd}.$$

En effet : Soient $x' \in M'$ et U' un voisinage de x' dans M' tels que la restriction de α' à U' est un isomorphisme sur un ouvert de M ; soit r son inverse. Alors $f(x')$ est le germe de $\beta' \circ r$ en $x = \alpha'(x')$.

Troisième pas : construction du développement $D : \widetilde{M} \longrightarrow X$ et de l’holonomie $\Phi : \pi_1(M) \longrightarrow G$.

Choisissons arbitrairement un point $\tilde{x}_0 \in \widetilde{M}$, posons $x_0 = p(\tilde{x}_0) \in M$, et choisissons encore arbitrairement un germe $\hat{x}_0 \in \alpha^{-1}(x_0)$. D’après la propriété du revêtement universel, il existe une application continue $q : \widetilde{M} \longrightarrow \widehat{M}$ qui applique $\tilde{x}_0$ sur $\hat{x}_0$ et qui est telle que $\alpha \circ q = r$. On pose alors

$$D = \beta \circ q$$

et on définit $\Phi : \pi_1(M) \longrightarrow G$ par

$$\Phi(\gamma)\tilde{x}_0 = q(\gamma\tilde{x}_0).$$

L’unicité de la paire (D, Φ) est une conséquence de la propriété universelle de $\widehat{M}$. $\square$

[6]Faut-il demander en plus que p soit galoisien, ou est-ce automatique ?

2.4. **Définition.** Une (G, X)-variété M est dite *complète* si le développement $D : \widetilde{M} \longrightarrow X$ est un revêtement.

Remarques.

(i) Pour qu'une variété M qui est affine plate, c'est-à-dire qui est munie d'une $(\mathrm{Aff}(n), \mathbf{R}^n)$-structure, soit complète, la condition suivante est nécessaire et suffisante :

> Pour toute application f d'un segment $[a, b]$ de la droite réelle dans M qui est affine non constante, c'est-à-dire dont la composition $[a, b] \longrightarrow \mathbf{R}^n$ avec une paramétrisation est affine non constante, il existe un prolongement $\mathbf{R} \longrightarrow M$ de f qui est affine non constant.

(Cette condition apparaît au no 7, page 327 de [Ehre–36].)
A voir : démonstration ici ?

(ii) Losque X est simplement connexe, M est complète si et seulement si D est un isomorphisme. (Lorsque X n'est pas simplement connexe, voir la remarque 1.6.) D'où :

2.5. **Corollaire.** On suppose X simplement connexe.

(i) Toute (G, X)-variété complète M est isomorphe au quotient $\Gamma\backslash X$, où Γ est le groupe d'holonomie de M, qui est isomorphe au groupe fondamental $\pi_1(M)$.

(ii) Soient M et M' deux (G, X)-variétés complètes, avec groupes d'holonomie Γ et Γ' respectivement. Alors M et M' sont isomorphes si et seulement si Γ et Γ' sont conjugués dans G.

Pour une variété affine M non complète, le groupe d'holonomie Γ peut être un quotient propre de $\pi_1(M)$. Exemple : soit M le 2-tore quotient de $\mathbf{C}^*$ par le sous-groupe cyclique $\Gamma := \{z \longmapsto 2^m z\}_{m\in\mathbf{Z}}$ de $\mathrm{Aff}(\mathbf{C})$; c'est aussi le quotient de $\mathbf{C}$ par le réseau $\Lambda := \{w \longmapsto w + m\ln 2 + n2i\pi\}_{(m,n)\in\mathbf{Z}^2} \approx \mathbf{Z}^2$, réseau qu'on peut identifier à $\pi_1(M)$. Dans ce cas, l'image du développement $D : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbf{C}$ est $\mathbf{C}^*$ (puisque $\widetilde{M}$ s'identifie à $\mathbf{C}$ et $D(w) = e^w$), et l'homomorphisme d'holonomie $\Phi : \pi_1(M) \longrightarrow \Lambda$ applique la translation d'amplitude $m\ln 2 + n2i\pi$ sur 2^m.

Le développement D n'est pas nécessairement un revêtement de son image.

2.6. **Action du groupe d'holonomie sur l'image du développement.** ATTENTION : dans la situation du théorème 2.1, il y a des exemples tels que l'action du groupe d'holonomie $\Gamma = \Phi(\pi_1(M))$ sur l'image du développement $D(\widetilde{M}) \subset X$ N'EST PAS proprement discontinue.

Par exemple, soit α un nombre réel irrationnel, Λ le groupe des translations de $\mathbf{C}$ de la forme $w \longmapsto w + k\ln 2 + \ell 2i\pi\alpha$, $k, \ell \in \mathbf{Z}$, et M le tore $\Lambda\backslash\mathbf{C}$. Alors $\widetilde{M} = \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^*$, $w \longmapsto e^w$ est le développement pour une structure affine sur M. Le groupe d'holonomie Γ est engendré par l'homothétie $z \longmapsto 2z$ (car, si $z = e^w$, alors $e^{w+\ln 2} = 2z$) et la rotation $\rho : z \longmapsto e^{2i\pi\alpha} z$. Comme ρ n'est pas d'ordre fini, l'action de Γ sur $\mathbf{C}^*$ n'est pas propre.

Pour d'autres exemples, invoquer peut-être [SuTh–83]. Ou un résultat qui s'appelle parfois le lemme d'Ehresmann et parfois le théorème de Thurston : soit M une variété affine compacte et $h : \pi_1(M) \longrightarrow Aff(n)$ son holonomie ; si on peut déformer h, alors cette déformation est associée à une déformation de la structure affine (voir [BeGe–04]).

2.7. **Définition.** Un *sous-groupe cristallographique de* $\mathrm{Aff}(n)$, ou *groupe cristallographique affine* de $\mathbf{R}^n$, est un sous-groupe qui est discret, propre (= dont l'action naturelle sur $\mathbf{R}^n$ est propre), et cocompact[7].

Rappel : dans le groupe $E(n)$ des isométries de $\mathbf{R}^n$, un sous-groupe discret est néccessairement propre ; dans $\mathrm{Aff}(n)$, ce n'est pas le cas, puisqu'il existe des sous-groupes discrets infinis de $GL_n(\mathbf{R})$, et que de tels groupes n'agissent pas proprement (l'isotropie de l'origine est infinie).

Cas particulier du corollaire 2.5.i : une variété affine plate complète M est isomorphe au quotient de $\mathbf{R}^n$ par un sous-groupe cristallographique de $\mathrm{Aff}(n)$ isomorphe à $\pi_1(M)$.

2.8. **Exemples de structures affines plates sur la droite et le cercle.** Considérons la droite réelle $\mathbf{R}$ et son groupe affine

$$\mathrm{Aff}(1) \approx \mathbf{R} \rtimes \mathbf{R}^* \approx \begin{pmatrix} \mathbf{R}^* & \mathbf{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tout intervalle ouvert non vide de la droite (= tout ouvert non vide connexe de $\mathbf{R}$) est naturellement une variété affine homéomorphe à $\mathbf{R}$. Le groupe affine $\mathrm{Aff}(1)$ agit sur l'ensemble des intervalles ouverts non vides de la droite avec trois orbites, représentées par $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+^*$ et $]0,1[$. Nous avons ainsi trois variétés affines non isomorphes deux à deux, d'espace topologique sous-jacent la droite réelle, dont la première est complète et les deux autres sont incmplètes.

Soit $\Gamma_1 \approx \mathbf{Z}$ le groupe des translations d'amplitudes entières, qui opère proprement et librement sur $\mathbf{R}$. Le quotient $M_1 := \Gamma_1 \backslash \mathbf{R}$ est une variété affine plate *complète,* homéomorphe au cercle, de développement l'identité de $\mathbf{R}$, et de groupe d'holonomie $\Gamma_1 \in \mathrm{Aff}(1)$. Notons que, pour tout $b \neq 0$, le sous-groupe des translations d'amplitudes multiples entiers de b est conjugué à Γ_1 dans $\mathrm{Aff}(1)$, de sorte que le quotient $\{\xi \longmapsto \xi + nb\}_{n\in\mathbf{Z}} \backslash \mathbf{R}$ est une variété isomorphe à M_1.

Soit a un nombre réel, $a > 1$, et $\Gamma_a \approx \mathbf{Z}$ le groupe des homothéties $\{x \longmapsto a^n x\}_{n\in\mathbf{Z}}$; son action sur $\mathbf{R}$ n'est pas propre (car l'isotropie de l'origine est un groupe infini), mais son action sur la demi-droite

[7]Sauf erreur : "propre" est redondant, c'est une conséquence de "cocompact".

ouverte $\mathbf{R}_+^*$ l'est. Le quotient $M_a := \Gamma_a \backslash \mathbf{R}_+^*$ est une variété affine plate *non complète*, homéomorphe au cercle, de développement l'inclusion $\mathbf{R}_+^* \subset \mathbf{R}$, et de groupe d'holonomie $\Gamma_a \in \mathrm{Aff}(1)$. Notons que, pour $a, a' > 1$ distincts, il n'existe aucun isomorphisme affine φ de $\mathbf{R}_+^*$ qui passe au quotient en un isomorphisme $\Gamma_a \backslash \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \Gamma_{a'} \backslash \mathbf{R}_+^*$ (parce que le groupe des affinités préservant $\mathbf{R}_+^*$, c'est-à-dire le groupe des homothéties positives de $\mathbf{R}$, est commutatif), de sorte que les variétés M_a et $M_{a'}$ ne sont pas isomorphes.

