CROISSANCE DE GROUPES ET PRODUITS LIBRES AVEC AMALGAMATION.

MICHELLE BUCHER

Table des matières.

1. Définitions et premiers exemples.

Définition. Soit G un groupe de génération finie, S une famille finie de générateurs de G; on définit

$$\begin{array}{rccl} \ell_S: & G & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & x & \longmapsto & \min\{n \in \mathbb{N} \mid x = s_1 \cdots s_n,\ s_i \in S \cup S^{-1}\} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccl} d_S: & G \times G & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & (x,y) & \longmapsto & \ell_S(x^{-1}y). \end{array}$$

Remarque. $\ell_S(x)$ est simplement le nombre minimal d'éléments de $S \cup S^{-1}$ nécessaires à l'écriture de x.

Affirmation. d_S est une distance.

1. $d_S(x,y) \geq 0$ par définition de d_S et $(d_S(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$ par définition du produit vide,
2. $d_S(x,y) = d_S(y,x)$ puisque les s_i sont dans $S \cup S^{-1}$,
3. inégalité du triangle: soient $x, y, z \in G$, soient $s_1, \dots, s_m, t_1, \dots, t_n \in S \cup S^{-1}, m, n \in \mathbb{N}$ tels que $x^{-1}y = s_1 \cdots s_m, y^{-1}z = t_1 \cdots t_n$; comme $x^{-1}z = x^{-1}yy^{-1}z = s_1 \cdots s_m t_1 \cdots t_n$ on a $d_S(x,z) \leq n + m$, et en particulier pour $m = d_S(x,y), n = d_S(y,z)$ on obtient $d_S(x,z) \leq d_S(x,y) + d_S(y,z)$.

Définition. $B_S(n) := \{x \in G \mid l_S(x) \leq n\}$, $\beta_S(n) := |B_S(n)|$; la **croissance** $\omega(G,S)$ de G par rapport à S est définie par

$$\omega(G,S) := \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)}.$$

On dit que G est de **croissance exponentielle pour** S si $\omega(G,S) > 1$.

Date: 20 septembre 1999.

On a $\omega(G,S) \in [1, 2|S|-1]$. En effet, $\omega(G,S) \geq 1$ car $1 \in B_S(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$, et donc $\beta_S(n) \geq 1$. D'autre part, notons $\sigma_S(k) := |\{x \in G \mid \ell_S(x) = k\}|$ (c'est-à-dire le nombre de mots en S de longueur exactement k); si $m := |S|$ on a $\sigma_S(1) \leq 2m$ et $\sigma_S(k+1) \leq (2m-1)\sigma_S(k)$ puisqu'à un mot réduit de longueur k en S on ne peut ajouter qu'un élément de $S \cup S^{-1}$ et on réduira la longueur si on ajoute l'inverse du dernier élément du mot réduit; d'où

$$\begin{aligned}
\beta_S(n) &= \sigma_S(0) + \sigma_S(1) + \cdots + \sigma_S(n) \\
&\leq \sigma_S(0) + \sigma_S(1)(1 + (2m-1) + \cdots + (2m-1)^{n-1}) \\
&\leq 1 + 2m\frac{(2m-1)^n - 1}{(2m-1)-1} \\
&= 1 + m\frac{(2m-1)^n - 1}{m-1}
\end{aligned}$$

et enfin $\omega(G,S) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)} \leq 2m-1$.

Exemples.

1. Si G est un groupe fini alors $\omega(G,S) = 1$ pour toute famille génératrice S de G.
2. $G = \mathbb{Z}, S = \{1\}$
$$\begin{array}{rl}
B_S(1) = \{-1, 0, 1\} & \beta_S(1) = 3 \\
B_S(2) = \{-2, -1, 0, 1, 2\} & \beta_S(2) = 5 \\
\cdots & \cdots \\
B_S(n) = \{-n, -(n-1), \ldots, n-1, n\} & \beta_S(n) = 2n+1 \ \forall n \in \mathbb{N},
\end{array}$$
alors $\omega(G,S) = 1$.
3. $G = \mathbb{Z}^2$, $S = \{(1,0), (0,1)\}$, alors $\omega(G,S) = 1$.
4. $G = F_2 = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}, S =$générateurs canoniques
$$\begin{aligned}
\beta(1) &= 1 + 4 \\
\beta(2) &= 1 + 4 + 4 \cdot 3 \\
\beta(3) &= 1 + 4 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 3^2 \\
&\cdots \\
\beta(n) &= 1 + 4(\tfrac{3^n - 1}{3-1}) = 1 + 2(3^n - 1) \ \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$
alors $\omega(G,S) = 3$.
5. $G = F_k = \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}^*$, $S =$ générateurs canoniques
$$\begin{aligned}
\beta(1) &= 1 + 2k \\
\beta(2) &= 1 + 2k + 2k \cdot (2k-1) \\
\beta(3) &= 1 + 2k + 2k \cdot (2k-1) + 2k \cdot (2k-1)^2 \\
&\cdots \\
\beta(n) &= 1 + 2k(\tfrac{(2k-1)^n - 1}{(2k-1)-1}) = 1 + \tfrac{k}{k-1}((2k-1)^n - 1) \ \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$
alors $\omega(G,S) = 2k-1$.

Remarque. $\omega(G,S) = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)}$.

Proof. Voir [...] □

Proposition 1. *Soit G un groupe, S, T deux ensembles finis de générateurs de G, alors il existe $C > 0$ tel que $\omega(G,S) \leq \omega(G,T)^C$.*

Proof. Soit $C := \sup_{s\in S} l_T(s)$. Alors $B_S(n) \subset B_T(Cn)$ et donc $\beta_S(n) \leq \beta_T(Cn)$ et

$$\begin{aligned} \omega_S &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_S(n)} \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\beta_T(Cn)} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{(\beta_T(m))^C} \\ &= (\omega_T)^C. \end{aligned}$$

□

Exemples.
1. $G = \mathbb{Z}$, $S = \{1\}, T = \{2, 3\}$;
2. $G = \mathbb{Z}^n \Longrightarrow \omega(G, S) = 1, \forall S$ famille génératrice de $\mathbb{Z}^n$;
3. $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$: voir plus bas.

Corollaire 2. $\omega(G, S) > 1 \Longleftrightarrow \omega(G, T) > 1$.

On peut donc parler de croissance exponentielle d'un groupe, indépendamment de sa famille de générateurs. Par contre, il n'est pas inimaginable d'avoir une suite $\{S_n\}$ de familles génératrices telles que $\omega(G, S_n) > 1$ et $lim_{n\to\infty}\omega(G, S_n) = 1$. D'où la définition suivante:

Définition. Un groupe G est à **croissance exponentielle uniforme** si

$$\omega(G) := \inf_S \omega(G, S) > 1$$

où l'infimum est pris sur toutes les familles finies S génératrices de G.

Remarques.
1. Le C de la proposition 1 n'est pas uniformément borné (ce qui nous permettrait sinon de conclure que la croissance exponentielle uniforme découle de la croissance exponentielle). En effet, prendre G, S tels que $\omega(G, S) > 1$, k un entier strictement plus grand que 1, et considérons la famille génératrice suivante: $T := B_S(k)$. On a alors $C_{S,T} := \sup_{t\in T}\{\ell_S(t)\} = k$. En fait, on a même $\beta_T(n) = \beta_S(kn), \forall n \in \mathbb{N}$ et donc $\omega(G, T) = \omega(G, S)^k$.
2. On ne sait pas s'il existe un groupe à croissance exponentielle, et non à croissance exponentielle uniforme.

