Chapitre III – Equations différentielles ordinaires

Sommaire. Nous étudions les équations différentielles ordinaire sous forme normale, c'est-à-dire les équations de la forme

$$y' = f(t, y)$$

où $y = y(t) : I \to \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, est l'application cherchée, et $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, est donnée.

Au § 2 nous établissons des théorèmes d'existence et unicité pour de telles équations, qui consacrent leur caractère déterministe : les conditions initiales déterminent entièrement une solution (maximale); par contraste, on montre au § 1 un exemple très simple d'équation qui n'est pas sous forme normale, et qui possède une infinité de solutions ayant une condition initiale donnée.

Au § 3 nous étudions les équations linéaires. Dans le cas des équations à coefficients constants, une généralisation de la fonction exponentielle $e^x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ permet de trouver une expression explicite des solutions.

Au § 4, nous verrons que, dans certains cas, le comportement local des solutions d'une équation de la forme $y' = f(y)$ au voisinage d'un point y_0 où $f(y_0) = 0$ est déterminé par la dérivée de f en y_0.

1. Introduction, exemples

Une équation différentielle ordinaire d'ordre k est une expression de la forme:

(1-1) $$f(t, y, y', \dots, y^{(k)}) = 0, \text{ où } f : U \to \mathbb{R}^p \,, U \text{ ouvert de } \mathbb{R} \times (\mathbb{R}^n)^{k+1} \quad ;$$

une solution est une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, φ est de classe $\mathcal{C}^k$, vérifiant :

- $(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) \in U \,, \forall\, t \in I$
- $f(t, \phi(t), \phi'(t), \dots, \phi^{(k)}(t)) = 0 \,, \forall\, t \in I$.

On parle d'équations différentielles *ordinaires* parce qu'elles ne font intervenir que les dérivées par rapport à une seule variable, généralement notée t, par opposition aux équations qui font intervenir des dérivées par rapport à plusieurs variables, comme l'équation de Laplace : $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$, qui se traitent par des méthodes différentes.

On dit qu'une équation est sous forme normale si elle s'écrit:

$$y' = f(t, y) \quad , \quad f : U \to \mathbb{R}^n \quad , \quad U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \quad , \quad y' = (y_1', \dots, y_n') \,.$$

C'est ce type d'équation que l'on va traiter par la suite. Montrons comment on peut essayer d'y ramener des équations de type général (1-1). Tout d'abord, on peut se ramener à l'ordre 1 en augmentant le nombre de variables; on pose:

$$x_0 = y \,,\, x_1 = y', \dots, x_{k-1} = y^{(k-1)}$$

et alors (1-1) est équivalente au système d'équations d'ordre 1:

$$\begin{aligned} x_1 - (x_0)' &= 0 \\ x_2 - (x_1)' &= 0 \\ &\vdots \\ x_{k-1} - (x_{k-2})' &= 0 \\ f(t, x_0, x_1, \dots, x_{k-1}, (x_{k-1})') &= 0 \,. \end{aligned}$$

Si l'on pose

$$F(t, x, x') = \big(x_1 - x_0', \dots, x_{k-1} - x_{k-2}', f(t, x_0, \dots, x_{k-1}, x_{k-1}')\big)$$

on est ramené à étudier l'équation d'ordre un $F(t, x, x') = 0$, que l'on peut essayer de mettre sous forme normale, par exemple en utilisant le théorème des fonctions implicites.

1.1 Définition. Soit $y' = f(t, y)$, $f : U \to \mathbb{R}^n$, U ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ une équation sous forme normale et soit $(t_0, y_0) \in U$. Une solution de l'équation $y' = f(t, y)$ avec condition initiale (t_0, y_0) est une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, telle que

- $I \ni t_0$ et $(t, \varphi(t)) \in U \ \forall t \in I$
- $\varphi(t_0) = y_0$ et $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

On dit que φ est une solution maximale (ou non prolongeable) si on ne peut pas l'étendre; c'est à dire que si $\psi : J \to \mathbb{R}^n$ est aussi une solution, avec $J \supset I$ et $\psi|I = \varphi$, alors $\psi = \varphi$ (et en particulier $J = I$)

L'exemple élémentaire d'équation différentielle: $y' = f(t)$, où $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ est continue, admet comme unique solution avec conditions initiales $(t_0, y_0) \in]a, b[\times \mathbb{R}$ la fonction $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s) ds$$

(ici on peut poser $U =]a, b[\times \mathbb{R}$ puisque f ne dépend que de t). Cela nous pousse à espérer qu'en général une équation différentielle admet une unique solution maximale ayant une condition initiale donnée; c'est précisément ce qu'affirme le théorème **2.12**, dans le cas où f vérifie certaines conditions.

Le cas le plus simple d'équation différentielle est celui des équations de la forme :

$$y' = f(t) \cdot g(y)$$

où $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ et $g :]c, d[: \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Si $g(y_0) = 0$, alors la fonction constante $\varphi(t) = y_0$ est solution. Sinon, par continuité $g(y) \neq 0$ pour y proche de y_0 et alors on peut mettre l'équation sous le forme :

$$\frac{y'}{g(y)} = f(t) \tag{1-2}$$

d'où le nom de "variable séparées" (y d'un côté, t de l'autre). Si $\varphi(t)$ est une solution, avec condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$, en remplaçant dans (1-2) et en intégrant de t_0 à t, il vient :

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{g(\varphi(s))} ds = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} = \int_{t_0}^{t} f(s) ds$$

où la première égalité utilise la substitution $\eta = \varphi(t)$. Si on pose

$$G(y) = \int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{g(\eta)} \quad , \quad F(t) = \int_{t_0}^{t} f(s) ds \quad .$$

Posons encore $\Phi(y, t) = G(y) - F(t)$. On a alors que $\varphi(t)$ est solution de notre équation si et seulement si $\Phi(\varphi(t), t) = 0$. Notons que $\Phi(t_0, y_0) = 0$ et que $\frac{\partial \Phi}{\partial y}(t_0, y_0) = \frac{1}{g(y_0} \neq 0$. Il suit alors du théorème des fonctions implicite qu'il existe une fonction $\varphi(t)$, définie pour t proche de t_0, avec $\varphi(t_0) = y_0$, et qui vérifie $\Phi(\varphi(t), t) = 0$, c'est-à-dire que $\varphi(t)$ est bien solution de notre équation différentielle.

1.2 Exemples.

(1) Considérons l'équation

$$y' = 2ty^2 \quad .$$

On en tire que si $y(t)$ est une solution, $y(t) \neq 0$, $\frac{y'}{y^2} = 2t$ et de là, en intégrant des deux côtés de l'équation, que $-1/y(t) + C = t^2$ où C est une constante, et donc :

$$y_C(t) = \frac{1}{C - t^2} \tag{1-3}$$

et si l'on veut que $y(t_0) = y_0$, alors $C = 1/y_0 + t_0^2$; c'est à dire, en remplaçant dans (1-2) :

$$y(t) = \frac{y_0}{1 + y_0(t_0^2 - t^2)} \quad . \tag{1-4}$$

Esquissons l'allure de ces solutions. La forme (1-2) est plus maniable, sauf que la solution $y \equiv 0$ n'y apparaît pas. En tous les cas, $y_C(t) \to 0$ si $t \to \pm\infty$ (i.e. l'axe Ox est une asymptote horizontale) et $y_C(t) = y_C(-t)$.

Si $C < 0$, $y_C(t)$ est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, et $y_C(0) = 1/C < 0$.

Si $C = 0$, $y_C(t)$ est définie pour $t < 0$ et pour $t > 0$. L'axe Oy est une asymptote verticale, et $y_C(t) \to -\infty$ si $t \to 0$

Si $C > 0$, $t = \sqrt{C}$ et $t = -\sqrt{C}$ sont des asymptotes verticales. $y_C(t)$ est définie pour $t < -\sqrt{C}$, $-\sqrt{C} < t < \sqrt{C}$ et $t > \sqrt{C}$. On utilise la notation $t \to a-0$ ou $t \to a+0$ pour indiquer que t tend vers a par des valeurs inférieures à a, respectivement supérieures : si $t \to -\sqrt{C} - 0$ ou $t \to \sqrt{C} + 0$, alors $y_C(t) \to -\infty$, et si $t \to -\sqrt{C} + 0$ ou $t \to \sqrt{C} - 0$, alors $y_C(t) \to +\infty$ (voir figure **III.1**).