Proposition. *(i) Toute variété affine $\widetilde{M}$ homéomorphe à la droite réelle est isomorphe à l'une des variétés $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+^*$, $]0,1[$.*

(ii) Toute variété affine M homéomorphe au cercle est isomorphe à l'une des variétés M_a définies ci-dessus, avec $a = 1$ si M est complète et $a \neq 1$ sinon.

Démonstration. (i) Soient $\tilde{x}_0$ un point de $\widetilde{M}$ et $f : \widetilde{U} \longrightarrow \mathbf{R}$ une carte affine au voisinage de $\tilde{x}_0$. Cette carte se prolonge en un développement $D : \widetilde{M} \longrightarrow \mathbf{R}$, qui est un homéomorphisme local,

(*) *donc aussi un homéomorphisme global sur son image.*

Par suite, l'image de D est un intervalle de $\mathbf{R}$, et l'assertion (i) résulte de ce qui précède.

(ii) Soit M comme en (ii). Le revêtement universel de M est une variété affine $\widetilde{M}$ comme en (i) ; on peut donc supposer que $\widetilde{M}$ est l'une des trois variétés $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}_+^*$, $]0,1[$.

Si $\widetilde{M} = \mathbf{R}$, les seuls sous-groupes de $\mathrm{Aff}(1)$ qui opèrent librement, proprement discontinûment et cocompactement sur $\mathbf{R}$ sont ceux de la forme $\{\xi \longmapsto \xi + nb\}_{n \in \mathbf{Z}}$, avec $b \neq 0$. La variété M est donc isomorphe à M_1.

Si $\widetilde{M} = \mathbf{R}_+^*$, les seuls sous-groupes de $\mathrm{Aff}(1)$ qui opèrent librement, proprement discontinûment et cocompactement sur $\mathbf{R}_+^*$ sont ceux de la forme $\{\xi \longmapsto a^n \xi\}_{n \in \mathbf{Z}}$, avec $a > 1$. La variété M est donc isomorphe à l'une des variétés M_a.

Il n'y a aucune transformation affine de $\mathbf{R}$ distincte de l'identité laissant $]0,1[$ invariant, car une transformation affine distincte de l'identité possède au plus un point fixe. Par suite, le cas de $\widetilde{M} =]0,1[$ n'apparaît pas pour M comme dans (ii). $\square$

Remarques et questions. (iii) L'analogue de (*) ci-dessus pour les homéomorphismes locaux $\mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ n'est évidemment pas vrai. Peut-on quand même dire quelque chose de non banal sur la classification des variétés affines homéomorphes au plan ?

(iv) Il y a des analogues évidents en dimensions supérieures aux variétés M_a de la proposition, dont en particulier les *surfaces de Hopf* par exemple $\{z \longmapsto 2^n z\}_{n \in \mathbf{Z}} \backslash (\mathbf{C}^2 \smallsetminus \{(0,0\})$.

2.9. **Exemple concernant le corollaire 2.5.ii.** Soient M et M' deux variétés affines plates complètes, de même dimension n, avec groupes d'holonomie Γ et Γ' isomorphes. Les groupes Γ et Γ' ne sont pas nécessairement conjugués dans $\mathrm{Aff}(n)$, en d'autres termes les variétés M et M' ne sont pas nécessairement isomorphes. Pour le montrer, reprenons un exemple simple de [Beno–01] (dès la page 24).

Pour $(p, q) \in \mathbf{R}^2$, définissons des bijections affines du plan affine

$$\begin{aligned} \tau_1^{p,q} \, &: \, (x,y) \longrightarrow (x+p, y+q), \\ \tau_2^{p,q} \, &: \, (x,y) \longrightarrow (x+p+qy+\frac{1}{2}q^2, y+q). \end{aligned}$$

Les groupes

$$\Gamma_1 \, = \, \{\tau_1^{p,q} \mid (p,q) \in \mathbf{Z}^2\} \quad \text{et} \quad \Gamma_2^{\Lambda} \, = \, \{\tau_1^{p,q} \mid (p,q) \in \Lambda\},$$

où Λ est un réseau de $\mathbf{R}^2$, sont des groupes cristallographiques affines du plan.

Faits. (i) Le groupe Γ_2^{Λ} n'est pas affinement conjugué à Γ_1 ; en d'autres termes, il n'existe pas d'élément $g \in \mathrm{Aff}(2)$ tel que $g\Gamma_2^{\Lambda}g^{-1}$ coïncide avec Γ_1.

(ii) Les groupes $\Gamma_2^{\mathbf{Z}^2}$ et Γ_1 sont polynomialement conjugués ; plus précisément, la transformation

$$h \, : \, (x,y) \longmapsto (x+\frac{1}{2}y^2, y)$$

conjugue ces deux groupes cristallographiques affines.

L'assertion (i) est évidente, car Γ_1 est dans le sous-groupe normal des translations de $\mathrm{Aff}(2)$, et $\Gamma_2^{\mathbf{Z}^2}$ n'y est pas. Pour l'assertion (ii), on vérifie que $h\tau_1^{p,q}h^{-1} = \tau_2^{p,q}$ pour tout $(p,q) \in \mathbf{Z}^2$.

Résultats de [Kuip–53], dans une formulation recopiée de [Beno–01] :

(iii) Tout groupe cristallographique affine Γ du plan admet un sous-groupe d'indice fini qui est affinement conjugué au groupe Γ_1 ou à un des groupes Γ_2^{Λ}.

(iv) Il n'existe qu'un nombre fini de classes d'isomorphismes de groupes cristallographiques affines plans.

2.10. **Les variétés compactes simplement connexes n’ont pas de structures affines.** Soit M^n une variété compacte simplement connexe de dimension n, par exemple une sphère $\mathbf{S}^n$ de dimension au moins 2 ; alors M^n ne possède aucune (G, X)-structure avec $X = \mathbf{R}^n$. En effet, si M^n possédait une telle structure, son développement $D : M^n \longrightarrow \mathbf{R}^n$, serait un homéomorphisme local et en particulier une application ouverte ; l’image de D serait donc à la fois ouverte et compacte dans $\mathbf{R}^n$, ce qui est impossible.

De même, une variété compacte connexe à groupe fondamental fini n’a pas de structure affine.

2.11. **Structures affines complètes sur le tore $\mathbf{T}^2$.** Résumé de l’exposé de Caterina Campagnolo, du 18 novembre (d’après [Abel–01]).

Lemme 1. *Si* $\gamma = (L(\gamma), t(\gamma)) \in GL_n(\mathbf{R}) \ltimes \mathbf{R}^n = \mathrm{Aff}(n)$ *agit sans point fixe sur* $\mathbf{R}^n$*, alors* 1 *est une valeur propre de* $L(\gamma)$*.*

Démonstration. Si 1 n’est pas valeur propre de $L(\gamma)$, alors $\mathrm{id} - L(\gamma)$ est inversible et l’équation $x = L(\gamma)x + t(\gamma)$ possède une solution. □

Proposition 2. *Soit* $\Gamma < \mathrm{Aff}(2)$ *un groupe agissant proprement discontinûment sur* $\mathbf{R}^2$*. Alors* Γ *est virtuellement résoluble.*

Esquisse de démonstration. Si Γ agit sur $\mathbf{R}^2$ de manière proprement discontinue, alors Γ est de type fini et ses sous-groupes d’isotropie sont finis. Quitte à passer à un sous-groupe d’indice fini (vive Selberg), on peut donc supposer que Γ agit sans point fixe sur $\mathbf{R}^2$. Il résulte du lemme que $L(\gamma)$ satisfait l’équation $\det(\mathrm{id} - L(\gamma)) = 0$, qui est polynomiale en les coefficients de $L(\gamma)$, pour tout $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq e$. Alors le sous-groupe $L(\Gamma) \cap SL_2(\mathbf{R})$ de $SL_2(\mathbf{R})$ n’est pas Zariski-dense ; par suite, l’algèbre de Lie de son adhérence de Zariski, de dimension ≤ 2, est résoluble (avec un peu plus de perspicacité : est même abélienne !). On en déduit successivement que les groupes suivants sont virtuellement résolubles :

- la composante connexe de l’adhérence de Zariski $\overline{L(\Gamma) \cap SL_2(\mathbf{R})}^Z$ dans $SL_2(\mathbf{R})$, dont l’algèbre de Lie est résoluble,
- cette adhérence de Zariski elle-même, qui est un sur-groupe d’indice fini de sa composante connexe,
- $L(\Gamma) \cap SL_2(\mathbf{R})$, sous-groupe du précédent,
- $L(\Gamma)$ qui s’insère dans une suite exacte $\{e\} \longrightarrow L(\Gamma) \cap SL_2(\mathbf{R}) \longrightarrow L(\Gamma) \longrightarrow \mathbf{R}^*$,
- et enfin Γ qui s’insère dans une suite exacte $\{e\} \longrightarrow t(\Gamma) \longrightarrow \Gamma \longrightarrow L(\Gamma) \longrightarrow \{e\}$,

comme promis. □

Classification. On montre que tout sous-groupe de $\mathrm{Aff}(2)$ qui est proprement discontinu sur $\mathbf{R}^2$ est, virtuellement et à conjugaison près, un sous-groupe d'un des trois groupes suivants :

$$\begin{aligned} H &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & e^t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbf{R} \right\} \approx \mathbf{R}, \\ T &= \mathbf{R}^2, \\ P &= \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbf{R} \right\} \approx \mathbf{R}^2. \end{aligned}$$

On vérifie que ces trois groupes sont abéliens (sic, petite vérification à faire pour P !), et qu'ils agissent proprement sur $\mathbf{R}^2$. Donc tout sous-groupe discret de l'un de ces trois groupes est proprement discontinu sur $\mathbf{R}^2$.