Exemple. F_n est à croissance exponentielle uniforme ($n \geq 2$). En effet, on peut montrer que $\omega(F_n, S) \geq 2n - 1, \forall S$ famille génératrice de F_n (voir par exemple [?], proposition VII.13).

2. Techniques de calcul de $\omega(G, S)$.

Soit G un groupe de type fini, et S un ensemble fini de générateurs de G. Notons $\omega := \omega(G, S), \beta_S(k) := \beta(k)$. Soit $\sigma(k) := |\{x \in G \mid l_S(x) = k\}|$. On a clairement: $\beta(n) = \sigma(0) + \sigma(1) + \cdots + \sigma(n)$.

Considérons la série formelle

$$\begin{aligned} B(z) &:= \sum_{n=0}^{\infty} \beta(n) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{n} \sigma(k)) z^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n (1 + z + z^2 + \dots) \\ &= (\sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n) \frac{1}{1-z} \\ &= C(z) \frac{1}{1-z}, \end{aligned}$$

avec $C(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \sigma(n) z^n$.

Soit ρ_C (respectivement ρ_B) le rayon de convergence de la série $C(z)$ (resp. $B(z)$). Si $\rho_C < 1$ alors $\rho_C = \rho_B$, et donc

$$\omega = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\beta(n)} = \frac{1}{\rho_B} = \frac{1}{\rho_C} = \limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\sigma(n)}.$$

Il est parfois plus facile de considérer $C(z)$ au lieu de $B(z)$.

Exemples. Soit $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ avec $a^2 = 1, b^3 = 1$.

1. $S = \{a, b\}$

   Soit $\sigma_c(k)$ le nombre de mots réduits de longueur k se terminant par c ou c^{-1}, avec $c \in \{a, b\}$. On a

   $$\sigma_a(k) = \sigma_b(k-1)$$
   $$\sigma_b(k) = 2\sigma_a(k-1).$$

   D'où $\sigma(k) = \sigma_a(k) + \sigma_b(k) = 2\sigma(k-2)$ et donc

   $$\omega = \lim_{k \to \infty} \frac{\sigma(k)}{\sigma(k-1)} = \lim_{k \to \infty} \frac{2\sigma(k-2)}{\sigma(k-1)} = 2\frac{1}{\omega}$$

   et donc $\omega = \sqrt{2}$.
2. $T = \{a, t\}$, avec $t = ab$. On a $(ab)^3 = 1$. On ne compte pas les mots de la forme $tat, t^{-1}at^{-1}$ car ils sont déjà comptés sous la forme $at^{-1}a, ata$. On a

   $$\begin{aligned} \sigma_a(k) &= \sigma_t(k-1) \\ \sigma_t(k) &= 2\sigma_a(k-1) - \sigma_t(k-2) + \sigma_t(k-1) = \sigma_a(k-1) + \sigma_t(k-1). \end{aligned}$$

   D'où $\sigma(k) = \sigma(k-1) + \sigma(k-2)$. On reconnait une suite de Fibonacci et donc

   $$\omega = \lim_{k \to \infty} \frac{\sigma(k)}{\sigma(k-1)} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Vérifions au passage la proposition 1 énoncée plus haut:
Soit $C := sup_{s \in S} l_T(s) = sup\{l_T(a), l_T(b)\} = 2$, car $a = a$ et $b = at$.
On a bien $\omega_S = \sqrt{2} \leq \omega_T = (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^2$.
Inversemment, soit $C' := sup_{t \in T} l_S(t) = 2$, et $\omega_T \leq (\omega_S)^2$.

Observation 3. *Plus généralement, soit $G = A * B$ avec $A = \mathbb{Z}_2$ et $B = \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{Z}_m$, avec $m \in \mathbb{N}, m \geq 3$. Soit a un générateur de A et b un générateur de B. Alors*

$$\omega(G, \{a, ab\}) \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

En effet, soit $t := ab$. La seule relation possible entre a et t est $(at)^m = 1$, si $B = \mathbb{Z}_m$.

- *Si $m = 2n+1$, avec $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} ta \dots at &= at^{-1} \dots t^{-1}a \\ t^{-1}a \dots at^{-1} &= at \dots ta \end{aligned}$$

- *Si $m = 2n$, avec $n \geq 1$, on a*

$$\begin{aligned} ta \dots ta &= at^{-1} \dots at^{-1} \\ t^{-1}a \dots t^{-1}a &= at \dots at \end{aligned}$$

Dans les deux cas, si on ne compte que les mots de droite des équations ci-dessus on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_a(k) &= \sigma_t(k-1) \\ \sigma_t(k) &\geq 2\sigma_a(k-1) + \sigma_t(k-1) - \sigma_t(k-2) = \sigma_a(k-1) + \sigma_t(k-1) \end{aligned}$$

D'où $\sigma(k) \geq \sigma(k-1) + \sigma(k-2)$ et $\omega \geq \sqrt{2}$.

3. Formule pour le produit libre de deux groupes.

Soit G_1, G_2 deux groupes engendrés par des familles finies S_1, S_2. On considère les séries de croissances $C_1(z) = \sum \sigma_{S_1}(n) z^n$ et $C_2(z) = \sum \sigma_{S_2}(n) z^n$. Soit $G = G_1 * G_2$ et $S = S_1 \cup S_2$; nous allons nous intéresser à la série de croissance de G par rapport à S. Un mot en S s'écrit de la façon suivante:

$$x = x_0 y_1 x_1 \cdots x_N y_{N+1}$$

avec pour x_i des mots en S_1, y_j des mots en S_2, $x_1, \dots, x_N \neq 1$, $y_1, \dots, y_N \neq 1$, ce qui livre:

$$\begin{aligned} C(z) &= C_1(z) \Bigg(\sum_{N=0}^{\infty} \Big(\big(C_2(z) - 1\big)\big(C_1(z) - 1\big) \Big)^N \Bigg) C_2(z) \\ &= \frac{C_1(z) C_2(z)}{1 - (C_1(z) - 1)(C_2(z) - 1)} \\ &= \frac{C_1(z) C_2(z)}{C_1(z) + C_2(z) - C_1(z) C_2(z)}, \end{aligned}$$

$$(*) \qquad \frac{1}{C(z)} - 1 = \Big(\frac{1}{C_1(z)} - 1 \Big) + \Big(\frac{1}{C_2(z)} - 1 \Big).$$

Exemple. Soit $G_1 := \mathbb{Z}_2, G_2 := \mathbb{Z}_3$, avec $\mathbb{Z}_2 = \langle a \rangle, \mathbb{Z}_3 = \langle b \rangle$, et calculons à nouveau la croissance de $G = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ par rapport à la famille génératrice $S := \{a, b\}$. On a

$$\begin{aligned} C_1(z) &= 1 + z \\ C_2(z) &= 1 + 2z, \end{aligned}$$

ce qui livre

$$C(z) = \frac{(1+z)(1+2z)}{1 - 2z^2}.$$

Le rayon de convergence de $C(z)$ est $\frac{1}{\sqrt{2}}$, et donc $\omega(G, S) = \sqrt{2}$.