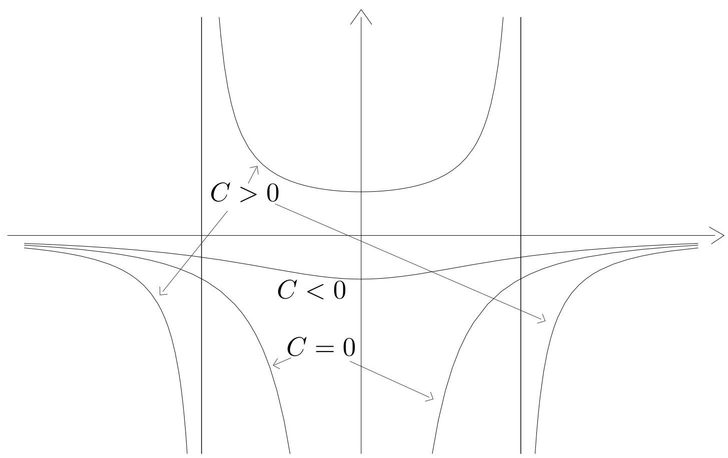

Figure III.1 – Allure des solutions de $y' = 2ty^2$

On constate sur cet exemple que pour toute condition initiale $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ il existe une unique solution maximale ayant cette condition initiale. On doit retenir aussi que, selon les conditions initiales, les intervalles de définition des solutions maximales peuvent être bornés, bornés à gauche ou à droite seulement, ou non bornés.

(2) Considérons maintenant l'équation

$$y' = 3\sqrt[3]{y^2} \quad .$$

On a comme solution $y \equiv 0$. En supposant $y(t) \neq 0$, on a $y'/(3\sqrt[3]{y^2}) = 1$, d'où l'on tire que $y^{1/3} = t + C$, ou encore que $y = (t+C)^3$.

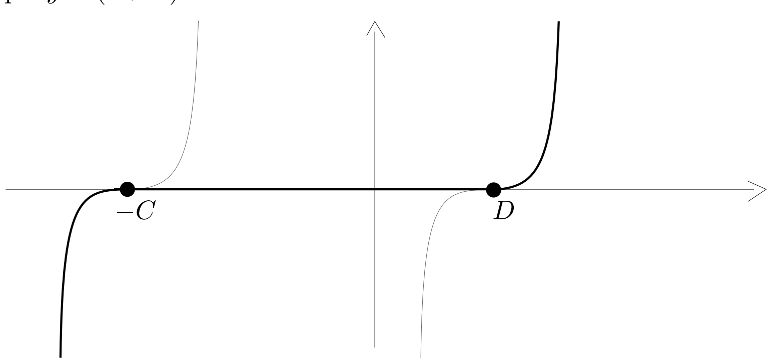

Figure III.2 – Solutions de $y' = 3y^{2/3}$

On voit que pour la condition initiale $(t_0, 0)$ on a deux solution possibles : $y \equiv 0$ ou $y = (t - t_0)^3$. En fait, il y a pire; en effet, on peut "recoller" des solutions du type $y = (t + C)^3$, $t \leq -C$ avec la solution zéro: on vérifie que pour $D > -C$ la fonction

$$\varphi(t) = \begin{cases} (t+C)^3 & \text{si } t \leq -C \\ 0 & \text{si } -C \leq t \leq D \\ (t-D)^3 & \text{si } t \geq D \end{cases}$$

où $D > -C$, est une solution. Donc il y a une infinité de solutions maximales ayant une condition initiale donnée (voir figure **III.2**). Si on se refère au théorème **2.12** , le fait qu'il n'y ait pas unicité des solutions ayant une condition initiale donnée tient au fait que le deuxième membre de l'équation $\sqrt[3]{y^2}$ n'est pas dérivable en $y = 0$. Mais cette équation est équivalente à l'équation $(y')^3 - 27y^2 = 0$, dont le seul défaut est de ne pas être sous forme normale.

Dans le même ordre d'idées, une équation relativement simple (qui n'est pas sous forme normale), dont les solutions approchent n'importe quelle fonction $\mathcal{C}^\infty$ a été trouvée par Lee-A. Rubeel ("A universal differential equation", Bulletin of the American Math. Society (New Series) 4 (1981), no 3, pages 345-349).

Dans le reste de ce paragraphe, nous allons encore examiner comment les équations de la forme $y' = f(y)$ se comportent lorsqu'on les transporte par une application. Cela nous permettra ensuite d'étudier l'allure des trajectoires de champs de vecteurs linéaires dans le plan.

1.1 Transport de champs de vecteurs

Un champ de vecteurs sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ est une application continue $\xi : U \to \mathbb{R}^n$. Il lui est associé l'équation différentielle: $y' = \xi(y)$. Pour retrouver les notations des paragraphes précédents, il faut poser $U' = \mathbb{R} \times U$ et $f(t, y) = \xi(y)$; les solutions maximales seront de la forme $\varphi : I \to U$, $I \subset \mathbb{R}$ intervalle ouvert. Ce type d'équation, où le second membre ne dépend pas de t, est appelé équation autonome. La proposition ci-dessous explique pourquoi : l'évolution d'un point y_0 ne dépend pas de l'heure du départ.

1.3 Proposition. *Soit $\xi : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, un champ de vecteurs. Si $\varphi : I \to U$ est une solution de $y' = \xi(y)$ avec $\varphi(t_0) = y_0$, alors $\varphi_1(t) = \varphi(t + t_0 - t_1)$ est aussi solution, et satisfait les conditions initiales $\varphi_1(t_1) = y_0$.*

Preuve:

$$\varphi_1'(t) = \varphi'(t + t_0 - t_1) = \xi(\varphi(t + t_0 - t_1)) = \xi(\varphi_1(t)) \text{ et } \varphi_1(t_1) = \varphi(t_1 + t_0 - t_1) = y_0$$

.

q.e.d.

Les solutions de l'équation $y' = \xi(y)$ associées à un champ de vecteurs s'appellent orbites du champ, ou encore trajectoires du champ. On les représente généralement par leur image dans U sur laquelle on indique le sens de parcours (voir figure **III.3**).

Par exemple, l'équation associée au champ de vecteurs $\xi(x, y) = (x, y)$:

$$x' = x \quad , \quad y' = y$$

et les trajectoires sont de la forme $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^t$, c'est-à-dire des demi droites issues de l'origine, plus la constante égale à l'origine $(0, 0)$.

Soient U, $V \subset \mathbb{R}^n$ des ouverts et $h : U \to V$ une application $\mathcal{C}^1$. Soient encore $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ et $\eta : V \to \mathbb{R}^n$ des champs de vecteurs et supposons que l'on ait:

$$\eta(h(x)) = dh_x(\xi(x)) \quad .$$

On dit alors que h transporte le champ ξ sur le champ η, ou encore que η est le transformé du champ ξ par h. Remarquons que si $\varphi : I \to U$ est une solution de $y' = \xi(y)$, alors

$$h\big(\varphi(t)\big)' = dh_{\varphi(t)}\big(\varphi(t)'\big) = dh_{\varphi(t)}\big(\xi(\varphi(t)\big) = \eta\big(h(\varphi(t))\big)$$

ce qui fait que la composée $h \circ \varphi : I \to V$ est solution de $y' = \eta(y)$. En d'autre termes, h transporte les trajectoires de ξ sur des trajectoires de η.

Dans le cas où $h : U \to V$ est un difféomorphisme, pour tout champ $\eta : V \to \mathbb{R}^n$ on peut définir $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ par

$$\xi(x) = dh^{-1}_{h(x)}(\eta(h(x))$$

ce qui fait que η est toujours le transformé par h d'un champ de vecteurs sur U.