Proposition 3. *(i) Soit Γ un sous-groupe de $\mathrm{Aff}(2)$ qui est proprement discontinu et sans torsion. Alors Γ possède un sous-groupe d'indice fini*[8] *conjugué à un sous-groupe de l'un des groupes H, T, P, et $\Gamma\backslash\mathbf{R}^2$ est isomorphe à l'une des variétés affines complètes suivantes : le plan $\mathbf{R}^2$, le cylindre $\mathbf{S}^1 \times \mathbf{R}$, un tore $\mathbf{T}^2$, ou une bouteille de Klein.*

En particulier, Γ est virtuellement abélien.

(ii) Soit M une variété affine complète homéomorphe au 2-tore $\mathbf{T}^2$. Alors le groupe d'holonomie de M est virtuellement conjugué[9] *à un réseau d'un des groupes T, P défini ci-dessus.*

Voir [Abel–01], qui renvoie pour les détails à [Kuip–53].

Remarque.

Le groupe $\mathrm{Sim}(2)$ des similitudes planes directes s'identifie au groupe des transformations $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$ de la forme $z \longmapsto az + b$, avec $a \in \mathbf{C}^*$ et $b \in \mathbf{C}$. Sur le plan, il existe deux $(\mathrm{Sim}(2), \mathbf{C})$-structures naturelles :

une structure complète, de développement $\mathrm{id} : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$,
une structure incomplète, de développement $exp : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}^* \subset \mathbf{C}$.

Y en a-t-il d'autres ? peut-on les classer ?

2.12. **Structures affines sur $W = V \times \mathbf{S}^1$, d'après le no 1.3 de** [Beno–00]**.** L'espace $\mathbf{R}^n$ s'identifie à un hémisphère ouvert de $\mathbf{S}^n$, sphère vue comme l'espace des demi-droites de $\mathbf{R}^{n+1}$, par

$$\mathbf{R}^n \ni x \longmapsto \mathbf{R}_+ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^n.$$

[8] Voir si et dans quelle mesure on peut majorer l'indice.

[9] Voir la note précédente.

C’est identification est équivariante relativement à l’homomoprhisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Aff}(n) = GL_n(\mathbf{R}) \rtimes \mathbf{R}^n & \longrightarrow & S^{\pm}L_{n+1}(\mathbf{R}) \\ (L,t) & \longmapsto & \big|\det L\big|^{\frac{1}{n+1}} \begin{pmatrix} L & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Par suite, toute variété affine est aussi une variété projective (jamais complète !!!).

Réciproquement, à toute variété projective V, on peut associer une structure affine sur $V \times \mathbf{S}^1$. En effet :

!!!!!!!!!! A RÉDIGER !!!!!!!!!!

Sauf erreur : il n’existe aucune structure affine complète sur $M \times \mathbf{S}^1$. Voir peut-être aussi [CaDM–93].

2.13. **Critère de complétude.** ATTENTION : ce critère ne s’applique pas aux variétés affines (il s’applique par exemple aux variétés euclidiennes et aux variétés hyperboliques).

Supposons que G opère transitivement sur X et laisse invariant une métrique riemannienne ; cette dernière condition est toujours vérifiée lorsque G est un groupe topologique de difféomorphismes dont les groupes d’isotropie des points sont compacts. Alors, pour une (G,X)-variété M, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) M est complète au sens de la définition 2.4 ;
(b) l’espace métrique sous-jacent à M est complet ;
(c) il existe $\epsilon > 0$ tel que toute boule fermée de rayon ϵ est compacte ;
(d) tout sous-ensemble fermé borné de M est compact ;
(e) tout arc de géodésique peut être indéfiniment prolongé ;
(f) il existe un point de M tel que tout arc de géodésique issu de ce point peut être indéfiniment prolongé ;
(g) il existe $\epsilon > 0$ et une suite $(K_n)_{n\geq 1}$ de sous-ensembles compacts de M tels que $\bigcup_{n\geq 1} K_n = M$ et K_{n+1} contient un ϵ-voisinage de K_n pour tout $n \geq 1$.

Ce critère renvoie au théorème de Hopf-Rinow de la géométrie différentielle (article aux CMH de 1931), pour lequel [Haef–82] revoie à l’appendice de [Rham–52].

2.14. **Corollaire.** Lorsque les groupes d’isotropie de G sont compacts, comme ci-dessus, toute (G,X)-variété compacte est complète.

2.15. **Insistons :** *une variété affine plate peut être compacte et non complète* (exemples en 2.8).

3. Quotients du groupe de Heisenberg

3.1. Le groupe de Lie réel H. Le groupe de Heisenberg est le groupe noté parfois H et parfois $U_3^+(\mathbf{R})$

$$H = U_3^+(\mathbf{R}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ 0 & 1 & \mathbf{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec multiplication matricielle}$$

(où U vaut pour "unipotent" et $+$ pour "strict"). C'est un groupe de Lie réel de dimension 3 qui est connexe, simplement connexe et nilpotent. Si on identifie $U_3^+(\mathbf{R})$ à $\mathbf{R}^3$ en posant

$$(x, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

la formule de multiplication

$$(u, v, s)(x, y, t) = (u + x, v + y, s + t + uy) \tag{1}$$

montre que les multiplications (à gauche par (u, v, s) et à droite par (x, y, t)) sont des transformations affines de $\mathbf{R}^3$.

On vérifie que le groupe dérivé $[H, H]$ coïncide avec le centre $Z(H)$ de H, c'est le sous-groupe de H défini par les équations $x = y = 0$.

Notons que H est un groupe localement compact *unimodulaire*, et plus précisément que la mesure $dx\,dy\,dt$ sur H est invariante à gauche ET à droite. En effet, si f est une fonction réelle continue à support compact sur H, alors

$$\begin{aligned} &\int_H f\big((u, v, s)(x, y, t)\big) dxdydt \\ &\qquad = \int_H f\big(u + x, v + y, s + t + uy\big) dxdydt \\ &\qquad = \int_H f\big(x', y', t'\big) dx'dy'dt' \end{aligned}$$

car la valeur absolue du jacobien $\frac{\partial(u+x,v+y,s+t+uv)}{\partial(x,y,t)}$ est constante de valeur 1, et de même

$$\begin{aligned} &\int_H f\big((x, y, t)(u, v, s)\big) dxdydt \\ &\qquad = \int_H f\big(x + u, y + v, t + s + xv\big) dxdydt \\ &\qquad = \int_H f\big(x', y', t'\big) dx'dy'dt' \end{aligned}$$

car $\left|\frac{\partial(x+u,y+v,t+s+xv)}{\partial(x,y,t)}\right| \equiv 1$.

3.2. **Réseaux de H.** Pour tout entier $n \geq 1$, le sous-groupe

$$\Gamma_n := \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} & \frac{1}{n}\mathbf{Z} \\ 0 & 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un réseau de H. En effet, c'est un sous-groupe discret, il est cocompact puisque $\{(x, y, t) \in H \mid 0 \leq x, y \leq 1,\ 0 \leq t \leq \frac{1}{n}\}$ est un domaine fondamental pour l'action par multiplication (disons à gauche) de Γ_n sur H, et $\Gamma_n \backslash H$ possède une mesure H-invariante finie, puisque "la" mesure de Haar sur H est bi-invariante.

On vérifie que le groupe dérivé de Γ_n est d'indice n dans le centre de Γ_n :

$$[\Gamma_n, \Gamma_n] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{Z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} < \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{n}\mathbf{Z} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Z(\Gamma_n).$$

En particulier, Γ_m et Γ_n ne sont pas isomorphes (a fortiori pas conjugués dans H) lorsque $m \neq n$.

Notons que tout sous-groupe d'indice fini dans un Γ_n est nilpotent *non abélien.* En effet, étant donné un tel sous-groupe, il existe des entiers $k, \ell \geq 1$ tels que les matrices $\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ell \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ appartiennent au sous-groupe, et ces matrices ne commutent pas.

On peut montrer que tout réseau de H est l'image d'un des Γ_n par un automorphisme de H.

3.3. **Les variétés affines $\Gamma_n \backslash H$.** Il résulte du no précédent que, pour $n \geq 1$, les quotients $\Gamma_n \backslash H$ sont des variétés affines plates compactes complètes de dimension 3, non isomorphes (mieux : non homotopes) deux à deux. Remarques :

(i) Ce sont déjà les exemples de [Ausl–56], même s'ils apparaissent sous une forme un peu différente de celle qui précède. Auslander montre aussi que Γ_1 ne possède aucun sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}^3$.

(ii) Ces exemples montrent qu'un sous-groupe cristallographique de Aff(3) n'est pas nécessairement virtuellement abélien (contrairement à la "situation Bieberbach"[10]).

[10]Voir les exposés de Bruno Duchesne des 21 et 28 octobre, et [Buse–85].

(iii) Ils montrent que le nombre de classes d'isomorphismes de sous-groupes cristallographiques de Aff(3) est infini (contrairement à la "situation Bieberbach").

(iv) On peut voir la variété $\Gamma_1\backslash H$ comme le tore de suspension (en anglais “mapping torus”) d'un automorphisme du tore ; voir 3.4 ci-dessous.

3.4. **Une variante pour le modèle de H.** Le groupe H est isomorphe au produit semi-direct $\mathbf{R} \ltimes_u \mathbf{R}^2$ associé à l'action unipotente $u : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ definie par

$$(2) \qquad u : \left(x \, , \, \begin{pmatrix} y' \\ t' \end{pmatrix} \right) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y' \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y' \\ t' + xy' \end{pmatrix} .$$

Les éléments de $\mathbf{R} \ltimes_u \mathbf{R}^2$ sont donc des triplets de nombres réels dont la multiplication est celle de la formule (1). L'application

$$\mathbf{R} \ltimes_u \mathbf{R}^2 \longrightarrow U_3^+(\mathbf{R}), \qquad (x, y, t) \longmapsto \begin{pmatrix} 1 & x & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un isomorphisme.