De même, on utilise la relation * ci-dessus pour écrire un programme Maple calculant la croissance du produit libre de deux groupes cycliques d'ordre m et n $(m, n \in \mathbb{N})$: $\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n = \langle a \rangle * \langle b \rangle$ (où $a^m = b^n = 1$), avec $S = \{a, b\}$.

```
> C:=15:
> A:=array(2..C,2..C):
> for i from 2 to C do
> for j from i to C do
> A[i,j]:=Rés(i,j);
> A[j,i]:=A[i,j];
> od:od:

Warning, new definition for norm

Warning, new definition for trace
> B:=array(1..C-1,1..C-1):
> for i from 1 to (C-1) do
> for j from i to (C-1) do
> B[i,j]:=evalf(A[i+1,j+1]);
> B[j,i]:=evalf(A[i+1,j+1]);
> od;
> od;
```

Le coefficient de la ligne (m-1), colonne (n-1) est omega(Z_m*Z_n, S_can):

```
> print(B);
```

[1. , 1.414213563 , 1.618033988 , 1.769292354 , 1.839286756 , 1.899321088 , 1.927561980 , 1.953501637 , 1.965948237 , 1.977807115 , 1.983582843 , 1.989200502 , 1.991964197 , 1.994684309]

[1.414213563 , 2.000000000 , 2.214319742 , 2.382975767 , 2.443718371 , 2.498374320 , 2.518695765 , 2.538038822 , 2.545394350 , 2.552580922 , 2.555349265 , 2.558087775 , 2.559149917 , 2.560206791]

[1.618033988 , 2.214319742 , 2.414213565 , 2.575175356 , 2.629658187 , 2.679377607 , 2.696797185 , 2.713521428 , 2.719509249 , 2.725389292 , 2.727519015 , 2.729631810 , 2.730401441 , 2.731168428]

[1.769292354 , 2.382975767 , 2.575175356 , 2.732050806 , 2.782583616 , 2.829116230 , 2.844661337 , 2.859668251 , 2.864788042 , 2.869831534 , 2.871570469 , 2.873298508 , 2.873897270 , 2.874494491]

[1.839286756 , 2.443718371 , 2.629658187 , 2.782583616 , 2.831177198 , 2.876090273 , 2.890888316 , 2.905202100 , 2.910015859 , 2.914762746 , 2.916375411 , 2.917978796 , 2.918526065 , 2.919072061]

[1.899321088 , 2.498374320 , 2.679377607 , 2.829116230 , 2.876090273 , 2.919639562 , 2.933805382 , 2.947530207 , 2.952085160 , 2.956580699 , 2.958087329 , 2.959585932 , 2.960090404 , 2.960593804]

[1.927561980 , 2.518695765 , 2.696797185 , 2.844661337 , 2.890888316 , 2.933805382 , 2.947711588 , 2.961193883 , 2.965649847 , 2.970049114 , 2.971517141 , 2.972977570 , 2.973467032 , 2.973955488]

[1.953501637 , 2.538038822 , 2.713521428 , 2.859668251 , 2.905202100 , 2.947530207 , 2.961193883 , 2.974449234 , 2.978812634 , 2.983121803 , 2.984553778 , 2.985978543 , 2.986454023 , 2.986928556]

[1.965948237 , 2.545394350 , 2.719509249 , 2.864788042 , 2.910015859 , 2.952085160 , 2.965649847 , 2.978812634 , 2.983140007 , 2.987414120 , 2.988832526 , 2.990243869 , 2.990714216 , 2.991183638]

[1.977807115 , 2.552580922 , 2.725389292 , 2.869831534 , 2.914762746 , 2.956580699 , 2.970049114 , 2.983121803 , 2.987414120 , 2.991654101 , 2.993059304 , 2.994457584 , 2.994922938 , 2.995387389]

[1.983582843 , 2.555349265 , 2.727519015 , 2.871570469 , 2.916375411 , 2.958087329 , 2.971517141 , 2.984553778 , 2.988832526 , 2.993059304 , 2.994459520 , 2.995852866 , 2.996316370 , 2.996778977]

[1.989200502 , 2.558087775 , 2.729631810 , 2.873298508 , 2.917978796 , 2.959585932 , 2.972977570 , 2.985978543 , 2.990243869 , 2.994457584 , 2.995852866 , 2.997241330 , 2.997703003 , 2.998163787]

[1.991964197 , 2.559149917 , 2.730401441 , 2.873897270 , 2.918526065 , 2.960090404 , 2.973467032 , 2.986454023 , 2.990714216 , 2.994922938 , 2.996316370 , 2.997703003 , 2.998163999 , 2.998624109]

[1.994684309 , 2.560206791 , 2.731168428 , 2.874494491 , 2.919072061 , 2.960593804 , 2.973955488 , 2.986928556 , 2.991183638 , 2.995387389 , 2.996778977 , 2.998163787 , 2.998624109 , 2.999083548]

Déclaration des procédures:

Calcule la série Sigma d'un groupe cyclique d'ordre n:

```
> Sigma:=proc(n::integer)
> local i:
> global z,g:
> g(z):=1:
> for i from 1 to (floor(n/2)-1) do
```

```
> g(z):=g(z)+2*z^i:
> od:
> if modp(n,2)=0 then
> g(z):=g(z)+z^(n/2):
> else
> g(z):=g(z)+2*z^(floor(n/2)):
> fi:
> end:
```

Calcule la série Sig d'un produit libre de deux groupes cycliques d'ordre n et m.

```
> Sig:=proc(n,m)
> global fn,fm, S,z:
> fn:=Sigma(n):
> fm:=Sigma(m):
> S:=simplify(fn*fm/(fn+fm-fn*fm));
> end:
```

Procédure qui donne le résultat final:

```
> Rés:=proc(n,m)
> local i,sols,var_res:
> global fn,fm,S,z:
> with(linalg):
```

On stocke dans sols tous les zéros de 1/Sig
On prend le plus proche de l'origine, qui est égal au rayon de cvgce.
On l'inverse, et on a notre croissance.

```
> sols:=vector([evalf(allvalues(RootOf(1/Sig(n,m))))]):
> var_res:=abs(sols[1]):
> for i from 2 to vectdim(sols) do
> var_res:=min(var_res,abs(sols[i])):
> od:
> var_res:=1/var_res:
> end:
```

Observation 4. *Soit $\mathbb{Z}_m = \langle a\rangle, \mathbb{Z}_n = \langle b\rangle$. Si les ordres de a et b ne sont pas tous les deux 2, alors $\omega(\mathbb{Z}_m * \mathbb{Z}_n, \{a,b\}) \geq \sqrt{2}$.*

Plus généralement, soient G_i des groupes de type fini, pour $i \in \{1,\dots,N\}$, S_i des familles finies de générateurs des G_i, on montre par récurrence que les séries de croissance de $G_1,\dots,G_N$ et $G = G_1 * \cdots * G_N$ par rapport aux familles finies de générateurs $S_1,\dots,S_N$ et $S = S_1 \cup \cdots \cup S_N$ vérifient la relation suivante:

$$\frac{1}{C(z)} - 1 = \sum_{i=1}^{N} \Big(\frac{1}{C_i(z)} - 1 \Big).$$

4. Actions sur un arbre: quelques propriétés.

Lemme 5 (Lemme du Ping-pong)**.** *Soit G un groupe agissant sur un ensemble X. Soient G_1, G_2 deux sous-groupes de G et soit G_0 le sous-groupe engendré par G_1 et G_2. Supposons qu'il existe deux ensembles non vides X_1, X_2 dans X, avec X_2 non inclu dans X_1 tels que*

$$g(X_2) \subset X_1, \;\; \forall\, g \in G_1, g \neq 1$$
$$g(X_1) \subset X_2, \;\; \forall\, g \in G_2, g \neq 1.$$

Alors $G_0 = G_1 * G_2$.

Proof. Voir [?], II.B.24. □

Définitions. Soit X un arbre, X^0 l'ensemble de ses sommets, $\delta : X^0 \times X^0 \to \mathbb{N}$ la distance usuelle (comptant le nombre d'arêtes joignant deux sommets).
Un automorphisme g de X a une **inversion** s'il existe deux sommets $x, y \in X^0$ avec $\delta(x, y) = 1$ qui sont échangés par g.
Un automorphisme g de X est **hyperbolique** s'il n'a pas d'inversion et si son **amplitude**

$$a_g := \min_{x \in X^0} \delta(x, gx)$$

est strictement positive.
L'ensemble de sommets $L_g^0 := \{x \in X^0 \mid \delta(x, gx) = a_g\}$ du sous-graphe L_g de X est l'**axe** de g.
Un automorphisme g de X est **elliptique** si $g \neq 1$ et si l'ensemble

$$Fix(g) := \{x \in X \mid gx = x\}$$

est non vide.