1.4 Exemples.

(1) Lorsque $n = 2$, appelons $x = (x_1, x_2)$ les coordonnées à la source et $y = (y_1, y_2)$ les coordonnées au but de h. Si η est le transformé de ξ par h, on a :

$$\begin{aligned}\eta_1(h(x)) &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x)\,\xi_1(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x)\,\xi_2(x)\\ \eta_2(h(x)) &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x)\,\xi_1(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x)\,\xi_2(x)\end{aligned}$$

et l'équation différentielle associée à η s'écrit :

$$\begin{aligned}y_1' &= \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x)\,\xi_1(x) + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x)\,\xi_2(x) = \frac{\partial h_1}{\partial x_1}(x)\,x_1' + \frac{\partial h_1}{\partial x_2}(x)\,x_2'\\ y_2' &= \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x)\,\xi_1(x) + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x)\,\xi_2(x) = \frac{\partial h_2}{\partial x_1}(x)\,x_1' + \frac{\partial h_2}{\partial x_2}(x)\,x_2'\end{aligned}$$

Par abus de notation, on identifie η à (y_1', y_2') et ξ à (x_1', x_2'); les équations ci-dessus expriment donc η en termes de ξ.

(2) Considérons les coordonnées polaires $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))$, le champ $\eta(x, y) = (-y, x)$ et l'équation associée

$$\begin{aligned}x' &= -y\\ y' &= x\end{aligned}$$

Pour trouver un champ de vecteurs (ρ', θ') dont le transformé par h donne η, il faut résoudre les équations suivantes, linéaires en ξ :

$$\begin{aligned}x' &= \rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\theta'\\ y' &= \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta'\end{aligned}$$

c'est-à-dire, puisque $x' = -y = -\rho\sin(\theta)$ et $y' = x = \rho\cos(\theta)$:

$$\begin{array}{lll|c|c}\text{(I)} & \rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\theta' & = -\rho\sin(\theta) & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \text{(II)} & \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta' & = \rho\cos(\theta) & \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{array}$$

En calculant (I)$\cos(\theta)$+(II)$\sin(\theta)$ et (I)$(-\sin(\theta))$+(II)$\cos(\theta)$ comme indiqué, on obtient les deux équations :

$$\rho' = 0 \quad , \quad \rho\theta' = \rho$$

que l'on resout aisément:

$$\rho(t) = R \quad , \quad \theta(t) = t + c$$

où R et c sont des constantes arbitraires (si $R = 0$, θ est indéterminé). On en tire la solution générale de l'équation de départ:

$$x(t) = R\cos(t + c) \quad , \quad y(t) = R\sin(t + c) \quad .$$

Les solutions sont donc des cercles centrés en 0, parcourus à vitesse angulaire constante dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

(3) Considérons le champ de vecteurs $\xi(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$ sur $\mathbb{R}^2$; il s'agit en fait de l'application $z \mapsto z^2$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, écrite en termes de $x = \mathrm{Re}(z)$ et $y = \mathrm{Im}(z)$). On voit déjà qu'il admet comme solution la constante $(0,0)$; on peut donc se borner à considérer ξ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On va étudier ce champ en utilisant les nombres complexes: $\xi : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$, $\xi(z) = z^2$. Considèrons le difféomorphisme $h : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $h(z) = 1/z$, qui est d'ailleurs son propre inverse. On a que $h'(z) = -1/z^2$, et donc le champ η, transformé de ξ par h est :

$$\eta(h(z)) = h'(z)z^2 = -1 \Rightarrow \eta(z) = -1 \quad ;$$

c'est donc le champ constant égal à $(-1,0)$, dont les orbites sont des droites horizontales $\varphi(t) = (-t, b)$. Si on les compose avec h, on trouve les solutions de l'équation de départ:

$$(x(t), y(t)) = \frac{(-t, -b)}{t^2 + b^2}$$

puisque $h(z) = 1/z = \overline{z}/z\overline{z} = (x, -y)/(x^2 + y^2)$; on en tire que si $b \neq 0$

$$x^2 + \left(y + \frac{1}{2b}\right)^2 = \frac{1}{4b^2}$$

qui sont les équations de cercles passant par l'origine, centrés en $(0, -1/(2b))$. En fait, $(x(t), y(t)) \neq 0 \, \forall t \in \mathbb{R}$, ce qui fait que les orbites sont les cercles ci-dessus privés de $(0,0)$, le point $(0,0)$ et les 2 demi-droites constituées par l'axe Ox privé de l'origine (qui correspondent au cas $b = 0$: $x(t) = -1/t \,, y(t) = 0$, pour $t > 0$ ou $t < 0$) (voir figure **III.3**).

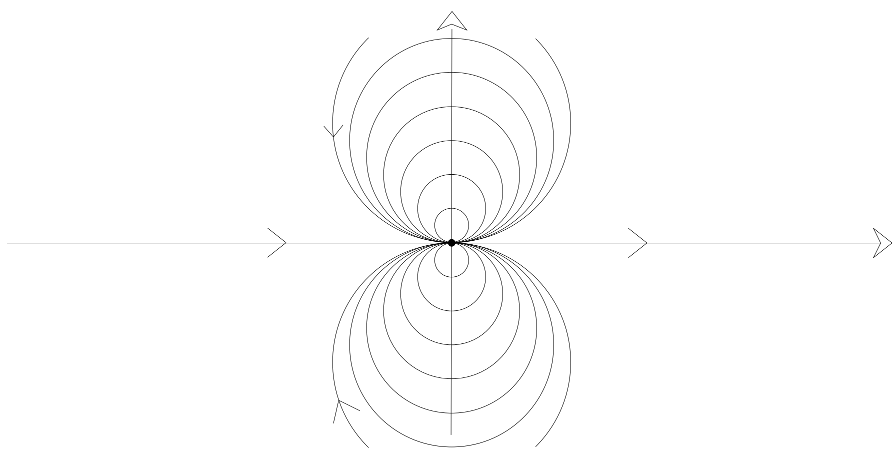

Figure III.3 – Solutions de $(x,y)' = (x^2 - y^2, 2xy)$

1.2 Classification des systèmes linéaires dans le plan

Nous allons étudier les trajectoires des équations différentielles sur $\mathbb{R}^2$ de la forme :

$$\begin{cases} x' = & ax + by \\ y' = & cx + dy \end{cases}$$

c'est-à-dire les trajectoires de champs de vecteurs de la forme :

$$\xi(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

qui peut encore s'écrire sous forme matricielle :

$$\xi = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad .$$

Tout d'abord, on va faire de l'algèbre linéaire : on va trouver une transformation linéaire pour mettre la matrice M sous forme de Jordan (proposition **1.5**), puis on va résoudre explicitement les équations dans les différents cas.

Si $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme linéaire, le transformé $\eta = N \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ d'un champ linéaire $\xi = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ s'écrit :

$$\eta\left(S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S(\xi(x, y)) = SM \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow \eta(x, y) = SMS^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Longrightarrow M = S^{-1}NS$$

En termes de changement de base, si v_1 v_2 est une nouvelle base de $\mathbb{R}^2$, et S la matrice de changement de base, c'est-à-dire la matrice ayant v_1 comme premier vecteur colonne et v_2 comme deuxième vecteur colonne, la matrice $S^{-1}NS$ est la matrice de l'application linéaire η, écrite dans la base v_1, v_2. Donc, la formule ci-dessus nous dit que si S transporte ξ sur η, ξ est le champ linéaire ayant pour matrice $S^{-1}NS$, soit la matrice de l'application associée à η écrite dans la nouvelle base v_1, v_2. Les trajectoires de η seront de la forme $S(\varphi(t))$, où $\varphi(t)$ est une trajectoire de ξ.

1.5 Proposition. *Soit* $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. *Il existe une matrice inversible* $S \in G\ell(2, \mathbb{R})$ *telle que* $S^{-1}AS$ *soit de l'un des 3 types :*

$$1) \quad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad , \quad 2) \quad \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix} \quad , \quad 3) \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Preuve: Soit $p_A(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I)$, où I est la matrice identité, le polynôme caractéristique de A, qui est de degré 2. Appelons λ_1 et λ_2 les racines de $p_A(\lambda)$, qui peuvent être réelles, ou imaginaires conjuguées, distinctes ou non.

