Série 10 – Correction

Exercice 1. Soit $\Phi = \{(x, y, xy) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \subset \mathbb{R}^3$.

(1) Trouver la première forme fondamentale de Φ.

Correction: *La surface Φ est décrite comme le graphe d'une fonction f. On se sert de la formule du cours :*

$$I_\Phi(x,y) = \begin{bmatrix} 1 + f_x(x,y)^2 & f_x(x,y)f_y(x,y) \\ f_x(x,y)f_y(x,y) & 1 + f_y(x,y)^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+y^2 & xy \\ xy & 1+x^2 \end{bmatrix}.$$

(2) Trouver le vecteur normal à Φ.

Correction: *Le vecteur normale $n(x_0, y_0)$ à Φ en (x_0, y_0, x_0y_0) est orthogonal au vecteur tangents des courbes décrite par $x = x_0$ et $y = y_0$. Ainsi $n(x_0, y_0)$ est orthogonal à*

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \end{bmatrix}$$

Il est donc colinéaire à

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ y_0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ x_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Il suffit maintenant de renormaliser. On obtient :

$$n(x_0, y_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + x_0^2 + y_0^2}} \begin{bmatrix} -y_0 \\ -x_0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(3) Trouver la seconde forme fondamentale de Φ.

Correction: *On se sert de la formule du cours :*

$$II_\Phi(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(4) Trouver les directions des courbures principales de Φ.

Correction:

Pour trouver les directions des courbures principales, on cherche les point extrémaux de

$$g : t \mapsto = \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}^T II_{x,y} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}^T I_{x,y} \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}}$$

On a donc :

$$g(t) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{2t}{1 + y^2 + 2txy + t^2 + t^2x^2}.$$

On dérive g :

$$g'(t) = \frac{1}{1+x^2+y^2} \frac{2(1 + y^2 + 2txy + t^2 + t^2x^2) - 2t(2xy + 2t(1+x^2))}{(1 + y^2 + 2txy + t^2 + t^2x^2)^2}.$$

Le numérateur est proportionnel à :

$$2(1 + y^2 - t^2(1 + x^2)).$$

g' s'annule donc en

$$\pm\sqrt{\frac{1 + y^2}{1 + x^2}}$$

Dans la paramétrisation par f du plan tangent, les deux directions principales de courbures sont

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+y^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ -\sqrt{1+y^2} \end{bmatrix}$$

Il s'agit maintenant d'exprimer cette base du plan tangent dans les coordonnées de $\mathbb{R}^3$. Pour cela, on les transporte via l'application $\mathrm{d}\varphi$, où $\varphi(x, y) = (x, y, f(x, y))$. On a

$$\mathrm{d}\varphi(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ y & x \end{bmatrix}.$$

Et donc les directions de courbures principales sont :

$$\begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ \sqrt{1+y^2} \\ y\sqrt{1+x^2} + x\sqrt{1+y^2} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} \sqrt{1+x^2} \\ -\sqrt{1+y^2} \\ y\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+y^2} \end{bmatrix}$$

(5) Trouver la courbure moyenne et la courbure de Gauss de Φ.

Correction: *On utilise les formules du cours : Pour la courbure de Gauss, on a :*

$$\kappa = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{-1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Pour la courbure moyenne, on a :

$$\frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{EN + LG - 2MF}{2(EG - F^2)} = \frac{-xy}{(1 + x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

(6) Existent-ils des ombilics ou méplats sur Φ ?

Correction: *Il n'y a ni ombilic, ni méplat car la courbure de Gauss est toujours strictement négative.*

Exercice 2. Soit $\Phi = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 | (x, y) \in [-1, 1]^2\} \subset \mathbb{R}^3$, où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction lisse non identiquement nulle telle que $f(x, y) = 0$ si $x = \pm 1$ ou $y = \pm 1$.

(1) Démontrer que l'air $S(\Phi)$ de Φ est plus grande que 4.

Correction: *L'aire de Φ est donné par*

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{\det(I_{x,y})}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

On a $\sqrt{1 + f_x(x, y)^2 + f_y(x, y)^2} \geq 1$. Donc l'aire de Φ est plus grande que

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4.$$

(2) Identifier les directions des courbures principales sur la frontière de Φ.

Correction: *Par symétrie, on se restreint au cas $x = \pm 1$. On a $f(\pm 1, y) = 0$ pour tout y. Donc $f_x(\pm 1, y) = f_{xx}(\pm 1, y) = 0$ pour tout y. Donc les deux formes fondamentales sont diagonale. Ainsi, dans la paramétrisation par f*

$$\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

sont les directions de courbures principales. De la même manirèe que précédemment, il s'agit maintenant de comprendre les coordonnées de ces vecteurs dans $\mathbb{R}^3$. On les multiplie donc par la matrice

$$\mathrm{d}\varphi_{\pm 1, y} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\f_x(\pm 1, y) & f_y(\pm 1, y)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\0 & f_y(\pm 1, y)\end{bmatrix}.$$

Les directions de courbures sont donc

$$\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \quad et \quad \begin{bmatrix}1\\0\\f_y(\pm 1)\end{bmatrix}$$

(3) Démontrer que les points de la frontière sont paraboliques.

Correction: *La deuxième forme fondamentale est*

$$II_{\pm 1, y} = \begin{bmatrix}0 & 0\\0 & f_{yy}(\pm 1, x)\end{bmatrix}.$$

Son déterminant est nulle donc les points de la frontière sont parabolique.

(4) Démontrer que Φ contient en son intérieure un point non-hyperbolique.

Correction: *La fonction f n'est pas identiquement nulle. Le maximum ou le minimum de f n'est donc pas nulle et se situe donc dans l'intérieure de $[-1, 1]^2$. En ce point, la hessienne de f (qui n'est autre que la second forme fondamentale à un scalaire près) est donc semi-définie positive ou semi-définie négative. Son déterminant est donc positif ou nulle et ce point est non-hyperbolique.*