Remarques.
- L_g est une géodésique dans X,
- g induit sur L_g une translation d'amplitude a_g,
- si g est hyperbolique alors pour tout n dans $\mathbb{Z}^*$, g^n est hyperbolique d'amplitude $|n| a_g$,
- si g est elliptique alors le graphe formé par l'ensemble de sommets $Fix(g)$ est connexe et donc un sous-arbre de X.

Proposition 6. *Soient g, h des automorphismes agissant sur un arbre X. Si g est hyperbolique, alors hgh^{-1} est aussi hyperbolique, de même amplitude que g, et d'axe $h(L_g)$.*

Proof. Il suffit d'observer que $h(L_g)$ est laissé invariant par hgh^{-1} et $hgh^{-1} \neq 1$. □

Définition. Soient g_1, g_2 deux automorphismes agissant sur X, d'axes L_1, L_2. Notons

$$|L_1 \cap L_2| := \text{nombre d'arêtes contenues dans } L_1 \cap L_2.$$

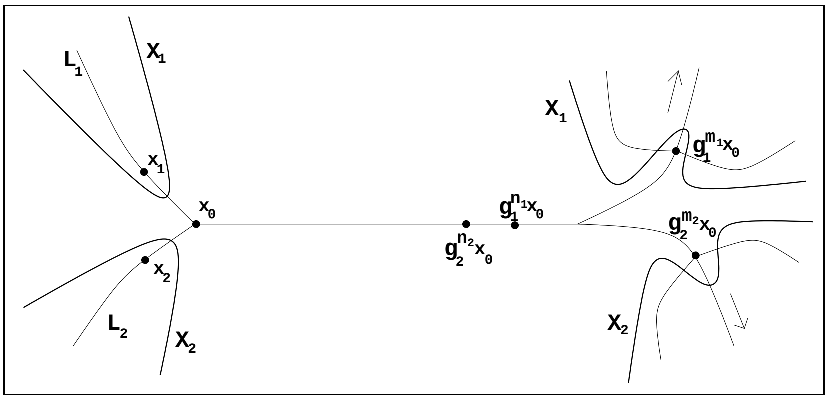
Proposition 7. *Soit G un groupe agissant sur un arbre X. Soient $g_1, g_2 \in G$ deux automorphismes hyperboliques de X tels que $|L_1 \cap L_2| = d \in \mathbb{N}$. Soient $n_1, n_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}$ avec $0 \leq r_i < a_i, i = 1, 2$ tels que*

$$d = n_1 a_1 + r_1 = n_2 a_2 + r_1.$$

Alors pour tous $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $|m_i| > n_i, i = 1, 2$ on a

$$\langle g_1^{m_1}, g_2^{m_2} \rangle = \langle g_1^{m_1} \rangle * \langle g_2^{m_2} \rangle.$$

Proof. On peut supposer sans restreindre la généralité, que m_1, m_2 sont positifs. De plus, quitte à remplacer g_2 par son inverse, on peut supposer que les sens de translation de g_1 et g_2 (et donc $g_1^{m_1}$ et $g_2^{m_2}$) coïncident sur $L_1 \cap L_2$.



Soit $x_0 \in L_1 \cap L_2$ le sommet situé à une des extrémités de $L_1 \cap L_2$ qui est translaté par g_1 et g_2 en direction de $L_1 \cap L_2$.
Soit $x_1 \in L_1 \setminus L_2$ tel que $\delta(x_0, x_1u) = 1$.
Soit $x_2 \in L_2 \setminus L_1$ tel que $\delta(x_0, x_2) = 1$.
Soit X_1 l'union disjointe des deux ensembles suivants:

$\{x \in X^0 \mid \quad \delta(x, x_1) < \delta(x, x_0)\}$

$\{x \in X^0 \mid \quad$ la géodésique reliant x à x_0 contient $g_1^{m_1} x_0$ comme point intérieur$\}$.

Symétriquement, on définit X_2. On a $X_1 \cap X_2 = \emptyset$.

On remarque que $g_1^{m_1} x_0,\ g_2^{m_2} x_0 \notin L_1 \cap L_2$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}^*$, on a

$$g_1^{km_1}(X_2) \subset X_1$$
$$g_2^{km_2}(X_1) \subset X_2,$$

et on termine en appliquant le lemme 5 à $G_1 = \langle g_1^{m_1} \rangle, G_2 = \langle g_2^{m_2} \rangle$. □

En particulier, on obtient:

Corollaire 8. *Soient g_1, g_2 deux automorphismes hyperboliques de même amplitude a. Si $|L_1 \cap L_2| < a$ alors $\langle g_1, g_2 \rangle = \langle g_1 \rangle * \langle g_2 \rangle$.*

Proof. La division euclidienne de la proposition ci-dessus devient:

$$a > d = 0 \cdot a + d.$$

□

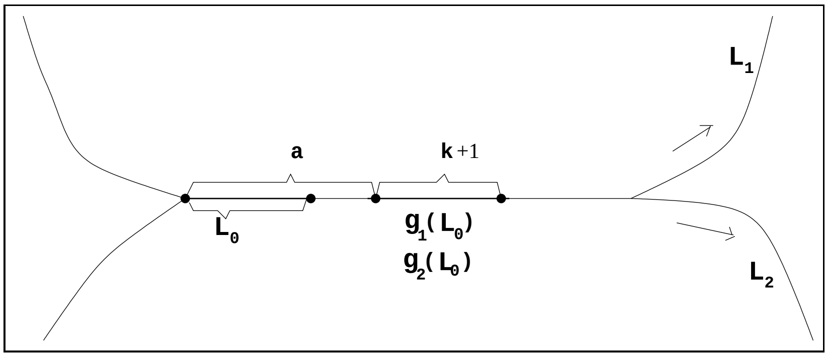
Corollaire 9. *Soient g_1, g_2 deux automorphismes hyperboliques de même amplitude a. Si $|L_1 \cap L_2| = a$ alors $\langle g_1^2, g_2^2 \rangle = \langle g_1^2 \rangle * \langle g_2^2 \rangle$.*

Proof. $a = 1 \cdot a + 0$. □

Définition. Soit X un arbre. Soit G un groupe d'automorphisme de X agissant sans inversion. Soit $k \in \mathbb{N}$. G agit **k-acylindriquement** sur X si l'ensemble des points fixes de tout $g \in G \setminus \{1\}$ est borné par k (c'est-à-dire $Diam(Fix(g)) \geq k$).

Lemme 10. *Soient g_1, g_2 deux automorphismes hyperboliques de même amplitude a et tels que $g_2 \neq g_1^{\pm 1}$. Soit $k \in \mathbb{N}$ et supposons que $\langle g_1, g_2 \rangle$ est k-acylindrique. Alors $|L_1 \cap L_2| \leq a + k$.*

Proof. Supposons $|L_1 \cap L_2| \geq a + k + 1$. Quitte à remplacer g_2 par son inverse, on peut supposer que g_1 et g_2 induisent sur $L_1 \cap L_2$ une translation dans la même direction.