(1) λ_1 et λ_2 sont réelles distinctes

Dans ce cas, il existe deux vecteurs propres v_1 et v_2 linéairement indépendants : $A(v_1) = \lambda_1 v_1$, $A(v_2) = \lambda_2 v_2$ et donc si on prend v_1 et v_2 comme base de $\mathbb{R}^2$, la matrice de l'application associée à A s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad .$$

On écrit v_1 et v_2 comme vecteurs colonne :

$$v_1 = \begin{pmatrix} v_1^1 \\ v_1^2 \end{pmatrix} \quad , \quad v_2 = \begin{pmatrix} v_2^1 \\ v_2^2 \end{pmatrix}$$

Si $S = \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix}$ est la 2×2 matrice dont v_1 est la première colonne et v_2 la deuxième colonne, alors :

$$AS = A \begin{pmatrix} v_1^1 & v_2^1 \\ v_1^2 & v_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 v_1^1 & \lambda_2 v_2^1 \\ \lambda_1 v_1^2 & \lambda_2 v_2^2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \Longrightarrow S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad .$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$, deux cas peuvent se produire : l'espace propre correspondant peut être de dimension deux, auquel cas on peut prendre pour v_1 et v_2 n'importe quelle paire de vecteurs linéairement indépendants et procéder comme ci-dessus. Ou bien l'espace propre correspondant est de dimension 1; ce cas est traité au numéro 3 ci-dessous.

(2) Si $\lambda_1 \in \mathbb{C}$, mais $\lambda_1 \notin \mathbb{R}$, alors $\lambda_2 = \overline{\lambda_1} \neq \lambda_1$. On a donc 2 vecteurs propres linéairement indépendants sur $\mathbb{C}$, de la forme v et $\overline{v}$. On prend alors comme base de $\mathbb{R}^2$ les parties réelles et imaginaires de v :

$$v_1 = \frac{v + \overline{v}}{2} \quad , \quad v_2 = \frac{v - \overline{v}}{2i} \quad , \quad \text{où } i = \sqrt{-1} \in \mathbb{C} \quad .$$

Posons $\lambda_1 = \mu - i\alpha$ ($\alpha \neq 0$), de sorte que $\lambda_2 = \mu + i\alpha$. Alors

$$A(v_1) = A\left(\frac{v+\overline{v}}{2}\right) = \frac{(\mu - i\alpha)v + (\mu + i\alpha)\overline{v}}{2} = \mu\frac{v+\overline{v}}{2} - \alpha i \frac{v - \overline{v}}{2} = \mu v_1 + \alpha v_2$$
$$A(v_2) = A\left(\frac{v-\overline{v}}{2i}\right) = \frac{(\mu - i\alpha)v - (\mu + i\alpha)\overline{v}}{2i} = \mu\frac{v-\overline{v}}{2i} - \alpha \frac{v + \overline{v}}{2} = \mu v_2 - \alpha v_1$$

La matrice de changement de base S est obtenue, comme d'habitude, en mettant v_1 en première colonne, v_2 en deuxième colonne. On a donc : $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$.

(3) Reste le cas où $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ et l'espace propre correspondant est de dimension 1. Soit $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ le vecteur propre correspondant à λ, et $w \in \mathbb{R}^2$ un vecteur linéairement indépendant de v. Alors :

$$A(v) = \lambda_0 v \quad , \quad A(w) = av + \lambda' w$$

et la matrice de l'application associée à A s'écrit dans cette nouvelle base :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda' \end{pmatrix}$$

d'où on déduit que $p_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)(\lambda - \lambda')$, et donc $\lambda' = \lambda_0$, sans quoi on est dans le cas (1). D'autre part on a aussi que $a \neq 0$, sans quoi on est dans le cas où l'espace propre associé à λ_0 est $\mathbb{R}^2$ tout entier, cas déjà traité sous (1). Finalement, la matrice s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & a \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad , \quad \text{avec} \quad a \neq 0 \quad .$$

Faisons encore le changement de base de la forme $w' = 1/aw$; alors $A(w') = 1/a\, A(w) = 1/a(av + \lambda_0 w) = v + \lambda_0 w'$, et donc la matrice de l'application associée à A, dans la base v, w' s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad .$$

Notons que si on fait plutôt le changement de base $w' = (b/a)w$, $b \neq 0$, alors la matrice devient :

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & b \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix} \quad , \quad b \neq 0 \quad .$$

q.e.d.

Remarquons que les 3 cas correspondent à :
1) A diagonalisable sur $\mathbb{R}$
2) A diagonalisable sur $\mathbb{C}$
3) A non diagonalisable

On est donc ramené, par la transformation S, à étudier les champs de vecteurs de la forme $\xi = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, où A est de la forme 1), 2) ou 3) de l'énoncé de la proposition précédente. On va passer à l'étude des divers cas; remarquons que $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ est une trajectoire, dans tous les cas.

(1) $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. L'équation différentielle s'écrit :

$$\begin{cases} x' = & \lambda_1 x \\ y' = & \lambda_2 y \end{cases}$$

et la solution ayant pour conditions initiales $t_0 = 0$ et $(x_0, y_0))$ s'écrit :

$$x(t) = x_0 e^{\lambda_1 t} \quad , \quad y(t) = y_0 e^{\lambda_2 t} \quad .$$

Si $x_0 \neq 0$, on peut écrire :

$$y(t) = y_0 \left(\frac{x(t)}{x_0} \right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

ce qui montre que $x(t)$ doit avoir le même signe que x_0 (sans quoi l'exponentielle $\left(\frac{x(t)}{x_0}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$ n'a pas de sens), et que $y(t)$ a le même signe que y_0 : les trajectoires restent donc toujours dans le même cadran.

L'allure varie selon les valeurs de λ_1 et λ_2. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, les trajectoires sont les points du plan. Lorsque $\lambda_1 = \lambda_2$, les trajectoires sont les demi-droites issues de l'origine.

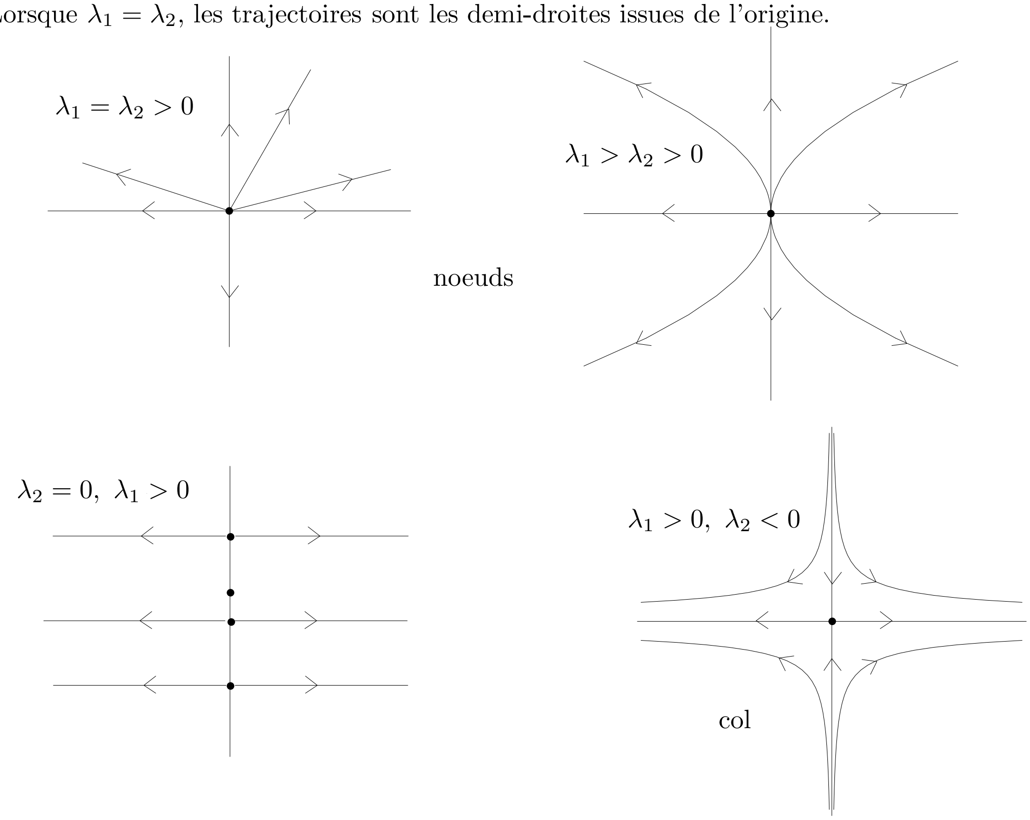

Figure III.4 – A diagonalisable sur $\mathbb{R}$

(2) $A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$

Ici il convient de passer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} x' = & \mu x - \alpha y \\ y' = & \alpha x + \mu y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \rho' \cos(\theta) - \rho \sin(\theta)\theta' = & \rho(\mu \cos(\theta) - \alpha \sin(\theta)) \\ \rho' \sin(\theta) + \rho \cos(\theta)\theta' = & \rho(\alpha \cos(\theta) + \mu \sin(\theta)) \end{cases}$$

d'où on déduit, comme dans l'exemple **1.4 (2)**, le système d'équations :

$$\begin{cases} \rho' = & \mu\rho \\ \rho\theta' = & \rho\alpha \end{cases} .$$

Les solutions s'écrivent sous la forme $\rho = 0$, et θ indéterminé, ou bien $\rho = \rho_0 e^{\mu t}$, $\theta = \alpha t + \theta_0$, où on a pris les conditions initiales $t_0 = 0$ et (ρ_0, θ_0). Ce sont des spirales qui s'enroulent autour de l'origine, sauf si $\mu = 0$, auquel cas on trouve les cercles centrés à l'origine.