La structure de produit semi-direct $\mathbf{R} \ltimes_u \mathbf{R}^2$ sur H correspond à une suite exacte scindée

$$\{e\} \longrightarrow \mathbf{R}^2_{y,t} \longrightarrow H_{x,y,t} \longrightarrow \mathbf{R}_x \longrightarrow \{e\}$$

qu'il ne faut pas confondre avec l'extension centrale

$$\{e\} \longrightarrow \mathbf{R}_t = Z(H) \longrightarrow H_{x,y,t} \longrightarrow \mathbf{R}^2_{x,y} \longrightarrow \{e\}$$

qui n'est pas scindée.

Notons $\{t\}$ la classe modulo 1 d'un nombre réel t. On peut donc voir l'ensemble des triplets de la forme $(x, \{y\}, \{t\})$ comme le produit $\mathbf{R} \times \mathbf{T}^2$ d'une droite et d'un 2-tore, sur lequel le générateur 1 de $\mathbf{Z}$ agit par

$$(x, \{y\}, \{t\}) \longmapsto (x + 1, \{y\}, \{t + y\}).$$

Le quotient correspondant $\mathbf{Z}\backslash(\mathbf{R} \times \mathbf{T}^2)$, est le *tore d'application* de l'homéomorphisme $(\{y\}, \{t\}) \longmapsto (\{y\}, \{y+t\})$ du tore $\mathbf{T}^2$; ce quotient est naturellement un fibré en cercles au-dessus de $\mathbf{T}^2$, et s'identifie au quotient $\Gamma_1\backslash H$. Illustration à la figure 3.26 (page 186) de [Thur–97].

3.5. **Une nouvelle espèce de (G, X)-structure de dimension 3 : Nil.** Le groupe de Heisenberg, notons-le X (pour changer et provisoirement), possède une structure riemannienne $ds^2 = dx^2 + dy^2 + (dt - xdy)^2$ invariante par les multiplications à gauche. Son groupe d'isométries, notons-le G, est un groupe de Lie de dimension 4 ayant deux composantes connexes. Les (G, X)-structures sur les variétés de dimension

3, dites structures NIL, constituent l’une des huit classes de Thurston (voir [Thur–82], [Thur–97] et [Scot–83]).

3.6. **Une autre variante pour le modèle de H.** Considérons le groupe défini sur $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, ou sur $\mathbf{R}^3$, par la multiplication

$$\begin{aligned} (z,t)(z',t') &= \big(z+z', t+t'+\frac{1}{2}\operatorname{Im}(\overline{z}z')\big), \\ (x,y,t)(x',y',t') &= (x+x', y+y', t+t'+\frac{1}{2}(xy'-yx')). \end{aligned}$$

On définit un isomorphisme $\exp : \mathbf{C} \times \mathbf{R} \longrightarrow U_3^+(\mathbf{R})$ en écrivant

$$\exp \,:\, (x+iy,t) \;\longmapsto\; \exp \begin{pmatrix} 0 & x & t \\ 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x & t+\frac{1}{2}xy \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Soit n un entier, $n \geq 1$. Le sous-groupe Λ_n de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$ engendré par

$$\Big(1,0\Big), \qquad \Big(i,0\Big) \quad \text{et} \quad \Big(0,\frac{1}{n}\Big)$$

est un réseau de H. Comme sous-ensemble de $\mathbf{C} \times \mathbf{R}$, c’est

$$\Lambda_n \;=\; \mathbf{Z}[i] \times \frac{1}{n}\mathbf{Z} \qquad \text{si } n \text{ est pair} \tag{4}$$

et

$$\Lambda_n \;=\; \left\{ \left(x+iy, \frac{t}{2n}\right) \in \mathbf{Z}[i] \times \frac{1}{2n}\mathbf{Z} \;\middle|\; xy \equiv t \pmod 2 \right\} \tag{5}$$

si n est impair. Dans tous les cas (n pair ou impair), l’isomorphisme de la formule (3) applique Λ_n sur le réseau

$$\exp(\Lambda_n) \;=\; \Gamma_n \;=\; \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{Z} & \frac{1}{n}\mathbf{Z} \\ 0 & 1 & \mathbf{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\subset\; \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{R} & \mathbf{R} \\ 0 & 1 & \mathbf{R} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

du modèle matriciel.

Pour les détails, ainsi que pour une description (fastidieuse et) complète de tous les réseaux de H, et même de tous les sous-groupes fermés de H, voir [BrHK–09]. En particulier : tout réseau de H est conjugué à l’un des Γ_n par un automorphisme de H.

3.7. **Quelques généralités sur les groupes de Lie nilpotents.** (Comparer avec 5.5.) (i) Tout groupe de Lie réel nilpotent est unimodulaire.

(ii) Si G est un groupe de Lie réel connexe et simplement connexe, l’application exponentielle est un difféomorphisme.

(iii) Soient G un groupe de Lie réel nilpotent connexe simplement connexe, et Γ un sous-groupe discret ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) Γ est un réseau, ce qui signifie qu’il existe sur $\Gamma\backslash G$ une mesure de probablité G-invariante ;
(2) $\Gamma\backslash G$ est compact ;
(3) il n’existe aucun sous-groupe fermé connexe de N contenant Γ autre que N lui-même ;
(4) pour toute représentation unipotente $\rho : N \longrightarrow GL_n(\mathbf{C})$, les adhérences de Zariski de $\rho(\Gamma)$ et de $\rho(N)$ coïncident ;

(5) il existe une représentation unipotente $\rho : N \longrightarrow GL_n(\mathbf{C})$ telle que les adhérences de Zariski de $\rho(\Gamma)$ et de $\rho(N)$ coïncident.

Démonstration (pour le cas où Γ est un sous-groupe *fermé* de G) : voir le chapitre II de [Ragh–72].

(iv) Pour qu’un groupe G comme ci-dessus possède un réseau, il faut et il suffit que son algèbre de Lie possède une base $(e_i)_{i\in K}$ telle que les constantes de structure $c_{i,j,k}$ soit rationelles, où ces constantes sont celles de la table de multiplication $[e_i, e_j] = \sum_k c_{i,j,k} e_k$.

(v) Pour qu’un groupe soit isomorphe à un réseau dans un groupe G comme ci-dessus, il faut et il suffit qu’il soit de type fini, nilpotent et sans torsion.

(Démonstrations : voir encore [Ragh–72].)

($\bullet$) Définition : une nilvariété compacte est une variété de la forme G/Γ, où G est un groupe de Lie nilpotent connexe simplement connexe et Γ un réseau dans G.

3.8. **Les groupes nilpotents de type fini sans torsion sont des groupes fondamentaux de variétés affines complètes.** Montrons ceci, modulo quelques résultats classiques de la théorie des groupes de Lie.

Soit Γ un groupe qui est de type fini, nilpotent, et sans torsion. Il existe un groupe de Lie réel connexe simplement connexe nilpotent dans lequel Γ se plonge comme un réseau ; voir [Ragh–72], théorème 2.8, page 40. Il existe une représentation fidèle $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbf{R})$; voir [Hoch–65], théorème 18.3.1, page 219. De plus, on peut supposer que l’image de ρ est dans le groupe U des matrices triangulaires supérieures avec des 1 sur la diagonale ; c’est le théorème de Kolchin, voir par exemple [Serr–65], page LA.5.7. Or U agit naturellement, “par multiplications à gauche”, sur l’espace $T_n(\mathbf{R}) = \mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ des matrices triangulaires supérieures à diagonales nulles, et on vérifie en contemplant la formule de multiplication des matrices $U \times T_n(\mathbf{R}) \longrightarrow T_n(\mathbf{R})$ que cette action est affine et propre.

Par suite, $\rho(\Gamma) \approx \Gamma$ agit sur $T_n(\mathbf{R})$ de manière fidèle, proprement discontinue, et affine. Il en résulte que $\rho(\Gamma)\backslash\mathbf{R}^{\frac{1}{2}n(n+1)}$ est une variété affine plate complète de groupe fondamental isomorphe à Γ.

Plus généralement, les groupes virtuellement polycyclqiues sont des groupes fondamentaux de variétés affines complètes. C’est un résultat de Milnor [Miln–77], voir l’exposé du 2 décembre de Vincent Emery.

3.9. **Programme pour une fois !** A propos de nilvariétés et structures affines : il n’est pas vrai que toute nilvariété compacte possède une structure affine plate *complète* [Beno–95].

4. Exemples de sous-groupes cristallographiques résolubles de Aff(n)

L’exemple ci-dessous, qui apparaît par exemple au chapitre 5 de [Abel–01], et qui renforce la remarque 3.3.ii, montre qu’un sous-groupe discret du groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^n$, $n \geq 3$, n’est même pas nécessairement virtuellement nilpotent.

4.1. **La famille d’exemples.** On considère un entier $n \geq 2$, la base canonique $e_1, \ldots, e_n$ de $\mathbf{R}^n$, une matrice $A \in GL_{n-1}(\mathbf{Z})$, et la matrice $B = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbf{Z})$. Soit Γ le sous-groupe de Aff(n) engendré par les $n-1$ translations τ_j de vecteur e_j, $1 \leq j \leq n-1$, et la transformation

$$\sigma_n \, : \, x \longmapsto Bx + e_n.$$

Par exemple, si $n = 2$ et $A = -1$, le quotient $\Gamma \backslash \mathbf{R}^2$ est la bouteille de Klein, le groupe Γ est virtuellement $\mathbf{Z}^2$ et n’est pas nilpotent. Revenons au cas général.