Soit L_0 le sous-graphe de $|L_1 \cap L_2|$ représenté ci-dessus. $|L_0| = k + 1$. On a $g_2 g_1^{-1}(L_0) = L_0$, et donc l'ensemble des points fixes de $g_2 g_1^{-1} \neq 1$ n'est pas borné par k puisque $Fix(g_2 g_1^{-1}) \supset Diam(L_0) = k + 1$: contradiction. $\square$

Proposition 11. *Soit G un groupe d'automorphisme d'un arbre X, agissant k-acylindriquement ($k \in \mathbb{N}$). Soient $g_1, g_2 \in G$ des automorphismes hyperboliques de X de même amplitude a, avec $g_1 \neq g_2^{\pm 1}$. Alors*

$$\langle g_1^{k+2}, g_2^{k+2} \rangle = \langle g_1^{k+2} \rangle * \langle g_2^{k+2} \rangle.$$

Proof. D'après le lemme 10 on a $d := |L_1 \cap L_2| \leq a + k$. Soient $n, r \in \mathbb{Z}$ avec $0 \leq r < a$ tels que $d = na + r$. La proposition 7 livre $\langle g_1^{m_1}, g_2^{m_2} \rangle = \langle g_1^{m_1} \rangle * \langle g_2^{m_2} \rangle$, $\forall\ m_1, m_2 > n$. Il suffit donc de vérifier que $k + 2 > n$. On a

$$na + r \leq a + k \Longleftrightarrow n + \frac{r}{a} \leq 1 + \frac{k}{a}.$$

Et donc

$$1 + k \geq 1 + \frac{k}{a} \geq n + \frac{r}{a} > n.$$

$\square$

Définitions. Soient $m, n \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}, m, n \geq 2$. Un arbre X est **(m,n)-régulier** si il existe $\mathcal{M}, \mathcal{N} \subset X^0$ tels que

- $X^0 = \mathcal{M} \coprod \mathcal{N}$,
- tout sommet de $\mathcal{M}$ possède exactement m arêtes adjacentes,
- tout sommet de $\mathcal{N}$ possède exactement n arêtes adjacentes,
- toute arête a une extrémité dans $\mathcal{M}$, l'autre dans $\mathcal{N}$.

Soit G un groupe agissant sur un arbre X (m,n)-régulier. G agit **semi-transitivement** sur X si

- $\forall g \in G,\ g(\mathcal{M}) = \mathcal{M}$ et $g(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$,
- G agit transitivement sur $\mathcal{M}$,
- G agit transitivement sur $\mathcal{N}$.

Remarque. Un groupe agissant semi-transitivement sur un arbre (m,n)-régulier agit forcemment sans inversion.

Lemme 12. *Soit X un arbre (m,n)-régulier avec $(m-1)(n-1) > 1$, G un groupe d'automorphisme de X semi-transitif et S un ensemble de générateurs de G contenant un élément hyperbolique s. Alors $\exists\ u \in S$ tel que l'axe de usu^{-1} ne coïncide pas avec l'axe de s, et en particulier $usu^{-1} \neq s, s^{-1}$.*

Proof. $\forall\ u \in S$, usu^{-1} est hyperbolique, d'axe $u(L_s)$ (proposition 6) Supposons que $\forall\ u \in S, L_{usu^{-1}} = L_s$. Alors $u(L_s) = L_s$. Donc L_s est laissé invariant par S, et donc par G.
Comme $nm > 4$, $X \setminus L_s \neq \emptyset$: l'action ne peut être semi-transitive. Contradiction. □

Lemme 13. *Soit X un arbre (m,n)-régulier, G un groupe d'automorphisme semi-transitif et S un ensemble de générateurs de G dépourvu d'hyperboliques. Alors $\exists\ u, v \in S$ tels que uv est hyperbolique.*

Proof. Soit $S = \{u_1, \ldots, u_N\}$. Montrons $\bigcap_{i=1}^{N} Fix(u_i) \neq \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse de semi-transitivité.
On a $Fix(u_i) \cap Fix(u_j) \neq \emptyset$. En effet, supposons par l'absurde que u_i et u_j n'aient pas de point fixe en commun. Soit $x_i \in Fix(u_i)$ tel que si $x \in Fix(u_i)$ avec $\delta(x, x_i) = 1$, alors $\delta(x, Fix(u_j)) > \delta(x_i, Fix(u_j))$. Soit $x_j \in Fix(u_j)$ tel que $\delta(x_j, x_i) = \delta(x_j, Fix(u_i))$. Donc la géodésique reliant le sommet x_i (respectivement x_j) au sommet $u_j x_i$ (resp. $u_i x_j$) passe par x_j (resp. x_i).

Considérons maintenant l'action de $u_i u_j$. On a $u_i u_j x_j = u_i x_j$. Soit $d := \delta(x_i, x_j)$. On a $\delta(x_i, u_j x_i) = 2d$ donc $\delta(x_i, u_i u_j x_i) = \delta(u_i x_i, u_i u_j x_i) = 2d$. De plus, le sommet $u_i u_j x_j = u_i x_j$ se trouve sur la géodésique reliant x_i à $u_i u_j x_i$ (puisque $\delta(u_i u_j x_j, x_i) = \delta(u_i u_j x_j, u_i u_j x_i) = d$). Il n'existe donc pas de point fixe de $u_i u_j$ entre x_i et son image, ce qui contredit l'hypothèse de non hyperbolicité faite sur $u_i u_j$.
Clairement, les sous-graphes de X formés des sommets de $Fix(u_i)$, ainsi que ceux formes des sommets de $Fix(u_i) \cap Fix(u_j)$ sont des sous-arbres, $\forall i, j \in \{1, 2, \ldots, N\}$, et donc $\bigcap_{i=1}^{N} Fix(u_i) \neq \emptyset$. □

5. Exemples des produits libres et amalgamés.

1. Cas du produit libre:
   Soient A, B deux groupes non réduits à l'élément neutre, et soit $G = A * B$ leur produit libre. On associe à G un graphe X de la façon suivante: l'ensemble des sommets $X^0 := (G/A) \amalg (G/B)$, l'ensemble des arêtes $X^1 := G$ et une arête $w \in G$ relie deux sommets $uA, vB \in X^0$ $(u, v \in G)$ si et seulement si $w^{-1}u \in A, w^{-1}v \in B$ et $v^{-1}u \in A \cup B$. Considérons l'action naturelle de G sur X.

   Proposition 14. *X est un arbre.*

   Proof. Voir [?] 4.1, théorème 7. □

   Proposition 15. *G agit 0-acylindriquement sur X*

   Proof. G agit librement sur l'ensemble des arêtes de X. En effet, supposons que $g \in G$ fixe une arête $w \in X^1 = G$. Alors $gw = w$ et donc $g = 1$. □

   Proposition 16. *X est un arbre $(|A|, |B|)$-régulier et G agit semi-transitivement sur X.*

   Proof. Observons d'abord que $|A|, |B| \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $|A|, |B| \geq 2$. Un sommet de type G/A (respectivement G/B) ne peut être envoyé par G que sur un sommet de type G/A (respectivement G/B).
   Montrons que G est transitif sur les sommets de type G/A. Soient σ_1, σ_2 deux sommets de type G/A. $\sigma_1 = u_1 A, \sigma_2 = u_2 A$, avec $u_1, u_2 \in G$. Soit $g := u_2 u_1^{-1}$. Alors $g\sigma_1 = \sigma_2$. De même pour les sommets de type G/B. □

2. Cas du produit amalgamé:
Soient A, B, C trois groupes tels que A et B ne soient pas réduits à l'élément neutre et tels que $[A : C], [B : C] \geq 2$. Soit $G = A *_C B$ leur produit amalgamé. On associe à G un graphe X de la façon suivante: l'ensemble des sommets $X^0 := (G/A) \amalg (G/B)$, l'ensemble des arêtes $X^1 := G/C$ et une arête wC $(w \in G)$ relie deux sommets $uA, vB \in X^0$ $(u, v \in G)$ si et seulement si $w^{-1}u \in A, w^{-1}v \in B$ et $v^{-1}u \in A \cup B$. Considérons l'action naturelle de G sur X.