En coordonnées cartesiennes :

$$x = \rho\cos(\theta) = \rho_0 e^{\mu t} \cos(\alpha t + \theta_0) \quad ; \quad y = \rho \sin(\theta) = \rho_0 e^{\mu t} \sin(\alpha t + \theta_0)$$

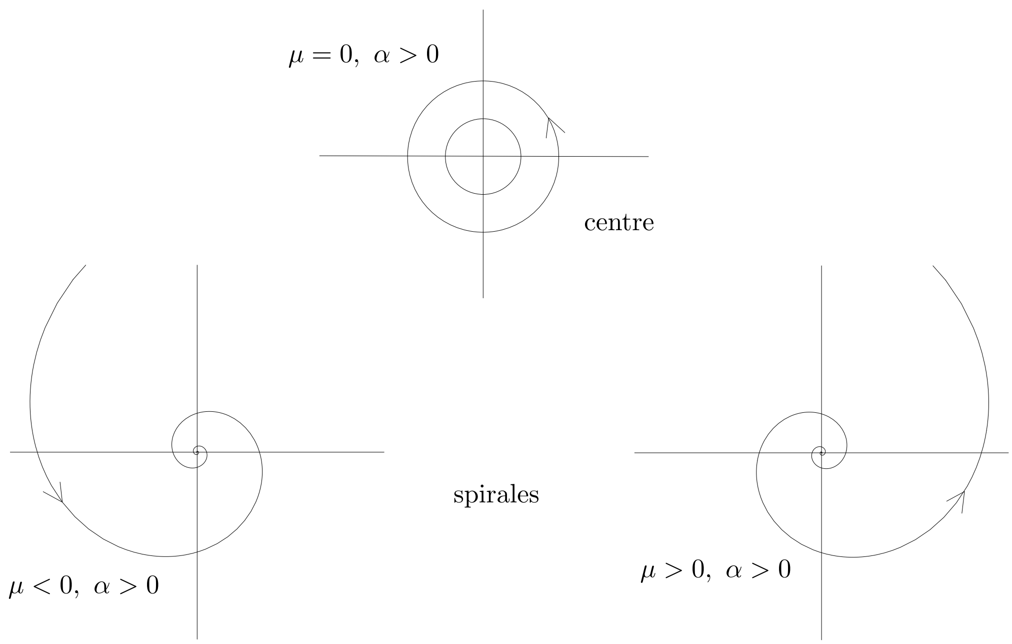

Figure III.5 – A diagonalisable sur $\mathbb{C}$

(3) $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

Ici le système s'écrit :

$$\begin{cases} x' = & \lambda x + y \\ y' = & \lambda y \end{cases}$$

On vérifie que $x(t) = e^{\lambda t}(y_0 t + x_0)$, $y(t) = y_0 e^{\lambda t}$ est effectivement solution, avec condition initiale $t_0 = 0$ et (x_0, y_0). Les trajectoires coupent l'axe OY pour $t = -x_0/y_0$.

Dans le cas d'une matrice A quelconque, les trajectoires sont les images par l'isomorphisme S des trajectoires précédentes.

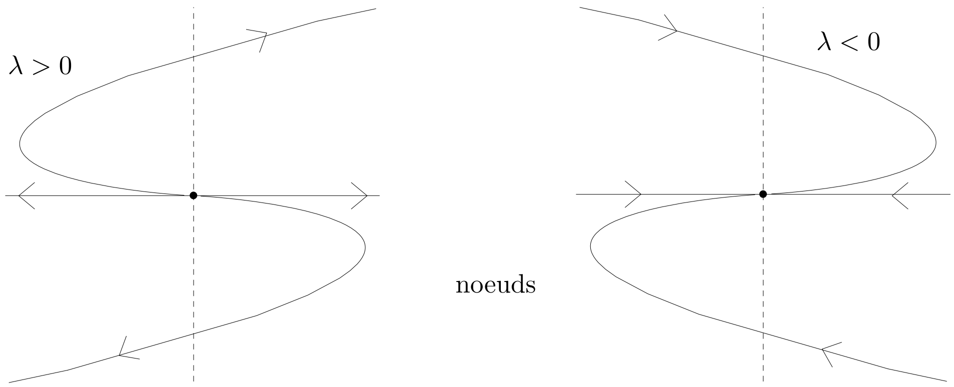

Figure III.6 – A non diagonalisable

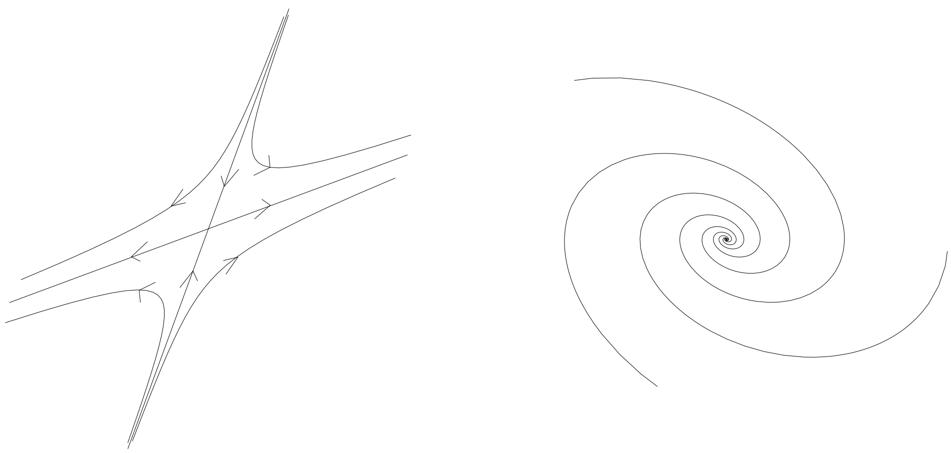

Figure III.7 – Exemples d'allure dans une base quelconque

2. Théorèmes d'existence et unicité

Dans ce paragraphe nous allons aborder quelques résultats théoriques sur les équations différentielles ordinaires : existence et unicité des solutions, dépendance continue par rapport à des paramètres. Nous basons notre approche sur la méthode des approximations successives, qui est à la source des procédés de résolutions numériques.

2.1 Remarque. Dire que $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$, avec condition initiale (t_0, y_0), équivaut à dire que

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds \quad \forall\, t \in I$$

ce qui se vérifie immédiatement. La résolution d'une équation différentielle avec condition initiale donnée est ainsi ramené à la résolution d'une équation intégrale, en fait la recherche d'un point fixe de la transformation

$$T(\varphi)_{(t)} = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$$

En particulier, sous cette forme, il n'est pas nécessaire de supposer que φ est dérivable, cela suit automatiquement si φ est un point fixe, puisque l'expression $y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, \varphi(s))ds$ est dérivable par rapport à t.

2.2 Définition. Soit $f : A \to \mathbb{R}^n$, où $A \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, une application continue. On dit que f est lipschitzienne en y, de constante de Lipschitz k, si pout tout (t, y_1), $(t, y_2) \in A$ on a :

$$\|f(t,y_1) - f(t,y_2)\| \leq k\,\|y_1 - y_2\| \quad .$$

2.3 Exemples.

(1) Si $f : U \to \mathbb{R}$, U ouvert de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, est de classe $\mathcal{C}^1$, alors pour tout sous-ensemble $A \subset U$ de la forme $A = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b)$, la restriction $f|A$ est lipschitzienne, en prenant :

$$k = \sup \left\{ \left\| \frac{\partial f}{\partial y}(t,y) \right\| \;,\; (t,y) \in A \right\} \quad ;$$

cela résulte du théorème des accroissements finis **II.2.6**.

