Introduction à Matlab II

20 mars 2000

Calcul matriciel

Les opérateurs $+$, $-$ s'appliquent tels que sur des matrices entières. De même, si A et B sont des matrices (de tailles cohérentes), $A * B$ engendre une multiplication matricielle, et A/B l'opération $A * B^{-1}$. Dans le même ordre d'idées, $A \backslash B \rightarrow A^{-1} * B$. Pour des opérations éléments par éléments, il faudra se servir des opérateurs $.*$, $./$ et $.\wedge$ (pour élever à la puissance).

Exercice 1:
1) Résoudre le système $Ax = b$ suivant en utilisant l'opérateur \. Vérifier la validité du résultat.

```
  x1+2*x2+ 3*x3=10
2*x1-5*x2+   x3=-3
4*x1+7*x2-15*x3=11
```

et de la même manière (c'est pas la peine de retaper toute la matrice...):

```
  x1+2*x2+ 3*x3=10
2*x1-5*x2+   x3=-3
3*x1-3*x2+ 4*x3=11
```

Où est le problème???
2) Calculer les vecteurs propres v de A en utilisant la fonction `eig`, où

```
     1 3
A =
     2 2
```

Afficher v et Av en utilisant la fonction `compass`. Observation? Comparer avec d'autres vecteurs.
3) Calculer les valeurs propres de la matrice du premier système :

```
  x1+2*x2+ 3*x3=10
2*x1-5*x2+   x3=-3
4*x1+7*x2-15*x3=11
```

Considérer le système obtenu en soustrayant 2 fois la 2ème ligne de la 3ème :

```
  x1+2*x2+ 3*x3=10
2*x1-5*x2+   x3=-3
    17*x2-17*x3=17
```

c'est un système d'équations équivalent, dans lequel on a éliminé x_1 de la troisième équation; en continuant ainsi, on arrive à des équations de la forme $x_1 = \ldots, x_2 = \ldots, x_3 = \ldots$ (méthode de Gauss). Calculer les valeurs propres de la matrice de ce nouveau système. Conclusion ?

Exercice 2: On considère la matrice $A = (a_{ij}) \in Mat_{n,n}(R)$ avec $a_{ij} = 1/n$ pour tout (i,j) sauf a_{nn} qui vaut $b > 0$.
1) Créer la matrice A pour $n = 7$. Mettre n comme paramètre pour qu'on puisse créer des matrices de tailles différentes. Choisir une valeur proche de $1/n$ pour b.
2) Calculer le rang r de A en utilisant la fonction `rank`. Tester $b < 1/n, b = 1/n, b > 1/n$.
3) Calculer le noyau K de A en utilisant la fonction `null`. Tester $b < 1/n, b = 1/n, b > 1/n$. Vérifier la validité du résultat avec un produit matriciel.
4) Calculer les valeurs propres p de A en utilisant la fonction `eig`. Tester $b < 1/n, b = 1/n, b > 1/n$. Noter le module maximal des valeurs propres en fonction de b.
5) Calculer les puissances A^m pour $m = 10, 100, 1000, 10000$. Noter le comportement de convergence en fonction de b.

Exercice 3: On considère la matrice $P \in Mat_{n+1,n+1}(R)$

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/n & 0 & n-1/n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/n & 0 & n-2/n & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n-1/n & 0 & 1/n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Créer la matrice P pour $n = 6$ en utilisant la fonction `diag`. Mettre n comme paramètre pour qu'on puisse créer des matrices de tailles différentes.
2) Calculer le polynome caractéristique q en utilisant la fonction `poly`.
3) Calculer les valeurs propres p de P. Déduire une formule pour ces valeurs (faire eventuellement varier n pair).
4) Calculer les puissances P^m pour $m = 10, 11, 100, 101, 1000, 1001$. Observation?

Exercice 4: On considère la matrice $V \in Mat_{n,n}(R)$, une matrice de Vandermonde.

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

1) Créer $a = [a_1 ... a_n]$ pour $n = 5$ à l'aide de la fonction `rand` avec $a_i \in [2,6] \forall i$. Créer la matrice V pour $n = 10$ en utilisant les fonctions `vander` et `rot90`. Mettre n comme paramètre pour qu'on puisse créer des matrices de tailles différentes.
2) Calculer le déterminant d en utilisant la fonction `det` et vérifier la formule $d = \prod_{n \geq i > j \geq 1}(a_i - a_j)$ en utilisant la boucle `for`.
3) Calculer l'inverse V^{-1} en utilisant la fonction `inv`.
4) Resoudre le système linéaire $Vx = b$ pour différentes valeurs de b, (p.ex. $b = (1\ 1 \cdots 1)$ en utilisant l'operateur \. Vérifier le resultat en utilisant V^{-1}.

Supplément Exercice 2: Afficher $||A^m||$ pour $b \neq 1/n$ en fonction de m pour différents choix de paramètres en utilisant `plot, surf, axis, colormap, caxis, axis, subplot,title, xlabel, ylabel, ...`

Supplément Exercice 4: Vérifier la formule $d = \prod_{n \geq i > j \geq 1}(a_i - a_j)$ sans utiliser la boucle `for`. Tester les temps d'exécution pour les deux méthodes en utilisant les fonctions `tic` et `toc` et en faisant varier la taille n de la matrice.