Torsion de Whitehead
et
topologie différentielle

$\left\{\text{classes de difféomorphisme de variétés différentiables closes}\right\}$

1895–1904 Poincaré: *Analysis Situs*

Groupe fondamental – homologie – *Problème de Poincaré*.

1898–1920 Variétés de dimension 3
(Heegaard, Tietze, Dehn, Alexander) *Espaces lenticulaires*.

1920-1930 homologie (Vietoris, E. Noether).

$\left\{ \text{classes de difféomorphisme de variétés différentiables closes} \right\}$

$\Big\downarrow$ $\mathcal{C}^1$-triangulation

CONJ: injection si $\dim = 3$

Vrai si $\pi_1(M)$ est fini

(Reidemeister, de Rham, Perelman)

$\left\{ \text{types d'homotopie } \textit{simple} \text{ de complexes cellulaires finis} \right\}$

$\Big\downarrow$ pas injective

(torsion de Whitehead)

$\left\{ \text{types d'homotopie de complexes cellulaires finis} \right\}$

{cl. de difféo. de var. diff. closes }

Pas injective (Milnor, 1956)

{cl. d'homéo. de var. diff. closes }

Pas surjective (Kervaire, 1960)

{cl. d'homéo. de var. topologiques closes }

$\mathcal{C}^1$-triangulation

Kirby-Siebenmann, 1970

{types d'hom. simple de complexes finis }

Chapman, 1973

{cl. d'homéo. de complexes finis }

pas injective

(torsion de Whitehead)

{types d'homotopie de complexes finis }

Principe :

- On construit un foncteur

$$\mathbf{Grp} \xrightarrow{\mathrm{Wh}} \mathbf{Ab}.$$

  $\mathrm{Wh}(\pi)$ s'appelle le *groupe de Whitehead* de π.

- A toute équivalence d'homotopie

$$f : X \to Y \quad (X, Y \text{ complexes finis})$$

  on associe sa *torsion de Whitehead*

$$\tau(f) \in \mathrm{Wh}(\pi_1(Y)).$$

- f est *simple* $\overset{\text{déf}}{\iff}$ $\tau(f) = 0$.

Groupes de Whitehead nuls

- $\mathrm{Wh}(\{1\}) = 0$
- $\mathrm{Wh}(\text{abélien libre}) = 0$
  (Higman, 1940; Bass-Heller-Swan 1964)
- $\mathrm{Wh}(G_1 * G_2) = \mathrm{Wh}(G_1) \oplus \mathrm{Wh}(G_2)$
  (Stallings, 1965)
- $\mathrm{Wh}(\text{libre}) = 0.$

CONJECTURE:
$\mathrm{Wh}(\pi) = 0$ si π est de présentation finie sans torsion.

Groupes de Whitehead non-nuls

- $\mathrm{Wh}(C_m) = \mathbb{Z}^{[m/2]+1-d(m)}$.

Ex: $\mathrm{Wh}(C_4) = 0,\ \mathrm{Wh}(C_5) = \mathbb{Z},\ \mathrm{Wh}(C_{20}) = \mathbb{Z}^5$.

- $\mathrm{Wh}(C_2 \times (C_3)^4) = (\mathbb{Z}_3)^6$.

- $\mathrm{Wh}(C_4 \times (C_\infty)^2)$ contient $(\mathbb{Z}_2)^\infty$.

Problem:

$$M \times \mathbb{R} \approx_{\text{diffeo}} N \times \mathbb{R} \overset{?}{\Longrightarrow} M \approx_{\heartsuit} N$$

$$\text{où } \heartsuit = \begin{cases} \text{difféomorphisme} & ? \\ \text{homéomorphisme} & ? \\ \text{type d'homotopie simple} & ? \\ \text{type d'homotopie} & \text{oui} \end{cases}$$

Résultats:

- $M \times \mathbb{R} \approx_{\text{diffeo}} N \times \mathbb{R} \Longleftrightarrow$ $\exists$ *un cobordisme inversible* (W, M, N)

- (W^{n+1}, M, N) *cobordisme inversible* $\underset{(n\geq 5)}{\Longleftrightarrow}$ (W^{n+1}, M, N) h*-cobordisme*

- *Si* $\dim M \geq 5$, *on a bijection*

$$\left\{ h\text{-}\textit{cobordismes}\ (W, M, -) \right\} \Big/ {\substack{\textit{difféo}\\ \textit{rel } M}} \xrightarrow{\approx} \mathrm{Wh}(\pi_1(M))$$

$$(W, M, N) \longmapsto \tau(M \subset W)$$

(théorie du s-cobordisme; Smale 1962; Barden, Mazur, Stallings 1965)

[**COROLLAIRE:** *Conjecture de Poincaré en* $\dim \geq 5$.]

Si

$$M \times \mathbb{R} \approx_{\text{diffeo}} N \times \mathbb{R}$$

alors :

	$M \approx_{\text{diffeo}} N$	$M \approx_{\text{homeo}} N$	$M \approx_{\text{tsh}} N$
$n \geq 5$	*oui, si* $\mathrm{Wh}(\pi_1(M)) = 0$		
	non, en général *(Milnor, 1961)*		
$n = 4$	*non*	*oui, si* $Wh(\pi_1(M)) = 0$ *et* $\pi_1(M)$ *virtuellement niloptent*	

Voisinages tubulaires (réguliers)

Soient X et Y deux complexes finis.
Si $n \gg \dim(X), \dim(Y)$, alors :

- $X \approx_{\mathrm{th}} Y \iff \mathring{\mathcal{T}}^{\,n}(X) \approx_{\mathrm{diffeo}} \mathring{\mathcal{T}}^{\,n}(Y)$
- $X \approx_{\mathrm{ths}} Y \iff \mathcal{T}^n(X) \approx_{\mathrm{diffeo}} \mathcal{T}^n(Y)$

Epaississements hilbertiens

Soient X, Y des complexes cellulaires finis.
Alors:

- $X \approx_{\text{th}} Y \iff X \times l^2 \approx_{\text{homéo}} X \times l^2$
(∼1969)
- $X \approx_{\text{ths}} Y \iff X \times Q \approx_{\text{homéo}} X \times Q$
(Chapman, 1973)

K-théorie algébrique

Λ anneau :

- $K_0(\Lambda)$ (Grothendieck..., $\sim$1957...)
- $K_1(\Lambda)$ (Whitehead, 1950; Bass, $\sim$1962)
- $K_2(\Lambda)$ (Milnor, $\sim$1969)
- $K_i(\Lambda) := \pi_i(BGL(\Lambda)^+),\ (i \geq 1)$ (Quillen, 1972)

$$K_i(I) \to K_i(\Lambda) \to K_i(\Lambda/I) \to K_{i-1}(I) \to$$

Problème de Poincaré

$M \sim_{th} S^n$ alors:

	$M \approx_{\text{diffeo}} S^n$	$M \approx_{\text{homeo}} S^n$
$n \geq 7$	non	oui
$n = 5, 6$	oui	oui
$n = 4$	?	oui
$n = 3$	?	
$n \leq 2$	oui	