(2) La fonction $f(t,y) = f(y) = y^{2/3}$ n'est pas lipschitzienne, même en restriction à des intervalles, lorsque ceux-ci contiennent 0; en effet une inégalité de la forme :

$$|f(y) - f(0)| = y^{2/3} < k\,|y|$$

entraînerait que $|y|^{-1/3} \leq k$, ce qui est absurde.

(3) Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est une application linéaire, alors

$$\|A(y_1) - A(y_2)\| \leq \|A\|\,\|y_1 - y_2\|$$

et alors A est lipschitzienne, avec constante de Lipschitz $\|A\|$.

(4) Plus généralement, si $A : I \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un intervalle, est une application continue, pour tout intervalle fermé borné $[a,b] \subset I$ on peut poser $k = \sup\{\|A(t)\| \;,\; t \in [a,b]\}$, et on aura :

$$\|A(t,y_1) - A(t,y_2)\| \leq k\,\|y_1 - y_2\| \quad .$$

L'application $A(t,y)$ est donc lipschitzienne en y sur tout ensemble de la forme $[a,b]\times\mathbb{R}^n$ contenu dans $I\times\mathbb{R}^n$.

Pour la construction de solutions approchées, nous utiliserons des applications linéaires par moceaux, de la manière suivante. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, et soit $(t_0, y_0) \in U$ une condition initiale; soit $N > 0$ un entier, choisissons une quantité $\Delta t \in \mathbb{R}$, suffisamment petite, et définissons par récurrence sur m, pour $m \leq N$, une suite de points $y_m \in \mathbb{R}^n$:

$$y_1 = y_0 + f(t_0, y_0)\Delta t\,, \ldots,\; y_{m+1} = y_m + f(t_0 + m\Delta t, y_m)$$

ce qui a un sens pour autant que Δt soit suffisamment petite pour que $(t_0 + m\Delta t, y_m) \in U$, $m \leq N$. On définit alors la solution approchée, pour $t_0 \leq t \leq t_0 + N\Delta t$, par interpolation linéaire des points y_m; posons $t_m = t_0 + m\Delta t$:

$$\text{pour} \quad t_m \leq t \leq t_{m+1} \text{ on pose : } \varphi_N(t) = y_m + \frac{(t - t_m)}{\Delta t}(y_{m+1} - y_m)$$

Cette application est continue, car les définitions de φ_N aux extrémités des intervalles $[t_m, t_{m+1}]$ coïncident; mais elles sont seulement dérivables à gauche et à droite aux points t_m. On dira que de telles applications sont $\mathcal{C}^1$ par morceaux : ce sont des applications continues d'un intervalle I, à valeur dans $\mathbb{R}^n$, continues, continûment dérivables, sauf éventuellement en des points $t_0, t_1, \ldots, t_N \in I$, où elles admettent tout de même des dérivées à gauche et à droite, limites des dérivées à gauche ou à droite des t_i.

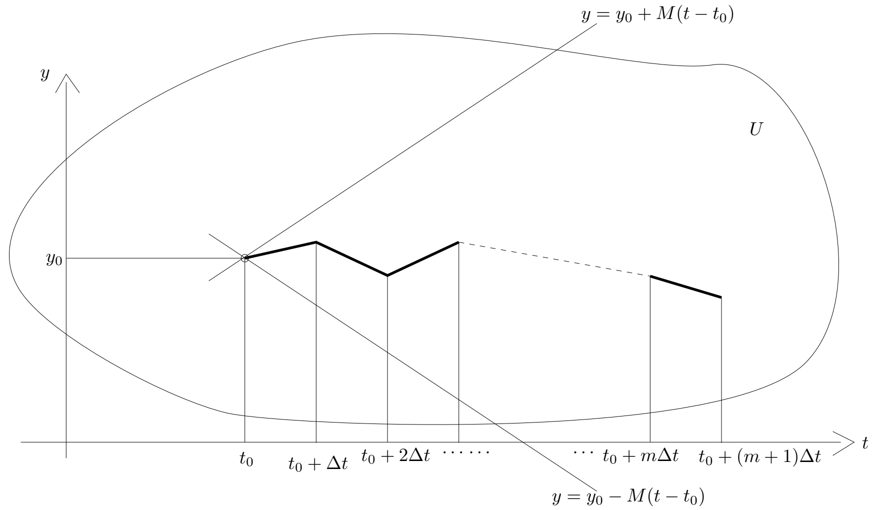

Figure III.8 –

2.4 Définition. Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et soit $\varepsilon > 0$. Une ε-solution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est une application dérivable par morceaux $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$, telle que $\forall t \in I$, $(t, \varphi(t)) \in U$ et vérifiant :

$$\|\varphi'(t) - f(t, \varphi(t))\| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \in I$$

où aux points de discontinuité de $\varphi'(t)$, l'inégalité doit être valable autant avec la dérivée à gauche qu'avec la dérivée à droite.

Le lemme suivant resout une inégalité intégrale.

2.5 Lemme de Gronwall. *Soit $g : [0, c] \to \mathbb{R}$ une application continue, $g(t) \geq 0$, et supposons qu'il existe des constantes $k, B, C > 0$ telles que :*

$$g(t) \leq B \quad \text{et} \quad g(t) \leq C + k \int_0^t g(s)ds \quad , \quad \forall\, t \in [0, c] \quad .$$

Alors, pour tout entier n on :

$$g(t) \leq C \left[1 + kt + \cdots + \frac{k^{n-1}}{(n-1)!} t^{n-1} \right] + B \frac{k^n\, t^n}{n!}$$

et donc, en faisant tendre n vers l'∞ :

$$g(t) \leq Ce^{kt} \quad .$$

Preuve: On procède par récurrence sur n. Pour $n = 0$, $g(t) \leq B$ par hypothèse. Si l'inégalité est vraie pour $n - 1$:

$$g(s) \leq C \left[1 + ks + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)!} s^{n-2} \right] + B \frac{k^{n-1}\, s^{n-1}}{(n-1)!}$$

on remplace cette inégalité dans l'intégrale de l'énoncé :

$$g(t) \leq C + k \int_0^t g(s)ds \leq C + k \int_0^t \left(C \left[1 + ks + \cdots + \frac{k^{n-2}}{(n-2)!} s^{n-2} \right] + B \frac{k^{n-1}\, s^{n-1}}{(n-1)!} \right) ds$$

$$= C \left[1 + kt + k^2 \frac{t^2}{2} + \cdots + k^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right] + Bk^n \frac{t^n}{n!}$$

q.e.d.

Le prochain théorème donne une estimation de l'évolution de l'écart de solutions approchées.

2.6 Théorème (l'inégalité fondamentale). *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert. Supposons que f satisfasse la condition de Lipschitz sur U, avec constante k. Soient $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \delta > 0$, $\varphi_i(t) : I \to \mathbb{R}^n$ des ε_i solutions de l'équation $y' = f(t, y)$, i=1,2 :*

$$\|\varphi_1'(t) - f(t, \varphi_1(t))\| \leq \varepsilon_1 \quad , \quad \|\varphi_2'(t) - f(t, \varphi_2(t))\| \leq \varepsilon_2 \quad \forall\, t \in I \quad .$$

Soit $t_0 \in I$ et supposons que

$$\|\varphi_1(t_0) - \varphi_2(t_0)\| \leq \delta \quad .$$

Alors, pour tout $t \in I$ on a :

$$\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\| \leq \delta e^{k|t-t_0|} + \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{k|t-t_0|} - 1\right)$$

où $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Preuve: Pour simplifier la notation, on va supposer que $t_0 = 0$ et $t > 0$; on ramène le cas général au cas particulier par le changement de variable $t' = t - t_0$ si $t > t_0$, ou $t' = t_0 - t$ sinon.