Proposition. *Avec les notations ci-dessus :*

(i) Γ *s’insère dans une suite exacte*

$$\{0\} \longrightarrow \mathbf{Z}^{n-1} \xrightarrow{\iota} \Gamma \xrightarrow{\pi} \mathbf{Z} \longrightarrow \{0\}$$

où $\iota(\mathbf{Z}^{n-1})$ *est le sous-groupe engendré par* $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$ *et où* π *est la surjection définie par* $\pi(\tau_j) = 0$ *pour* $j = 1, \ldots, n-1$, $\pi(\sigma_n) = 1$ *; en particulier,* Γ *est résoluble ;*

(ii) *le groupe* Γ *est nilpotent si et seulement si la matrice* A *est unipotente ;*

(iii) *le groupe* Γ *est virtuellement nilpotent si et seulement s’il existe un entier* $m \geq 1$ *tel que la matrice* A^m *est unipotente ;*

(iv) Γ *est un sous-groupe cristallographique de* Aff$(\mathbf{R}^n)$.

Rappel : une matrice carrée C est unipotente si la matrice $C - \mathrm{id}$ est nilpotente, c’est-à-dire s’il existe un entier $\ell \geq 1$ tel que $(C - \mathrm{id})^\ell = 0$.

Avant de démontrer cette proposition, voici un

4.2. **Rappel sur les commutateurs et la nilpotence.** Soit G un groupe. Le *commutateur* de deux éléments $x, y \in G$ et l’élément $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$. On écrit $x^y := y^{-1}xy$. Quelques formules :

$$\begin{aligned} [y,x] &= [x,y]^{-1}, \quad xy \;=\; yx[x,y], \\ [x,y]^z &= [x^z, y^z], \\ [x,yz] &= [x,z][x,y]^z \;=\; [x,z][z,[y,x]][x,y], \\ [xy,z] &= [x,z]^y[y,z] \;=\; [x,z][[x,z],y][y,z]. \end{aligned}$$

Le *groupe dérivé* de G est le sous-groupe $[G, G]$ engendré par les commutateurs ; c'est un sous-groupe normal.

Si G est engendré par une partie X, le sous-groupe $\langle [X, X] \rangle$ de G engendré par les commutateurs d'éléments de X est un sous-groupe de $[G, G]$ qui peut être un sous-groupe strict ! Exemple[11] : le groupe symétrique $\mathrm{Sym}(4)$ engendré par $X = \{(1, 2), (1, 2, 3, 4)\}$, de groupe dérivé $\mathrm{Alt}(4)$ non cyclique. En revanche, le groupe dérivé est bien le sous-groupe *normal* engendré par les commutateurs d'éléments de X.

Néanmoins, lorsque G est nilpotent et engendré par X, le groupe $\langle [X, X] \rangle$ coïncide avec $[G, G]$. Plus généralement, voici une affirmation que nous utilisons ci-dessous :

Définissons par récurrence sur k des sous-ensembles X_k de G, en posant $X_1 = X$ et, pour $k \geq 2$, $X_k =$ l'ensemble des commutateurs $[x, y]$ avec $x \in X$ et $y \in X_{k-1}$. Alors : G est nilpotent de classe $\leq c$ si et seulement si $X_c = \{e\}$; dans ce cas, le sous-groupe de G engendré par X_k est le k-ième groupe de la série centrale descendante de G, pour tout $k \geq 1$. C'est l'exo 15.c du chapitre I, paragraphe 6, dans [BAlg–70].

4.3. **Démonstration de la proposition 4.1.** Ecrivons $x = (x', x_n) \in \mathbf{R}^n$, avec $x' \in \mathbf{R}^{n-1}$. Le groupe Γ est engendré par un ensemble X à n éléments, qui sont les

$$\begin{aligned} \tau_j \,&:\, (x', x_n) \longmapsto (x' + e_j, x_n) \qquad (1 \leq j \leq n-1) \\ \sigma_n \,&:\, (x', x_n) \longmapsto (Ax', x_n + 1). \end{aligned}$$

Les commutateurs d'éléments de X distincts de e sont les

$$\begin{aligned} [\sigma_n, \tau_j] \,&: (x', x_n) \xmapsto{\tau_j} (x' + e_j, x_n) \xmapsto{\sigma_n} (Ax' + Ae_j, x_n + 1) \xmapsto{\tau_j^{-1}} \\ &\qquad (Ax' + (A - \mathrm{id})(e_j), x_n) \xmapsto{\sigma_n^{-1}} (x' + (\mathrm{id} - A^{-1})(e_j), x_n). \end{aligned} \tag{6}$$

On montre par récurrence sur k que les éléments de X_k distincts de e sont les

$$\Big[\sigma_n, \big[\sigma_n, \cdots [\sigma_n, \tau_j] \cdots\big]\Big] \,:\, (x', x_n) \longmapsto \Big(x' + (\mathrm{id} - A^{-1})^k(e_j), x_n\Big), \tag{7}$$

où k est le nombre d'occurences de σ_n dans le multi-commutateur de la formule (7).

[11]En fait, tout groupe G à deux générateurs et à groupe dérivé non cyclique convient. Rappel : si F désigne le groupe libre sur deux générateurs a, b, alors $[F, F]$ est *librement engendré* par les éléments $[a^k, b^\ell]$, avec $k, l \in \mathbf{Z} \smallsetminus \{0\}$, en particulier $[F, F]$ n'est pas de type fini ; voir par exemple l'exercice 24 du paragraphe 4.1 dans [MaKS–66].

Il résulte de la formule (6) que tout élément de Γ est de la forme

$$\tau_v \sigma_n^\ell : (x', x_n) \longmapsto (A^\ell(x') + v, x_n + \ell), \tag{8}$$

avec τ_v une translation par un vecteur de $v \in \mathbf{Z}^{n-1}$ et $\ell \in \mathbf{Z}$. L'assertion (i) en résulte.

Les assertions (ii) et (iii) résultent de la formule (7) et du rappel précédent.

Pour l'assertion (iv), vérifions que Γ agit proprement sur $\mathbf{R}^n$. Considérons une partie compacte K de $\mathbf{R}^n$. Il suffit de vérifier que $\{\gamma \in \Gamma \mid \gamma(K) \cap K \neq \emptyset\}$ est fini.

Soit $\gamma = \tau_v \sigma_n^\ell$ comme dans (3) ci-dessus. D'abord, si ℓ est assez grand, disons $|\ell| > N$, on a $\gamma(K) \cap K = \emptyset$. Ensuite, notons K' la projection de K sur $\mathbf{R}^{n-1}$ et posons $L' = \cup_{\ell=-N}^{N} A^\ell(K')$; si $|\ell| \leq N$ et si la norme de v est assez grande, on a $\tau_v(L') \cap L' = \emptyset$, et donc a fortiori $\tau_v \sigma_n^\ell(K) \cap K = \emptyset$. L'assertion (iv) en résulte. □

4.4. **Mise en perspective.** On sait que :

- tout sous-groupe proprement discontinu de $\mathrm{Aff}(E)$, $\dim E \leq 2$, est virtuellement résoluble (Cor. 6.4 de [Abel–01]), et même virtuellement abélien ;
- tout sous-groupe cristallographique de $\mathrm{Aff}(E)$, avec $\dim E \leq 3$, est virtuellement résoluble (Fried-Goldmann, 1983) ; idem si $\dim E \leq 6$ (Abels-Margulis-Soifer, 1997, cité [2] dans [Abel–01], et [AbMS–02]) ;
- tout sous-groupe discret de $\mathrm{Aff}(E)$ a une "partie non discrète" nilpotente de type fini (Carrière-Dal'bo, 1989, Theorem 5.5 de [Abel–01]) ;
- tous les exemples connus de sous-groupes cristallographiques de $\mathrm{Aff}(E)$ sont virtuellement résolubles (conjecture d'Auslander[12]) ;
- tout groupe qui est sans torsion et virtuellement polycyclique est groupe fondamental d'une variété affine plate complète[13] : voir [Miln–77], et 3.8 ci-dessus ; la réciproque n'est pas vraie puisque :

[12]Apparemment conjecture connue entre autres pour les cas correspondant aux surfaces complexes, voir la page 18 de [Carr–88].

[13]On ne peut pas ajouter "compacte". Voir [Beno–95] (+ Burde, et Burde-Grunewald !?), ainsi que 3.9 plus haut. Par ailleurs, on sait bien (et on savait avant [Miln–77]) que tout groupe qui est sans torsion et virtuellement polycyclique est groupe fondamental d'une variété compacte dont le revêtement universel est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$.

- en dimension 3, il existe un sous-groupe proprement discontinu de Aff(3) qui est libre non abélien, et qui agit librement sur $\mathbf{R}^3$ (Margulis, 1983).

5. **Le groupe** Sol **et ses réseaux.**

Dans ce chapitre, nous allons reprendre certains des exemples du chapitre précédent, plus précisément ceux pour lesquels $n = 3$ et $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ une matrice telle que $|\operatorname{trace}(A)| > 2$. (De même, le chapitre 3 est une exposition de cas avec $n = 3$ et A une matrice unipotente.)