Proposition 17. *X est un arbre.*

Proof. Voir [?] 4.1, théorème 7. □

Proposition 18. *X est un arbre $([A : C], [B : C])$-régulier, et G agit semi-transitivement sur X.*

Proof. Comme pour le cas du produit libre (proposition 16). □

Proposition 19. *Soit $g \in G$.*

$$g \text{ a un sommet fixe} \iff \exists\ u \in G, d \in A \cup B \text{ tels que } g = udu^{-1},$$
$$g \text{ a une arête fixe} \iff \exists\ u \in G, c \in C \text{ tels que } g = ucu^{-1}.$$

Proof.

$$\begin{aligned} g \text{ a un sommet fixe} &\iff \exists\ u \in G \text{ tel que } guA = uA \text{ ou } guB = uB \\ &\iff \exists\ u \in G \text{ tel que } u^{-1}gu \in A \cup B \\ &\iff \exists\ u \in G, d \in A \cup B \text{ tels que } g = udu^{-1}. \\ g \text{ a une arête fixe} &\iff \exists\ u \in G \text{tel que } guC = uC \\ &\iff \exists\ u \in G \text{ tel que } u^{-1}gu \in C \\ &\iff \exists\ u \in G, c \in C \text{ tels que } g = ucu^{-1}. \end{aligned}$$

□

Remarque. Il se peut que pour tout k, G ne soit pas k-acylindrique. Par exemple, si C est normal dans A et B, alors tout élément de C fixe X tout entier, qui n'est pas borné. (Par contre, dans ce cas-ci, l'action de G/C sur X est 0-acylindrique. En fait, $G/C = A/C * B/C$, et on se retrouve dans le cas 1.)
Définition. Soit G un groupe, G_0 un sous-groupe de G. G_0 est **malnormal** dans G si

$$\forall\ g \in G \setminus G_0,\ gG_0g^{-1} \cap G_0 = \{1\}.$$

Proposition 20.
- *Si C est malnormal dans A ou B alors l'action de G sur X est 2-acylindrique.*
- *Si C est malnormal dans A et B alors l'action de G sur X est 1-acylindrique.*

Proof. Si C est malnormal dans A alors tout élément $g \in G$ différent de l'identité ne peut fixer qu'une arête adjacente à un sommet de type A. En effet, supposons qu'il existe $g \in G \setminus \{1\}, u \in G, a \in A$ tels que $guC = uC$, $guaC = uaC$. Alors il existe $c \in C$ tel que $u^{-1}gu = c$ et donc $a^{-1}ca \in C$, et comme C est malnormal dans A, $a^{-1}ca = 1$ donc $c = 1$ et donc $g = 1$: contradiction. Symétriquement pour B. □

6. Quelques groupes à croissance exponentielle uniforme.

Proposition 21. *Soit X un arbre (m,n)-régulier, avec $(m-1)(n-1)>1$. Soit G un groupe d'automorphisme de X agissant semi-transitivement et k-acylindriquement ($k\geq 0$). Alors*

$$\omega_G \geq \sqrt[2k+6]{3}.$$

Proof. Soit S un ensemble fini de générateurs de G.

- Si $\exists\ s\in S$ hyperbolique alors (lemme 12) $\exists\ u\in S$ tel que $usu^{-1}\neq s, s^{-1}$ et donc (proposition 11) $\langle us^{k+2}u^{-1}, s^{k+2}\rangle = \langle us^{k+2}u^{-1}\rangle * \langle s^{k+2}\rangle$. D'où

$$\begin{aligned}\omega(G,S) &= \sqrt[k+4]{\omega(G,S^{k+4})}\\ &\geq \sqrt[k+4]{\omega(\langle us^{k+2}u^{-1}, s^{k+2}\rangle, \{us^{k+2}u^{-1}, s^{k+2}\})}\\ &\geq \sqrt[k+4]{3}\\ &> \sqrt[2k+6]{3}.\end{aligned}$$

- Si S est démuni d'hyperboliques alors (lemme 13) $\exists\ v,w\in S$ tels que vw est hyperbolique. En appliquant le lemme 12 à l'ensemble de générateurs $S\cup\{vw\}$ on trouve qu'il existe $u\in S$ tel que $uvwu^{-1}\neq vw, (vw)^{-1}$. Par la proposition 11 on a $\langle u(vw)^{k+2}u^{-1}, (vw)^{k+2}\rangle = \langle u(vw)^{k+2}u^{-1}\rangle * \langle (vw)^{k+2}\rangle$. D'où

$$\begin{aligned}\omega(G,S) &= \sqrt[2k+6]{\omega(G,S^{2k+6})}\\ &\geq \sqrt[2k+6]{\omega(\langle u(vw)^{k+2}u^{-1}, (vw)^{k+2}\rangle, \{u(vw)^{k+2}u^{-1}, (vw)^{k+2}\})}\\ &\geq \sqrt[2k+6]{3}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 22. *Un tel groupe est de croissance exponentielle uniforme.*

Corollaire 23. *Soit $G=A*B$ un produit libre avec $(|A|-1)(|B|-1)>1$. Alors G est de croissance exponentielle uniforme et de plus*

$$\omega_G \geq \sqrt[6]{3}.$$

Corollaire 24. *Soit $G=A*_C B$ un produit amalgamé avec $([A:C]-1)([B:C]-1)>1$.*

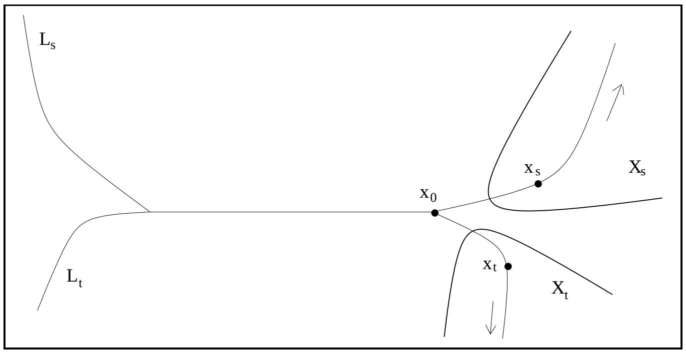
- *Si C est malnormal dans A ou B alors G est de croissance exponentielle uniforme et $\omega_G\geq \sqrt[10]{3}$.*
- *Si de plus C est malnormal dans A et B alors $\omega_G\geq\sqrt[8]{3}$.*

7. Pour contourner la k-acylindricité.

Proposition 25. *Soit G un groupe agissant sur un arbre X. Soient $s,t\in G$ hyperboliques. Si $L_s\neq L_t$ alors $\omega(\langle s,t\rangle,\{s,t\})\geq 2$.*

Proof. Soient $s,t\in G$ hyperboliques tels que $L_s\neq L_t$. Nous allons montrer que $\langle s,t\rangle$ ou $\langle s,t^{-1}\rangle$ est un semi-groupe libre, ce qui entraîne que $\omega(\langle s,t\rangle,\{s,t\})\geq 2$. Quitte à remplacer s et t par leurs inverses, on peut supposer que d'une part les sens de translations de s et t coïncident sur $L_s\cap L_t$, et d'autre part que L_s et L_t se séparent au moins à la sortie de $L_s\cap L_t$ de sorte qu'il existe $x_0\in X$, le sommet situé à l'extrémité sortante de $L_s\cap L_t$.
Soit $x_s\in L_s\setminus L_t$ tel que $\delta(x_0,x_s)=1$.

