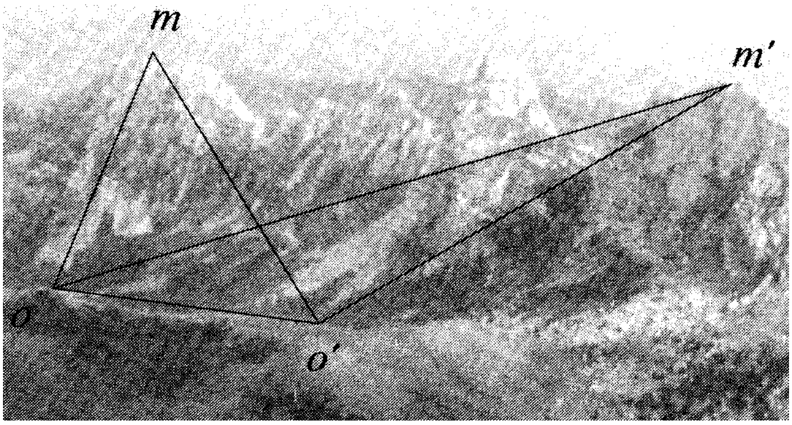
UNIVERSITÉ DE GENÈVE
SECTION DE MATHÉMATIQUES
FCUMB

SEMESTRE D'HIVER
2002/03

Série 11

Exercice 1 *Depuis un segment $[oo']$ dont on connait la longueur (disons 2.34 km), on vise deux sommets de montagne m et m' (voir la photo, copiée du livre* Géométrie *de O. Burlet). On mesure les angles $\widehat{o'om} = 81°$, $\widehat{o'om'} = 21°$, $\widehat{oo'm} = 41°$, $\widehat{oo'm'} = 141°$. Calculer les distances $o'm$ et $o'm'$. Puis, par une 3e visée, on mesure $\widehat{mo'm'} = 101°$. Calculer la distance entre les deux sommets m et m'. Attention, les quatres points o, o', m et m' ne sont pas situés dans le même plan : c'est tout l'interêt de cette méthode.*



Exercice 2 *(Sur les traces d'Archimède).*

1. *Montrer que* $\cos 2\beta = \cos^2\beta - \sin^2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1$. *Montrer que* $\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$. *Déduire des formulse ci-dessus que* $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ *et* $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$.

2. *Montrer que* $6\sin 30°$ *est le demi-perimètre d'un hexagone régulier inscrit dans un cercle de rayon* 1.

   Appliquer 4 fois la formule pour $\sin\frac{\alpha}{2}$ *pour obtenir les périmètres du dodécagone, 24-gone, 48-gone et 96-gone. Trouver chaque fois une meilleures approximation pour* π*, le périmètre du cercle.*

   Doté d'un ordinateur puissant, vous pouvez aller jusqu'au 2^{60}*-gone et obtenir 35 décimales (Ludolph van Ceulen 1616, à la main).*

Exercice 3 *Théorème dit de la droite d'Euler, d'après Court.*

Soit ABC un triangle, S le point d'intersection des médiatrices et G le point d'intersection des médianes. Soit H le point situé sur la droite SG et tel que $G \in [SH]$ et $\frac{\overline{SG}}{\overline{SH}} = \frac{1}{3}$. Soit A' le milieu de $[BC]$.

i) *Montrer que les triangles $SA'G$ et HGA sont semblables.*

ii) *Montrer que la droite $A'S$ est perpendiculaire à la droite AH et en déduire que AH est prependiculaire à BC.*

iii) *Montrer que H est le point d'intersection des trois hauteurs.*

iv) *Pouvez-vous énoncer le théorème que l'on vient de démontrer ?*