5.1. **Le groupe** Sol**.** Il s'agit du groupe des matrices de la forme

$$(x, y, s) := \begin{pmatrix} e^s & 0 & x \\ 0 & e^{-s} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec } x, y, s \in \mathbf{R}\,;$$

c'est donc un sous-groupe fermé du groupe Aff(2). (C'est a fortiori un sous-groupe fermé du groupe $GL_3(\mathbf{R})$.) Pour la forme "en triplets", le produit s'écrit

$$(x, y, s)(x', y', s') = (x + e^s x', y + e^{-s} y', s + s'). \tag{9}$$

Ceci montre d'une part que la mutliplication à gauche par (x, y, s), dans Sol identifié à $\mathbf{R}^3$, est une transformation affine[14], et d'autre part que Sol est un groupe unimodulaire, avec mesure de Haar $dxdyds$ invariante à gauche et à droite.

Le groupe Sol s'insère dans une suite exacte scindée

$$\{e\} \longrightarrow \mathbf{R}^2_{x,y} \longrightarrow \mathrm{Sol} = \mathbf{R}^2 \rtimes_\varphi \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}_s \longrightarrow \{e\} \tag{10}$$

où φ désigne l'action de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}^2$ décrite par $\big(s, (x, y)\big) \longmapsto \big(e^s x, e^{-s} y\big)$.

On vérifie que l'application exponentielle

$$\mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathrm{Sol}, \quad (\xi, \eta, \sigma) \longmapsto \exp \begin{pmatrix} \sigma & 0 & \xi \\ 0 & -\sigma & \eta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^\sigma & 0 & \frac{e^\sigma - 1}{\sigma}\xi \\ 0 & e^{-\sigma} & \frac{e^{-\sigma}-1}{-\sigma}\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est un difféomorphisme.

On vérifie aussi que tout élément $(s, x, y) \in \mathrm{Sol}$ distinct de l'identité a pour centralisateur le sous-groupe à un paramaètre qui le contient. En particulier, le centre de Sol est réduit à un élément, ce qui montre que Sol n'est pas nilpotent.

Le groupe Sol est un groupe de Lie réel de dimension 3 qui est connexe, simplement connexe, et résoluble non nilpotent. Son groupe des

[14]Attention : les multiplications à droite ne sont pas affines dans ce sens !

commutateurs s'identifie au noyau de la suite exacte (10) ; on confirme la non-nilpotence de Sol en vérifiant que $[\mathbf{R}^2_{x,y}, \mathrm{Sol}] = \mathbf{R}^2_{x,y}$.

Notons encore que Sol est isomorphe au sous-groupe parabolique de $PSL_2(\mathbf{R}) \times PSL_2(\mathbf{R})$ des paires de matrices (modulo ± 1) de la forme

$$\left(\begin{bmatrix} e^{s/2} & e^{-s/2}x \\ 0 & e^{-s/2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e^{-s/2} & e^{s/2}y \\ 0 & e^{s/2} \end{bmatrix} \right).$$

5.2. **Préliminaires sur certains produits semi-directs.** Soient K, L deux groupes. Soit $\varphi : K \longrightarrow \mathrm{Aut}\, L)$ une action de K sur L ; il lui correspond un produit semi-direct $K \rtimes_\varphi L$, extension de K par L. Soit de plus $g \in \mathrm{Aut}(K)$; on définit une nouvelle action $g\varphi(\cdot)g^{-1}$: $\ell \longmapsto g\varphi(\cdot)g^{-1}$ de L sur K, et donc un nouveau produit semi-direct $K \rtimes_{g\varphi(\cdot)g^{-1}} L$. Le morphisme

$$\chi : K \rtimes_\varphi L \longrightarrow K \rtimes_{g\varphi(\cdot)g^{-1}} L, \quad (k, \ell) \longmapsto (g(k), \ell)$$

fait commuter le diagramme

$$\begin{array}{ccccccccc} \{e\} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K \rtimes_\phi L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \{e\} \\ & & \downarrow \mathrm{id} & & \downarrow \chi & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ \{e\} & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K \rtimes_{g\varphi(\cdot)g^{-1}} L & \longrightarrow & L & \longrightarrow & \{e\} \end{array}$$

de sorte que les deux lignes horizontales ci-dessus sont des extensions isomorphes ; a fortiori, les groupes $K \rtimes_\varphi L$ et $K \rtimes_{g\varphi(\cdot)g^{-1}} L$ sont isomorphes.

Dans le cas particulier où $K = \mathbf{Z}^2$, $L = \mathbf{Z}$, $\phi(1) = A \in GL_2(\mathbf{Z})$, et $g \in GL_2(\mathbf{R})$, il en résulte que les groupes

$$\Gamma_A := \mathbf{Z}^2 \rtimes_A \mathbf{Z} \quad \text{et} \quad \Gamma_{gAg^{-1}} := g(\mathbf{Z}^2) \rtimes_{gAg^{-1}} \mathbf{Z}$$

sont naturellement isomorphes.

5.3. **Réseaux de** Sol**.** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$ une matrice hyperbolique, c'est-à-dire une matrice telle que $|a + d| > 2$. La matrice A est conjuguée dans $GL_2(\mathbf{R}) = \mathrm{Aut}(\mathbf{R}^2)$ à la matrice

$$gAg^{-1} = \begin{pmatrix} e^\alpha & 0 \\ 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad e^\alpha = \frac{a + d + \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2}$$

(pour $g \in GL_2(\mathbf{R})$ convenable). Vu le no 5.2, le groupe $\Gamma_A = \mathbf{Z}^2 \rtimes_A \mathbf{Z}$ s'identifie naturellement au sous-groupe discret $g(\mathbf{Z}^2) \rtimes_{gAg^{\cdot 1}} \mathbf{Z}$ de Sol, qui est un réseau.

Exemple numérique : $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, de valeurs propres Φ^2 et Φ^{-2}, où $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or ; ainsi, si $g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \Phi^2 - 2 & 1 - \Phi^2 \end{pmatrix}$, de sorte que $g^{-1} = \frac{1}{3-2\Phi^2} \begin{pmatrix} 1 - \Phi^2 & -1 \\ 2 - \Phi^2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $A = g \begin{pmatrix} \Phi^2 & 0 \\ 0 & \Phi^{-2} \end{pmatrix} g^{-1}$.

Pour deux matrices hyperboliques $A, B \in SL_2(\mathbf{Z})$, on peut montrer :

· les groupes Γ_A et Γ_B sont isomorphes si et seulement si A est conjugué dans $GL(2, \mathbf{Z})$ à B ou B^{-1} ;

· les groupes Γ_A et Γ_B sont commensurables si et seulement s'il existe des entiers non nuls $p, q \in \mathbf{Z}$ tels que A^p et B^q sont conjugués dans $GL_2(\mathbf{Q})$;

· les groupes Γ_A et Γ_B sont quasi-isométriques dans tous les cas.

(Proposition IV.30 de [Harp–00].)

Pour une matrice hyperbolique $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ comme ci-dessus, le quotient $F_A := \Gamma_A \backslash \mathrm{Sol}$ s'identifie au quotient de $\mathbf{R}^3$ par le groupe engendré par

les translations par e_1 et e_2
et la transformation $x \longmapsto A(x_1, x_2) + e_3$

où e_1, e_2, e_3 est la base canonique de $\mathbf{R}^3$. Ainsi F_A est une variété de dimension 3 qui est compacte, affine, complète, et fibrée en $\mathbf{T}^2$ au-dessus du cercle ; c'est un cas particulier des exemples du chapitre 4.

Exercice : étudier le cas d'une matrice $A \in GL_2(\mathbf{Z})$ de déterminant -1 et à valeurs propres réelles $\neq \pm 1$, par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

5.4. **Encore une géométrie de dimension 3 : Sol.** (Comparer avec la fin de 3.5.) Le groupe Sol, provisoirement noté également X, possède une structure riemannienne $ds^2 = e^{-2s}dx^2 + e^{2s}dy^2 + ds^2$ invariante par les multiplications à gauche. Son groupe d'isométries, notons-le G, a huit composantes connexes, celle de l'identité s'identifiant à Sol lui-même. Les (G, X)-structures sur les variétés de dimension 3, dites structures Sol, constituent également l'une des huit classes de Thurston.

5.5. **Quelques généralités sur les groupes de Lie résolubles.** (Comparer avec 3.7.) (i) Certains groupes de Lie résolubles sont unimodulaires, comme Sol, d'autres pas, comme $\mathrm{Aff}(n)$.

(ii) Soit G un groupe de Lie réel de dimension n, résoluble, connexe et simplement connexe ; alors G est difféomorphe à $\mathbf{R}^n$. Plus précisément, il existe une décomposition $\underline{g} = \underline{g}_1 \oplus \cdots \oplus \underline{g}_k$ de l'algèbre de Lie de G en somme directe d'espaces vectoriels telle que l'application $(X_1, \ldots, X_k) \longmapsto \exp X_1 \cdots \exp X_k$ soit un difféomorphisme de $\underline{g}$ sur G. (Théorème 2.2 du chapitre XII de [Hoch–65]).

(iii) Dans un groupe de Lie réel résoluble avec un nombre dénombrable de composantes connexes, un sous-groupe discret est un réseau si et seulement s'il est cocompact.

(iv) Un réseau Γ dans un groupe de Lie réel résoluble connexe simplement connexe est fortement polycyclique[15].

(v) Tout groupe polycyclique contient un sous-groupe d'indice fini qui est un réseau dans un groupe de Lie réel résoluble connexe simplement connexe.

(vi = théorème d'arithméticité de Mostow) Soient G un groupe de Lie réel connexe simplement connexe résoluble et Γ un réseau de G. Il existe une représentation linéaire fidèle $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbf{R})$ telle que $\rho(\Gamma) \subset GL_n(\mathbf{Z})$.

Pour ces résultats, voir [Ragh–72].