Soit $x_t \in L_t \setminus L_s$ tel que $\delta(x_0, x_t) = 1$.
Soit $X_s := \{x \in X \mid \delta(x, x_s) < \delta(x, x_0)\}$.
Soit $X_t := \{x \in X \mid \delta(x, x_t) < \delta(x, x_0)\}$.



On a $s^n(x_0) \in X_s, t^n(x_0) \in X_t$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et $x_0 \notin X_s \cup X_t$. On a $s^n(X_t) \subset X_s$ et $t^n(X_s) \subset X_t$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit $\overline{w_1}, \overline{w_2}$ deux mots réduits non vide en s et t. Soit w_1, w_2 les éléments du semi-groupe engendré par s et t défini par $\overline{w_1}, \overline{w_2}$.

$$\begin{aligned} w_1 &= t^{i_0} s^{i_1} t^{i_1} \cdots s^{i_k} t^{i_k} s^{i_{k+1}} \\ w_2 &= t^{j_0} s^{j_1} t^{j_1} \cdots s^{j_k} t^{j_k} s^{j_{k+1}} \end{aligned}$$

avec $i_0, i_{k+1}, j_0, j_{k+1} \in \mathbb{N}$, $i_l, j_l \in \mathbb{N}^*$ pour $l \in \{1, 2, \ldots k\}$.
Il suffit de montrer que $w_1 x_0 \neq w_2 x_0$ ce qui implique que $w_1 \neq w_2$, ce qui montre que le semi-groupe engendré par s et t est libre. En effet, quitte à conjuguer w_1, w_2, on peut supposer que $i_0 \neq 0$ et $j_0 = 0$. Donc

$$\begin{aligned} w_1 x_0 &= t^{i_0} s^{i_1} t^{i_1} \cdots s^{i_k} t^{i_k} s^{i_{k+1}} x_0 \\ &\in t^{i_0} s^{i_1} t^{i_1} \cdots s^{i_k}(X_t) \\ \cdots & \\ &\subset t^{i_0} s^{i_1}(X_t) \\ &\subset t^{i_0}(X_s) \\ &\subset X_t \\ w_2 x_0 &= s^{j_1} t^{j_1} \cdots s^{j_k} t^{j_k} s^{j_{k+1}} x_0 \\ &\in s^{j_1} t^{j_1} \cdots s^{j_k}(X_t) \\ \cdots & \\ &\subset s^{i_1}(X_t) \\ &\subset X_s \end{aligned}$$

Comme $X_s \cap X_t = \emptyset$, $w_1 x_0 \neq w_2 x_0$. $\square$

Théorème 26. *Soit X un arbre (m,n)-régulier, avec $(m-1)(n-1) > 1$. Soit G un groupe d'automorphisme de X agissant semi-transitivement. Alors*

$$\omega_G \geq \sqrt[4]{2}.$$

Proof. Soit S un ensemble fini de générateurs de G.

- Si $\exists\ s \in S$ hyperbolique alors (lemme 12) $\exists\ u \in S$ tel que $L_{usu^{-1}} \neq L_s$ et donc (proposition 25) $\omega(\langle s, usu^{-1}\rangle, \{s, usu^{-1}\}) \geq 2$ et donc
$$\begin{aligned}\omega(G,S) &= \sqrt[3]{\omega(G,S^3)}\\ &\geq \sqrt[3]{\omega(\langle s, usu^{-1}\rangle, \{s, usu^{-1}\})}\\ &\geq \sqrt[3]{2}.\end{aligned}$$
- Si S est démuni d'hyperboliques alors (lemme 13) $\exists\ v, w \in S$ tels que vw est hyperbolique. En appliquant le lemme 12 à l'ensemble de générateurs $S \cup \{vw\}$ on trouve qu'il existe $u \in S$ tel que $L_{uvwu^{-1}} \neq L_{vw}$. D'après la proposition 25 on obtient
$$\begin{aligned}\omega(G,S) &= \sqrt[4]{\omega(G,S^4)}\\ &\geq \sqrt[4]{\omega(\langle vw, uvwu^{-1}\rangle, \{vw, uvwu^{-1}\})}\\ &\geq \sqrt[4]{2}.\end{aligned}$$

□

Corollaire 27. *Un tel groupe a croissance exponentielle uniforme.*

Corollaire 28. *Soit $G = A *_C B$ un produit amalgamé avec $([A:C]-1)([B:C]-1) > 1$. Alors G est de croissance exponentielle uniforme.*

8. Amélioration de la borne pour les produits libres.

Soit X l'arbre usuel associé au groupe G. Rappelons que G agit semi-transitivement et 0-acylindriquement sur X qui est un arbre $(|A|, |B|)$-régulier.
Soit $T = (A \cup B) \setminus \{1\}$. Pour tout $g \in G$, définissons l'entier $d(g)$ de la façon suivante:
$$d(g) := \min_{u \in G}\{\ell_T(ugu^{-1})\}$$
où $\ell_T(g)$ est la distance usuelle entre 1 et x définie plus haut. (Remarque: $\ell_T(g)$ compte le nombre d'éléments minimal de T nécessaires à l'écriture de g.)

Lemme 29. *Soient $s_1, \ldots, s_n \in G$ ($n \in \mathbb{N}^*$) agissant hyperboliquement sur G tels que $L_{s_i} = L_{s_j}, \forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Alors $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \langle \mathbb{Z}\rangle$.*

Proof. Soit $L := L_i, i \in \{1, \ldots, n\}$. Comme l'action de G est transitive sur l'ensemble des arêtes de X, on peut supposer que $1 \in L$. L'orbite de 1 (noté $O(1)$) devient un groupe si on lui donne la structure de groupe de G. On a $O(1) = \langle s_1, \ldots, s_n\rangle$. Soit $v \in O(1) \subset L$ tel que $d(v)$ est minimal (un tel élément existe car $O(1)$ est inclu dans l'axe L et $d(g) - 1$ est égal au nombre d'arêtes entre 1 et g, pour $g \neq 1$). On a $\langle s_1, \ldots, s_n\rangle = \langle v\rangle$. En effet, sinon il existe $w \in O(1)$ tel que $w \neq v^n, \forall n \in \mathbb{Z}$. Mais alors $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $d(v^n) = nd(v) < d(w) < d(v^{n+1}) = (n+1)d(v)$ et $wv^{-n} \in O(1) \subset L$ avec $d(wv^{-1}) < d(v)$: contradiction avec la minimalité de v.

□

Soient $x, y \in G$. Notons $\omega_{\{x,y\}}$ la croissance du sous-groupe engendré par x et y par rapport aux générateurs $\{x, y\}$.

Lemme 30. *Supposons que x et y sont hyperboliques.*
- *Si $L_x = L_y$ alors $\langle x, y\rangle = \mathbb{Z}$.*
- *Si $L_x \neq L_y$ alors $\omega_{\{x,y\}} \geq 2$.*

Proof. • $L_x = L_y$: lemme 29.
• $L_x \neq L_y$: proposition 25.

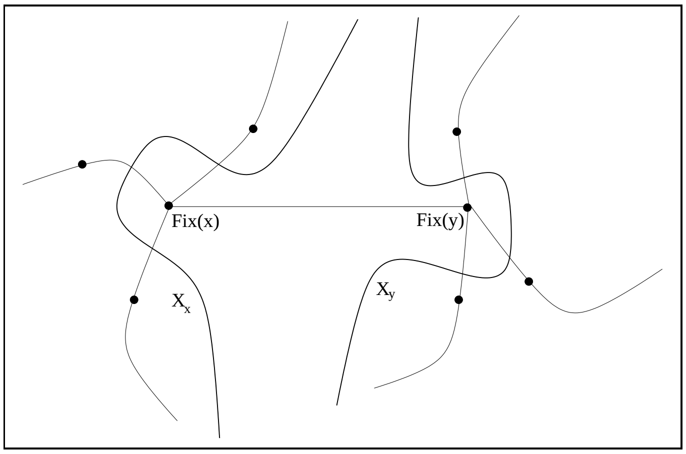
□

Notons qu'ici, un élément elliptique a un et un seul point fixe (car G agit 0-acylindriquement).

