Série 5

Exercice 1 *Rappel : Un parallélogramme est un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés opposés sont parallèles.*

Montrer que cette définition et les trois assertions suivantes sont équivalentes :

1. *$ABCD$ est convexe et les côtés opposés sont isométriques.*
2. *$ABCD$ est convexe et possède deux côtés parallèles et isométriques.*
3. *Les diagonales de $ABCD$ se coupent en leur milieu.*

Exercice 2 *Soit ABC un triangle rectangle en B. Montrez que ABC est inscriptible dans un cercle dont le centre se trouve sur l'hypothénuse.*

Exercice 3 *Le but de cet exercice est de montrer que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes. On rappelle que la bissectrice d'un angle $\widehat{ABC}$ est la demi-droite issue de B qui divise cet angle en deux angles égaux.*

1) *Soit $\widehat{ABC}$ un angle et $\mathcal{D}$ sa bissectrice. Soit M un point de $\mathcal{D}$. Montrer que M est équidistant de AB et de AC. On rappelle que la distance d'un point à une droite est la longueur du segment perpendiculaire à la droite issu du point en question.*

2) *Déduire de* 1) *que les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes.*

3) *Soit M le point d'intersection des bissectrices. Soit $[MH]$ le segment perpendiculaire à $[AB]$ issu de M ($H \in MH \cap AB$).*

   i) *Montrer que le cercle $\mathcal{C}$ de centre M et de rayon $\overline{MH}$ coupe AB en un unique point.*

   ii) *En déduire que le cercle $\mathcal{C}$ coupe chacun des deux autres segments $[AC]$ et $[BC]$ en un seul point.*

Le cercle $\mathcal{C}$ est le cercle inscrit au triangle ABC, il est tangent aux trois côtés (c'est ce que vous montrez en i) et en ii)). On peut montrer (essayez) que c'est le seul cercle ayant cette propriété.