(vii) Tout groupe de Lie réel connexe résoluble de dimension 3 est localement isomorphe à l'un des suivants :

(1) le groupe abélien $\mathbf{R}^3$,
(2) le groupe de Heisenberg $H = \mathbf{R}^2 \rtimes_u \mathbf{R}$ (voir le chapitre 3 pour la/les définitions de H et (2) pour celle de l'action unipotente u),
(3) le groupe $E(2) = \mathbf{R}^2 \rtimes SO(2)$ des déplacements du plan euclidien,
(4) le groupe Sol, comme dansl (10) ;
(5) le produit direct $\mathrm{Aff}_0(1) \times \mathbf{R}$.

Les groupes (1), (2), (4) et (5) sont de la forme $\mathbf{R}^2 \rtimes_\varphi \mathbf{R}$, avec des φ que le lecteur explicitera sans peine. Le revêtement universel du groupe de (3) est de la forme $\mathbf{R}^2 \rtimes_\varphi \mathbf{R}$ avec $\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$. Cette liste épuise les groupes de la forme $\mathbf{R}^2 \rtimes \mathbf{R}$, à isomorphisme local près. Voir [Bess–81], page 59 (où il faut corriger l'oubli de (5)), et Bourbaki, Groupes et algèbres de Lie, chapitre 1, paragraphe 6, exercice 23.

(viii) Notons $SO_0(n,1)$ la composante connexe de l'élément neutre dans le groupe d'une forme quadratique sur $\mathbf{R}^{n+1}$ de signature $(n,1)$. Le groupe $SO_0(1,1)$ est isomorphe à $\mathbf{R}$. Le produit semi-direct $\mathbf{R}^2 \rtimes SO_0(1,1)$, qui est encore Sol, se note parfois $M(1,1)$, voir [Gold–81], et parfois $E(1,1)$, voir [Bess–81], page 43. Ainsi $M(1,1) = \mathbf{R}^2 \rtimes SO_o(1,1)$ est le groupe des déplacements du plan de Minkowski

6. **Un exemple de Goldman** [Gold–81]

6.1. **Un déguisement de la composante connexe de** $\mathrm{Aff}(1)$.

[15]Un groupe Γ est *polycyclique* s'il existe une suite de sous-groupes $\Gamma_0 = \Gamma \supset \Gamma_1 \supset \cdots \supset \Gamma_k = \{e\}$ telle que Γ_j soit normal dans Γ_{j-1} avec quotient Γ_{j-1}/Γ_j cyclique pour $j = 1, \ldots, k$. Un groupe Γ est *fortement polycyclique* s'il existe une telle suite avec de plus Γ_{j-1}/Γ_j cyclique infini pour $j = 1, \ldots, k$. Dans un groupe polycyclique, tout sous-groupe est de type fini (et même de présentation finie). Tout groupe polycyclique est isomorphe à un sous-groupe de $SL_n(\mathbf{Z})$ pour un entier n convenable [Ausl–67].

Notons G_2 le groupe des transformations affines de $\mathbf{R}^2$, préservant l'orientation, de la forme[16]

(11)
$$[r,s] \overset{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} e^{2r} & e^r s \\ 0 & e^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 \\ s \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^{2r}x + e^r sy + \frac{1}{2}s^2 \\ e^r y + s \end{pmatrix}.$$

On vérifie que c'est un groupe, avec

$$[r,s][u,v] \;=\; [r+u, s+e^r v], \qquad [r,s]^{-1} \;=\; [-r, -e^{-r}s]$$

pour tous $r,s,u,v \in \mathbf{R}$. C'est d'ailleurs un groupe isomorphe au groupe $\mathrm{Aff}_0(1)$ des transformations affines de la droite qui préservent l'orientation, groupe constitué des transformations

$$\mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \qquad y \longmapsto e^r y + s,$$

ou encore à $\begin{pmatrix} \mathbf{R}_+^* & \mathbf{R} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; c'est donc "le" groupe de Lie réel de dimension deux, connexe et simplement connexe, et non abélien[17].

Notons encore que le groupe G_2 n'est pas unimodulaire, puisque $e^{-r}drds$ est une mesure de Haar à gauche et $drds$ une mesure de Haar à droite[18], ce qui implique qu'il n'a aucun réseau (voir par exemple [Ragh–72], Remark 1.9, page 21).

---

[16]D'autres auteurs écriraient $\begin{pmatrix} e^{2r} & e^r s & \frac{1}{2}s^2 \\ 0 & e^r & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ au lieu de $\begin{pmatrix} e^{2r} & e^r s \\ 0 & e^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 \\ s \end{pmatrix}$; nous suivons [Gold–81].

[17]Exercice : montrer que, à isomorphisme près, il existe exactement une algèbre de Lie de dimension 2 non abélienne, et que cette algèbre est résoluble non nilpotente (ceci sur tout corps de base k). Indication : l'idéal dérivé d'une telle algèbre de Lie est nécessairement de dimension 1 ; soit $\{e,f\}$ une base (vectorielle) de l'algèbre de Lie, avec $[e,f]$ dans l'idéal dérivé ; quitte à multiplier f par le scalaire convenable, on obtient $[e,f] = f$.

[18]Ce qu'on vérifie par exemple comme suit, où f est une fonction continue à support compact sur G_2 :

$$\int_{\mathbf{R}^2} f([u,v][r,s])e^{-r}drds = \int_{\mathbf{R}^2} f([u+r, v+e^u s])e^{-r}drds =$$
$$\int_{\mathbf{R}^2} f([r',s'])e^{-r'+u}e^{-u}dr'ds' = \int_{\mathbf{R}^2} f([r,s])e^{-r}drds$$

et

$$\int_{\mathbf{R}^2} f([r,s][u,v])drds = \int_{\mathbf{R}^2} f([r+u, s+e^r v])drds = \int_{\mathbf{R}^2} f([r',s'])dr'ds'.$$

6.2. **Orbites de l'action affine de G_2 sur le plan.** Le groupe G_2 opère sur le plan $\mathbf{R}^2$ comme en (11). Notons P la parabole d'équation

$$2x = y^2.$$

Si $2x = y^2$, alors (voir (11))

$$2\left(e^{2r}x + e^r sy + \frac{1}{2}s^2\right) = (e^r y + s)^2 ,$$

ce qui implique que G_2 préserve P. La parabole P sépare le plan en un ouvert convexe

$$O_2^+ = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 2x > y^2 \right\}$$

et un ouvert connexe non convexe

$$O_2^- = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; 2x < y^2 \right\} ;$$

ces deux ouverts sont également invariants par G_2.

Le groupe G_2 opère transitivement sur O_2^+. En effet, étant donné $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in O_2^+$, si on pose $r = \frac{1}{2}\ln\left(x - \frac{1}{2}s^2\right)$ et $s = y$, on vérifie que

$$\begin{pmatrix} e^{2r} & e^r s \\ 0 & e^r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 \\ s \end{pmatrix} \quad : \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^{2r} + \frac{1}{2}s^2 = x \\ s = y \end{pmatrix}.$$

De plus, l'isotropie de $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ dans G_2 est réduite à la matrice identité. Par suite,

le groupe G_2 opère simplement transitivement sur O_2^+.

De même, il opère simplement transitivement sur O_2^-, et transitivement sur P (l'isotropie de l'origine est le sous-groupe des éléments de la forme $[r, 0]$).

6.3. **Un déguisement de** Sol **et son action affine sur l'espace $\mathbf{R}^3$.** Notons G_3 le groupe des transformations affines préservant l'orientation de $\mathbf{R}^3$ de la forme

$$\begin{aligned} [r,s,t] \overset{\text{notation}}{=} \begin{pmatrix} e^{2r} & e^r s & 0 \\ 0 & e^r & 0 \\ 0 & 0 & e^{-r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}s^2 \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad : \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} e^{2r}x + e^r sy + \frac{1}{2}s^2 \\ e^r y + s \\ e^{-r}z + t \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{12}$$

On vérifie comme plus haut que c’est bien un groupe, avec

$$[r,s,t][u,v,w] = [r{+}u, s{+}e^r v, t{+}e^{-r}w], \quad [r,s,t]^{-1} = [-r,-e^{-r}s,-e^{-r}t]$$

pour tous $r,s,t,u,v,w \in \mathbf{R}$. En comparant avec la formule (9), on voit que G_3 est précisément isomorphe au groupe Sol du chapitre 5.

L’action décrite en (12) de G_3 sur $\mathbf{R}^3$ possède trois orbites, qui sont l’ouvert convexe $O_3^+ := O_2^+ \times \mathbf{R}$, l’ouvert connexe non convexe $O_3^- := O_2^- \times \mathbf{R}$ de $\mathbf{R}^3$ et la surface lisse $P \times \mathbf{R}$. On vérifie comme plus haut que

le groupe G_3 opère simplement transitivement sur O_3^+,

et de même sur O_3^-.

Par suite, tout réseau de G agit proprement librement sur O_3^+ et O_3^-, et les quotients correspondants sont des variétés affines compactes de dimension 3 dont le groupe fondamental est résoluble.

Ces deux variétés compactes ne sont pas complètes !!!

Par exemple, pour $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ hyperbolique, la variété affine plate compacte complète F_A de la fin du no 5.3 et les deux variétés affines plates compactes non complètes $\Gamma_A \backslash O_3^{\pm}$ sont difféomorphes non isomorphes (non isomorphes par exemple parce que leurs développements, respectivement $\mathbf{R}^3, O_3^+$ et O_3^-, ne sont pas isomorphes

Dans [Gold–81], Goldman décrit des variations de ces exemples.