Notons que

$$\int_0^t (\varphi_i'(s) - f(s, \varphi_i(s)))\, ds = \varphi_i(t) - \varphi_i(0) - \int_0^t f(s, \varphi_i(s)) ds$$

et donc

$$\left\|\varphi_i(t) - \varphi_i(0) - \int_0^t f(s, \varphi_i(s)) ds\right\| \leq \varepsilon_i t$$

d'où on déduit que

$$\left\|\varphi_1(t) - \varphi_2(t) - (\varphi_1(0) - \varphi_2(0)) - \int_0^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)))\, ds\right\| \leq \varepsilon t \quad . \tag{2-1}$$

Posons $w(t) = \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t)\|$; alors :

$$\|f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s))\| \leq k w(s) \quad ;$$

notons que d'une égalité de la forme $\|a - b\| \leq c$ il suit que $\|a\| = \|a - b + b\| \leq \|a - b\| + \|b\| \leq \|b\| + c$ et alors il suit de (2-1) que

$$w(t) \leq w(0) + \varepsilon t + \left\|\int_0^t (f(s, \varphi_1(s)) - f(s, \varphi_2(s)))\, ds\right\| \leq w(0) + \varepsilon \cdot t + k \cdot \int_0^t w(s) ds = w(0) + k \cdot \int_0^t \left(w(s) + \frac{\varepsilon}{k}\right) ds$$

ou encore :

$$w(t) + \frac{\varepsilon}{k} \leq \left(w(0) + \frac{\varepsilon}{k}\right) + k \int_0^t \left(w(s) + \frac{\varepsilon}{k}\right) ds$$

et il suit alors du lemme **2.5** que

$$w(t) + \frac{\varepsilon}{k} \leq (\underbrace{w(0)}_{\leq \delta} + \frac{\varepsilon}{k}) e^{kt} \quad \Longrightarrow \quad w(t) \leq \delta e^{kt} + \frac{\varepsilon}{k}\left(e^{kt} - 1\right)$$

q.e.d.

2.7 Corollaire. *Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ est continue, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert, et f satisfait une condition de Lipschitz sur U, alors, si $\varphi_1(t), \varphi_2(t) : I \to \mathbb{R}^n$ sont deux solutions de l'équation $y' = f(t, y)$, et qu'il existe $t_0 \in I$ avec $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0)$, on a que $\varphi_1 \equiv \varphi_2$*

En effet, il suffit d'appliquer l'inégalité fondamentale, avec $\delta = \varepsilon = 0$.

Nous allons construire maintenant des ε-solutions pour tout $\varepsilon > 0$.

2.8 Proposition. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert. Soit $(t_0, y_0) \in U$ et supposons que $A = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \subset U$. Soit :*

$$M = \sup \{\|f(t, y)\|, (t, y) \in A\} \quad .$$

Alors, si $0 \le c \le \inf\{a, b/M\}$, pour tout $\varepsilon > 0$ l'équation $y' = f(t, y)$ admet une ε-solution $\varphi : [t_0 - c, t_0 + c] \to \mathbb{R}^n$.

Preuve: On va définir $\varphi(t)$ pour $t_0 \le t \le t_0 + c$, le cas $t_0 - c \le t \le t_0$ se traitant de manière semblable. Soit $N > 0$ un entier et posons $\Delta t = c/N$ et $t_m = t_0 + m\Delta t$; alors on peut définir par récurrence sur $m \ge 0$:

$$y_{m+1} = y_m + f(t_m, y_m)\Delta t \quad , \quad m \le N$$

car

$$\|y_{m+1} - y_m\| \le \|f(t_m, y_m)\Delta t\| \le M\frac{c}{N} \le M\frac{b}{MN} = \frac{b}{N} \text{ et donc } \|y_m - y_0\| \le m\frac{b}{N} \le b$$

ce qui fait que y_m est bien défini pour $m \le N$. Définissons comme tout-à-l'heure $\varphi_N : [t_0 - c, t_0 + c] \to \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_N(t) = y_m + \frac{(t - t_m)}{\Delta t}(y_{m+1} - y_m) \quad \text{pour} \quad t_m \le t \le t_{m+1} \quad m = 0, \ldots, N - 1$$

Alors, si $t \in [t_m, t_{m+1}]$:

$$\heartsuit \quad \|\varphi_N'(t) - f(t, \varphi_N(t))\| = \left\|\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} - f\left(t, y_m + (t - t_m)\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}\right)\right\|$$
$$= \left\|f(t_m, y_m) - f\Big(t, \underbrace{y_m + (t - t_m)\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}}_{=y'}\Big)\right\|$$

Or A est compact, donc $f|A$ est uniformément continue. Il existe donc $\delta_1, \delta_2 > 0$ tel que si $|t - t_m| \le \delta_1$ et $\|y_m - y'\| \le \delta_2$, alors $\|f(t_m, y_m) - f(t, y')\| \le \varepsilon$. Or $|t - t_m| \le c/N$ et

$$\left\|y_m + (t - t_m)\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t} - y_m\right\| = \left\|(t - t_m)\frac{y_{m+1} - y_m}{\Delta t}\right\| \le \|y_{m+1} - y_m\| = \|f(t_m, y_m)\Delta t\| \le M\frac{c}{N} \le \frac{b}{N}$$

On peut donc choisir N assez grand pour que $c/N \le \delta_1$ et $b/N \le \delta_2$, et alors il suit de $\heartsuit$ que

$$\|\varphi_N'(t) - f(t, \varphi_N(t))\| \le \varepsilon$$

et donc φ_N est une ε-solution.

q.e.d.

2.9 Théorème (existence et unicité locales). *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ un ouvert. Supposons que $[t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b) \subset U$ et que $f \mid [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b)$ soit lipschitzienne en y. Soit*

$$M = \sup\left\{\|f(t, y)\| \mid (t, y) \in [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B}(y_0, b)\right\}$$

Alors, si $0 \le c \le \inf\{a, b/M\}$, l'équation $y' = f(t, y)$ possède une et une seule solution $\varphi : [t_0 - c, t_0 + c] \to \mathbb{R}^n$ avec condition initiale $\varphi(t_0) = y_0$.

Preuve: Soit $N > 0$ un entier; d'après **2.7**, il existe une $\frac{1}{N}$-solution $\varphi_N : [t_0 - c, t_0 + c] \to \mathbb{R}^n$. On va appliquer l'inégalité fondamentale **2.5** pour estimer $\|\varphi_M(t) - \varphi_N(t)\|$: on prend $\varepsilon_1 = \frac{1}{M}$, $\varepsilon_2 = \frac{1}{N}$ et $\delta = 0$:

$$\|\varphi_M(t) - \varphi_N(t)\| \le \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)\frac{1}{k}\left(e^{k|t - t_0|} - 1\right) \le \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{N}\right)\frac{1}{k}\left(e^{kc} - 1\right)$$

Il en suit que $\{\varphi_N\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathcal{C}([t_0-c,t_0+c],\mathbb{R}^n)$, qui est complet, et elle possède donc une limite φ. On a :

$$\|\varphi'_N(t)-f(t,\varphi_N(t))\|\leq\frac{1}{N}\Longrightarrow\left\|\varphi_N(t)-\varphi_N(t_0)-\int_{t_0}^t f(s,\varphi_N(s)ds\right\|\leq\frac{c}{N}\tag{2-2}$$

et puisque $\|f(s,\varphi_N(s))-f(s,\varphi(s))\|\leq k\,\|\varphi_N(s)-\varphi(s)\|$, la suite $f(s,\varphi_N(s))$ converge uniformément vers $f(s,\varphi(s))$, $s\in[t_0-c,t_0+c]$. On peut donc passer à la limite sous le signe intégrale dans (2-2), ce qui donne :

$$\left\|\varphi(t)-y_0-\int_{t_0}^t f(s,\varphi(s))ds\right\|=0\quad\forall\,t\in[t-c,t+c]$$

et donc $\varphi(t)$ est bien solution de l'équation $y'=f(t,y)$, avec conditon initiale (t_0,y_0).

L'unicité suit de **2.7**.

q.e.d.

2.10 Définition. Soit $f:U\to\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ un ouvert. On dit que f est localement lipschitzienne en y si f est continue et si pour tout $(t_0,y_0)\in U$ il existe $a,r>0$ tels que
- $[t_0-a,t_0+a]\times\overline{B}(y_0,r)\subset U$
- $f\mid[t_0-a,t_0+a]\times\overline{B}(y_0,r)\subset U$ est lipschitzienne en y.

En d'autres termes, il existe k tel que $\|f(t,y_1)-f(t,y_2)\|\leq k\,\|y_1-y_2\|$, $\forall t\in[t_0-a,t_0+a]$, $y_1,y_2\in\overline{B}(y_0,r)$.