Lemme 31. *Supposons que x et y sont elliptiques.*
- *Si le point fixe de x coïncide avec le point fixe de y alors $\langle x, y\rangle$ est conjugué à un sous-groupe de A ou B.*
- *Si les points fixes de x et y ne coïncident pas alors $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle * \langle y\rangle$.*

Proof. • Si $Fix(x) = Fix(y)$ alors sans restreindre la généralité, on peut supposer que $xuB = uB = yuB$, avec $\alpha \in G$. Donc $\exists b_1, b_2 \in B$ tel que $u^{-1}xu = b_1, u^{-1}yu = b_2$ et donc $\langle x, y\rangle = u\langle b_1, b_2\rangle u^{-1}$ avec $\langle b_1, b_2\rangle < B$.
• Soient

$$\begin{array}{rcl} X_x & := & \{x \in X^0 \mid \text{la géodésique reliant x à } Fix(y) \text{ contient} \\ & & \qquad Fix(x) \text{ comme point intérieur}\} \\ X_y & := & \{x \in X^0 \mid \text{la géodésique reliant x à } Fix(x) \text{ contient} \\ & & \qquad \text{contient } Fix(y) \text{ comme point intérieur}\} \end{array}$$



On termine en appliquant le lemme 5 à $\langle x\rangle$ et $\langle y\rangle$.

□

Lemme 32. *Si x est elliptique et y hyperbolique alors $\omega_{\{x,y\}} \geq \sqrt{2}$.*

Proof. Si $t := xy$ ou $x^{-1}y$ est hyperbolique, alors par la proposition 25 on obtient $\omega_{\{x,y\}} = \sqrt[2]{\omega(\langle x, t\rangle, \{x, t\})} \geq \sqrt[2]{2}$. Si xy est elliptique, alors par le lemme 32, $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle * \langle xy\rangle$, car sinon, $\langle x, xy\rangle$ est conjugué à un sous-groupe de A ou B, et donc y lui-même est conjugué à un élément de A ou B, ce qui contredit l'hypothèse d'hyperbolicité sur y. De même, si $x^{-1}y$ est elliptique alors $\langle x, y\rangle = \langle x\rangle * \langle x^{-1}y\rangle$. De plus, si xy et $x^{-1}y$ sont elliptiques, alors $x^2 = 1$. En effet, comme déjà vu dans la démonstration du lemme 13, si $u = xy$,$v = x^{-1}y$ et $uv = x^{-1}$ sont elliptiques, alors $Fix(u) \cap Fix(v) \neq \emptyset$. Or ici, les ensembles de points fixes se réduisent à un sommet, donc $Fix(u) = Fix(v)$, qu'on peut supposer de type B. Donc, il existe α dans G tel que $xy\alpha B = x^{-1}y\alpha B = \alpha B$. Donc $\exists\ b_1, b_2 \in B$ tel que $y\alpha = x\alpha b_1 = x^{-1}\alpha b_2$. Si $b_1 = b_2$ alors $x = x^{-1}$, sinon, $\alpha^{-1}x^2\alpha = b_2b_1^{-1} \neq 1$ ce qui entraîne qu'il existe b dans B tel que $\alpha^{-1}x\alpha = b$. D'où

$$\begin{array}{rcl} y^2 & = & (x\alpha b_1\alpha^{-1})(x^{-1}\alpha b_2\alpha^{-1}) \\ & = & \alpha b b_1 b^{-1}\alpha^{-1}\alpha b_2\alpha^{-1} \\ & = & \alpha(b b_1 b^{-1} b_2)\alpha^{-1}. \end{array}$$

Et donc y^2 est conjugué à un élément de B, ce qui n'est pas possible, puisque y (et donc y^2) est hyperbolique. Finalement, l'observation 3 montre que $\omega_{\{x,y\}} \geq \frac{1+\sqrt{5}}{2} > \sqrt{2}$. □

Proposition 33. *Soient A, B deux groupes de type fini tels que si $|A| = 2$ alors $|B| \geq 3$ et $G = A * B$ leur produit libre. Alors*

$$\omega_G \geq \sqrt[2]{2}$$

et en particulier G est de croissance exponentielle uniforme.

Proof. Soit S un ensemble fini de générateurs de G. Si il existe au moins deux hyperboliques dans S à axes distincts, alors par le lemme 30, $\omega_G \geq 2$. Si tous les hyperboliques de S ont le même axe, alors il doit exister un elliptique dans S (sinon par le lemme 29,$\langle S\rangle = \mathbb{Z}$), et donc par le lemme 32, $\omega_G \geq \sqrt{2}$. Supposons maintenant que S est dépourvu d'hyperboliques. Si tous les elliptiques de S ont le même point fixe, alors $G = \langle S\rangle$ est conjugué à un sous-groupe de A ou B, ce qui n'est pas possible. Il existe donc au moins deux elliptiques dans S tels que leurs points fixes sont distincts. Par le lemme 31, le sous-groupe engendré par ces deux éléments, disons x_1 et x_2, est libre sur x_1 et x_2. Si x_1 et x_2 ne sont pas tous les deux d'ordre 2, par l'observation 4, $\omega_G \geq \sqrt{2}$. S'ils sont tous les deux d'ordre 2, alors il existe $x_3 \in S$ tel que $x_3 \neq x_1, x_2$ (car $\langle x_1, x_2\rangle = D_\infty$). Supposons que x_3 est d'ordre 2 et qu'il a son point fixe en commun avec x_2. On obtient par le lemme 31,

$$\begin{aligned} \langle x_1, x_i\rangle &= \langle x_1\rangle * \langle x_i\rangle = D_\infty, i = 2, 3; \\ \langle x_2, x_3\rangle & \quad \text{est conjugué à un sous-groupe de } A \text{ ou } B. \end{aligned}$$

On observe les relations suivantes:

$$\begin{aligned} \sigma_1(k) &= \sigma_2(k-1) + \sigma_3(k-1) \\ \sigma_2(k) &\geq \sigma_1(k-1) \\ \sigma_3(k) &\geq \sigma_1(k-1). \end{aligned}$$

(Où $\sigma_i(k)$ = nombre de mots réduits en x_1, x_2, x_3 de longueur k se terminant par x_i.) D'où

$$\begin{aligned} \sigma(k) &= \sigma_1(k) + \sigma_2(k) + \sigma_3(k) \\ &\geq \sigma(k-1) + \sigma_1(k-1) \\ &\geq 2\sigma(k-2), \end{aligned}$$

et donc $\omega_G \geq \sqrt{2}$.
Si il existe trois elliptiques $x_1, x_2, x_3 \in S$ d'ordre 2 tels que leurs points fixes soient distincts, alors $\langle x_i, x_{i+1}\rangle = \langle x_i\rangle * \langle x_{i+1}\rangle = D_\infty, i \in \{1,2,3\}$modulo 3, et on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_1(k) &= \sigma_2(k-1) + \sigma_3(k-1) \\ \sigma_2(k) &= \sigma_1(k-1) + \sigma_3(k-1) \\ \sigma_3(k) &= \sigma_1(k-1) + \sigma_2(k-1) \end{aligned}$$

D'oú $\sigma(k) = 2\sigma(k-1)$ et donc $\omega_G \geq 2$. □