6.4. (G,X)**-structures sur les** G**-orbites ouvertes.** Soit (G,X) un type de structure, avec G un groupe de Lie ; notons n la dimension de X. Soit L un groupe de Lie de G de dimension n donné avec un homomorphisme $L \longrightarrow G$, de telle sorte qu’il existe une orbite ouverte O de L dans X. Soit x_0 un point de O. L’application $D : L \longrightarrow O,\ g \longmapsto gx_0$ fournit un difféomorphisme du type $L/\Delta \approx O$, pour un sous-groupe fermé Δ de L ; comme L et O ont la même dimension, Δ est un sous-groupe discret de L, de sorte que D est un revêtement. Il existe donc une unique (G,X)-structure sur L dont le développement est D. Cette structure est invariante par multiplication à gauche, puisque $L \longrightarrow L,\ g \longmapsto g_0 g$ correspond à une transformation $O \longrightarrow O,\ y \longmapsto g_0 y$ qui est dans G ; en d’autres termes, la multiplication par g_0 dans L est un isomorphisme de (G,X)-variété.

Exemples.

(i) Le groupe $G_2 = \mathrm{Aff}_0(1)$ agit sur $\mathbf{R}^2$ comme en 6.1, avec deux orbites ouvertes, d’où deux structures affines sur $\mathrm{Aff}(1)$, invariantes à gauche. (!!! Il s’agit bien de $(\mathrm{Aff}(2), \mathbf{R}^2)$-structures sur la composante connexe du groupe $\mathrm{Aff}(1)$!!!)

(ii) Le sous-groupe G_3 de Aff(2) agit sur $\mathbf{R}^3$ comme en 6.3 avec deux orbites ouvertes, d'où deux structures affines invariantes à gauche sur G_3 (lui-même difféomorphe à $\mathbf{R}^2$).

(iii) Si O est simplement connexe, la restriction à toute composante connexe de L de l'application D est un difféomorphismes – c'est le cas dans les exemples (i) et (ii) ci-dessus, mais ce n'est pas toujours le cas. En effet, considérons par exemple l'homomorphisme de $\mathbf{C}^*$ dans Aff(2) résultant en l'action de $\mathbf{C}^*$ sur $\mathbf{R}^2 = \mathbf{C}$ décrite par $(z, x) \longmapsto z^2x$; alors $O = \mathbf{C}^*$ et l'application notée D ci-dessus est un revêtement à deux feuilles.

Réciproquement, si L est un groupe de Lie connexe simplement connexe de dimension n, toute (G, X)-structure sur L invariante à gauche peut être obtenue comme ci-dessus à partir d'une orbite ouverte d'une action de L sur X.

[C'est affirmé dans l'exemple 1.4 de [Beno–00] – pas encore tout à fait clair !!!]

References

[Abel–01] Herbert Abels, *Properly discontinuous groups of affine transformations: a survey*, Geometriae Dedicata **87** (2001), 309–333.

[AbMS–02] Herbert Abels, G.A. Margulis, and G.A. Soifer, *On the Zariski closure of the linear part of a properly discontinuous group of affine transformations*, J. Differential Geom. **60** (2002), 315–344.

[Ausl–56] Louis Auslander, *Examples of locally affine spaces*, Annals of Math. **64** (1956), 255–259.

[Ausl–67] Louis Auslander, *On a problem of Philip Hall*, Annals of Math. **86** (1967), 112–116.

[BAlg–70] Nicolas Bourbaki, *Algèbre, chapitres 1 à 3*, Diffusion C.C:L.S., 1970.

[Beno–95] Yves *Benoist*, *Une nilvariété non affine*, J. Differential Geometry **41** (1995), 21–52.

[Beno–00] Yves Benoist, *Tores affines*, Contemp. Math. **262** (2000), 1–37.

[Beno–01] Yves *Benoist*, *Pavages du plan*, Journées X-UPS des 14 & 15 mai 2001, http://www.math.polytechnique.fr/xups/xups01.01.pdf

[Benz–60] J.-P. Benzecri, *Sur les variétés localement affines et localement projectives*, Bull. Soc. Math. France **88** (1960), 229–332.

[BeGe–04] Nicolas **Bergeron** and Tsachik Gelander, *A note on local rigidity*, Geometriae Dedicata **107** (2004), 111–131.

[Bess–81] Séminaire Arthur Besse, *Géométrie riemannienne en dimension* 4, Cedic/Fernand Nathan, 1981.

[BrHK–09] Martin Bridson, Pierre de la Harpe and Victor Kleptsyn, *The Chabauty space of closed subgroups of the three-dimensional Heisenberg group*, Pacific J. Math. **240** (2009), 1–48.

[Buse–85] Peter Buser, *Geometric proof of Biebergach's Theorems on crystallographic groups*, L'Enseignement Mathématique **31** (1985), 137–145.

[CaDM–93] Yves CARRIÈRE, Françoise DAL'BO et Gaël MEIGNIEZ, *Non-existence of affine structures on Seifert fibre spaces*, Math. Ann. **296**, No.4, (1993), 743–753.

[Carr–88] Yves CARRIÈRE, *Un survol de la théorie des variétés affines*, Séminaire de théorie spectrale et géométrie **6** (1987-88), 9–22.

[DeIg–00] Karel **Dekimpe** and Paul IGODT, *Polynomial alternatives for the group of affine motions*, Math. Z. **234** (2000), 457–485.

[Ehre–35] Charles EHRESMANN, *Les connexions infinitésimales dans un espace fibré différentiable*, Colloque de topologie (espaces fibrés), Bruxelles 1950, pages 29–55.

[Ehre–36] Charles EHRESMANN, *Sur les espaces localement homogènes*, L'Enseignement Math. **35** (1936), 317–333.

[Epst–84] David EPSTEIN, *Transversely hyperbolic 1-dimensional foliations*, in "Structure transverse des feuilletages, Touloue, 17-19 février 1982", Astérisque **116** (1984), 53–69. GE : 57/24.

[FrGo–83] D. FRIED and William M. GOLDMAN, *Three dimensional affine crystallographic groups*, Adv. in Math. **47** (1983), 1–49.

[FuAr–75] P.M. FURNESS and D.K. ARROWSMITH, *Locally symmetric spaces*, J. London Math. Soc. **10** (1975), 487–499.

[Gold–81] William M. GOLDMAN, *Two examles of affine manifolds*, Pacific Journal of Math. **94** (1981), 327–330.

[Haef–82] André HAEFLIGER, *Les (G, X)-variétés et leurs développements*, un chapitre d'un cours du printemps 1982, notes dactilographiées (11 p.).

[Harp–00] Pierre de la Harpe, *Topics in geometric group theory*, Univ. of Chicago Press, 2000.

[Hoch–65] G. HOCHSCHILD, *The structure of Lie groups*, Holden Day, 1965.

[KoSu–75] Bertram KOSTAND et Dennis SULLIVAN, *The Euler characteristic of an affine space form is zero*, Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 937–938.

[Kuip–53] Nicolaas Hendrik KUIPER, *Sur les surfaces localement affines*, Colloque de géométrie différentielle, Strasbourg, 1953, 79–87.

[MaKS–66] W. Magnus, A. Karrass, and D. Solitar, *Combinatorial group theory*, Interscience, 1966.

[Miln–58] John MILNOR, *On the existence of a connection with curvature zero*, Commentarii Math. Helv. **32** (1958), 215–223. Collected papers, Volume 1, 37–47.

[Miln–77] John MILNOR, *On fundamental groups of complete affinely flat manifolds*, Advances in Math. **25** (1977), 178–187. Collected papers, Volume 1, 119–130.

[NaYa–74] Tadashi NAGANO and Katsumi YAGI, *The affine structures on the real two-torus. I*, Osaka J. Math. **11** (1974), 181–210. Voir aussi (mêmes auteurs et même titre) : Bull. Amer. Math. Soc. **79** (1973), 1251–1253.

[Ragh–72] Madabusi Santanam RAGHUNATHAN, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer Ergebnisse der Math. **68**, 1972.

[Rham–52] Georges DE RHAM, *Sur la réductibilité d'un espace de Riemann*, Commentarii Math. Helv. **26** (1952), 328–344, = Oeuvres mathématiques, 367–383.

[Scot–83] Peter SCOTT, *The geometries of* 3*-manifolds*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 401–487.

[Serr–65] Jean-Pierre SERRE, *Lie algebras and Lie groups*, Benjamin, 1965.

[SuTh–83] Dennis SULLIVAN and William THURSTON, *Manifolds with canonical coordinate charts: some examples*, L’Enseignement Math. **29** (1983), 15–25.

[Tayl–92] Donald E. TAYLOR, *The geometry of the classical groups*, Heldermann Verlag, 1992. GE 20/285.

[Thur–80] William P. THURSTON, *The geometry and topology of three-manifolds*, Lecture Notes, Princeton University, 1980. (Chapters 1-4 : Notes of a course at Princeton, Fall 1977.) Electronic version, March 2002, http://library.msri.org/books/gt3m/

[Thur–82] William P. THURSTON, *Three-dimensional manifolds, Klenian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.

[Thur–97] William P. THURSTON, *Three-dimensional geometry and topology, Volume 1*, Princeton Univ. Press, 1997.

Projets et questions

Comprendre les exemples de variétés affines de dimensions 2, 3 et 4 de [SuTh–83].

Notion de (G, X)-structure sur une orbifold ; voir le chapitre 13 de [Thur–82].

Le théorème de Kostant et Sullivan : la caractéristique d’Euler d’une variété affine plate complète est nulle [KoSu–75]. Conjecture de Chern : c’est encore vrai pour les variétés affines plates compactes.

Toute nil-variété possède-t-elle une structure affine ??? (à propos de 3.9).

PIERRE DE LA HARPE : SECTION DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, C.P. 64, CH–1211 GENÈVE 4. ADRESSE MEL : PIERRE.DELAHARPE@UNIGE.CH