Série 2 : Le processus de Poisson

Exercice 1

Soit X une variable aléatoire. On dit qu'elle suit une distribution (de probabilité) exponentielle de taux $\lambda > 0$ si (espace des états $= \mathbb{R}^+$)

$$P(X > t) = e^{-\lambda t}.$$

a. Calculez son espérance, sa variance et sa densité de probabilité.
b. Démontrer que $P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ pour tout $t, s \geq 0$.
c. Soit N une variable aléatoire. On dit qu'elle suit une distribution (de probabilité) de Poisson de paramètre $\alpha > 0$ si (espace des états $= \mathbb{N}$)

$$P(N = n) = e^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!}, \ \forall t = 1, 2, 3, ...$$

Calculez sa valeur moyenne (= son espérance).

Exercice 2

Démontrer que la seule distribution de probabilité qui satisfait l'équation

$$P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$$

est la distribution exponentielle.

Indications : remarquez que la propriété $P(X > t + s | X > s) = P(X > t)$ est équivalente à $P(X > t + s) = P(X > t) P(X > s)$, donc $g(t) = P(X > t)$ satisfait l'équation fonctionnelle suivante $g(t+s) = g(t)g(s)$. Puis trouver toutes ces solutions positives et décroissantes. Vous pouvez également supposer que la fonction g est différentiable.

Exercice 3

Soit $X_1, X_2, X_3, ...$ une suite de variables aléatoires i.i.d. qui suivent la distribution exponentielle de taux λ. Pour tout $n \geq 0$, on définit $Y_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$ avec la convention $Y_0 = 0$. On dit que $N(t)$ est un processus de Poisson si

$$N(t) = max\{n | t \geq Y_n\}.$$

Démontrer que $N(t)$ suit une distribution de Poisson avec paramètre λt, i.e.

$$P(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Indication : commencez par démontrer que $P(N(t) = n) = P(Y_{n+1} > t) - P(Y_n > t)$; puis faites une démonstration par récurrence sur n.

Exercice 4

Calculez $P(N(s) = 1, N(t) = 2)$ pour tout $0 \leq s < t$.

Indication : exprimez l'événement $(N(s) = 1, N(t) = 2)$ en fonction des variables aléatoires Y_1, Y_2 et Y_3.

Exercice 5

Soit t un temps fixé. On définit une nouvelle suite de variable aléatoire à partir de la suite $\{X_n\}_{n\geq 1}$ (voir exercice 1) par $X_1^t = Y_{N(t)+1} - t$ et $X_n^t = X_{N(t)+n}$. Ensuite comme dans l'exercice 2 on définit $Y_n^t = X_1^t + ... + X_n^t$ et $N^t(s) = max\{n | Y_n^t \leq s\}$. Démontrez que $N^t(s) = N(t+s) - N(t)$

Exercice 6

Démontrez que $P(X_1^t > s | N(t)) = P(X_1^t > s)$.

Indication : il suffit de vérifier que $P(X_1^t > s, N(t) = n) = P(X_1^t > s)P(N(t) = n)$.

Puis démontrez que $P(X_1^t > s_1, ..., X_k^t > s_k | N(t)) = P(X_1^t > s_1) \cdots P(X_k^t > s_k)$.

Exercice 7

Démontrer, en utilisant l'exercice 7, que les variables aléatoires X_n^t et $N(t)$ sont indépendantes et que X_n^t et X_n ont la même distribution de probabilité.

En déduire que $N^t(s) = N(s+t) - N(s)$ est un processus de Poisson qui possède la même distribution de probabilité que $N(s)$.

Exercice 8

Démontrez que pour tout $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, on a que les incréments

$$N(t_1), N(t_2) - N(t_1), ..., N(t_n) - N(t_{n-1})$$

sont indépendants et ont la même distribution de probabilité que

$$N(t_1), N(t_2 - t_1), ..., N(t_n - t_{n-1}).$$