Par exemple, si f est de classe $\mathcal{C}^1$, on a vu dans l'exemple **2.3(1)** qu'elle est localement lipschitzienne en y.

2.11 Proposition. *Soit $f:U\to\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. Soient $\varphi_1:I_1\to\mathbb{R}^n$ et $\varphi_2:I_2\to\mathbb{R}^n$ deux solutions de l'équation $y'=f(t,y)$. Supposons qu'il existe $t_0\in I_1\cap I_2$ tel que $\varphi_1(t_0)=\varphi_2(t_0)$. Alors*

$$\varphi_1\mid I_1\cap I_2=\varphi_2\mid I_1\cap I_2\quad.$$

et on peut donc recoller φ_1 et φ_2 en une solution $\varphi:I_1\cup I_2\to\mathbb{R}^n$ en posant :

$$t\in I_1\cup I_2\quad,\quad\varphi(t)=\begin{cases}\varphi_1(t)&si\ t\in I_1\\\varphi_2(t)&si\ t\in I_2\end{cases}$$

Preuve: L'ensemble

$$X=\{t\in I_1\cap I_2\mid\varphi_1|[t_0,t]=\varphi|[t_0,t]\}$$

est non vide, car $X\ni t_0$.

Soit donc $\tau_+=\sup(X)\leq+\infty$; si τ_+ est strictement inférieur aux extrêmités droites de I_1 et de I_2, alors $\tau_+<\infty$ et $\varphi_1(\tau_+)=\varphi_2(\tau_+)$; on peut alors appliquer **2.7** sur un petit intervalle $[\tau_+,\tau_++\varepsilon]$ pour conclure que φ_1 et φ_2 coïncident sur cet intervalle, ce qui implique que $\tau_++\varepsilon\in X$, contradiction. Même raisonnement à gauche de t_0; il en suit que φ_1 et φ_2 coïncident effectivement sur $I_1\cap I_2$.

q.e.d.

2.12 Théorème (existence et unicité globales). *$f:U\to\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ localement lipschitzienne. Alors, pour tout $(t_0,y_0)\in U$, l'équation différentielle $y'=f(t,y)$ possède une et une seule solution maximale $\varphi:I\to\mathbb{R}^n$ ayant (t_0,y_0) comme condition initiale. L'intervalle I est ouvert.*

Preuve: Soit $\psi:I_\psi\to\mathbb{R}^n$ une solution; supposons que I soit fermé, borné à droite, et notons par $t_2\in I_\psi$ cette borne. On peut appliquer le théorème d'existence et unicité locales **2.9** pour inférer l'existence d'une solution

$\psi_1 : [t_2-\varepsilon, t_2+\varepsilon] \to \mathbb{R}^n$, avec condition initiale $(t_2, \psi(t_2))$; on peut alors prolonger ψ à $I \cup [t_2-\varepsilon, t_2+\varepsilon[$ en posant :

$$\overline{\psi}(t) = \begin{cases} \psi(t) & \text{si } t \le t_2 \\ \psi_1(t) & \text{si } t \ge t_2 \end{cases} \quad .$$

De même, si I est fermé, borné à gauche par t_1, on peut prolonger ψ à un intervalle de la forme $]t_1-\varepsilon, t_1] \cup I$. Il en suit que si $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution maximale, ou non prolongeable, I doit être un intervalle ouvert.

Posons

$$S = \{\psi : I_\psi \to \mathbb{R}^n \mid I \text{ est ouvert et } \psi \text{ est solution avec conditions initiales } (t_0, y_0)\}$$

On sait par le théorème d'existence de solutions locales que S est non vide. On pose alors $I_{\max} = \cup_{\psi \in S} I_\psi$, et on définit $\varphi : I_{\max} \to \mathbb{R}^n$ ainsi : si $x \in I_{\max}$, il existe ψ tel que $x \in I_\psi$; on pose $\varphi(x) = \psi(x)$. Il suit de la proposition **2.11** que cette définition est cohérente, et il est immédiat que φ est l'unique solution maximale.

q.e.d.

Le résultat suivant nous fournit un renseignement sur le comportement des solutions maximales.

2.13 Théorème. *Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ ouvert, localement lipschitzienne en y, et soit $\varphi :]a, b[\to \mathbb{R}^n$ une solution maximale de l'équation $y' = f(t, y)$. Alors, pour tout compact $K \subset U$ il existe a_K, b_K avec $a < a_K < b_K < b$ tels que $(t, \varphi(t)) \notin K$, $\forall\, t$ tel que $a < t < a_K$ ou $b_K < t < b$.*

Ce que nous dit ce théorème en particulier, c'est que si $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ et $b < \infty$, alors si $t \to b$, $(t, \varphi(t))$ doit sortir de tout compact de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, et donc nécessairement $\|\varphi(t)\| \to \infty$. C'est ce qui se produit dans l'exemple **1.2(1)** lorsque $C > 0$.

Preuve:

1er cas: $b = +\infty$ (ou $a = -\infty$). Dans ce cas, l'affirmation n'apporte rien d'essentiel. En effet, K est borné et donc il existe $R > 0$ tel que $K \subset [-R, +R] \times \mathbb{R}^n$, et alors si $t > R$, $(t, \varphi(t) \notin K$.

2ème cas: $b < \infty$ (ou $a > -\infty$). On procède par l'absurde. Si le b_K de l'énoncé n'existe pas, alors $\forall\, n$, $\exists\, t_n \in [b - 1/n, b]$ tel que $(t_n, \varphi(t_n)) \in K$. Puisque K est compact, on peut extraire une suite t_{n_k} telle que $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}))$ converge vers $(b, y_0) \in K \subset U$. On peut choisir un $c > 0$ tel que les conclusions du théorème d'existence et unicité locales **2.9** soient vraie pout tous les points d'un ouvert V contenant (b, y_0). En particulier, si k est assez grand, $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k})) \in V$, et donc il existe une unique solution $\varphi_k(t)$: $[t_{n_k} - c, t_{n_k} + c] \to \mathbb{R}^n$ avec condition initiale $(t_{n_k}, \varphi(t_{n_k}))$, et par unicité on doit avoir que $\varphi_k(t) = \varphi(t)$ pour $t \in [t_{n_k} - c, t_{n_k} + c]$. Or si l'on choisit k assez grand pour qu'en plus $|b - t_{n_k}| \le c/2$, on pourra prolonger φ au delà de b, ce qui contredit sa maximalité.

q.e.d.

2.14 Complément au théorème d'existence et unicité globales. *Soient $U =]t_1, t_2[\times\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}^n$ continue telle que pour tout τ_1, τ_2 , $t_1 < \tau_1 < \tau_2 < t_2$ il existe k_{τ_1,τ_2} tel que*

$$\|f(t, y_1) - f(t, y_2)\| \le k_{\tau_1,\tau_2} \|y_1 - y_2\| \quad \forall\, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n \text{ et } t \in [\tau_1, \tau_2] \quad .$$

Alors $\forall\, (t_0, y_0) \in]t_1, t_2[\times\mathbb{R}^n$ il existe une et une seule solution $\phi :]t_1, t_2[\to \mathbb{R}^n$ avec conditions initiales (t_0, y_0).

Preuve: Soit $T < t_2$ et $\varphi : [t_0, T[\to \mathbb{R}^n$ une solution de l'équation $y' = f(t, y)$, et soit $y_0 = \varphi(t_0)$. On va appliquer l'inégalité fondamentale pour comparer φ avec la solution constante $\varphi_0 \equiv y_0$; puisque $\varphi_0' \equiv 0$, si $t \in [t_0, T]$:

$$\|\varphi_0' - f(t, \varphi_0)\| \le M = \sup\{\|f(t, y_0)\| \ , \ t \in [t_0, T]\}$$

et en appliquant l'inégalité fondamentale avec $\varepsilon = M$, $\delta = 0$, $k = k_{t_0,T}$ il vient :

$$\|\varphi(t) - y_0\| \le M \frac{\left(e^{k(T-t_0)} - 1\right)}{k} \quad \forall\, t \in [t_0, T[$$

ce qui implique que $\varphi(t)$ est bornée sur $[t_0, T[$, donc pas maximale, d'après **2.13**. Avec un argument symétrique à gauche de t_0, on voit finalement que les solutions maximales doivent être définies sur $]t_1, t_2[$.

q.e.d.

Ce complément sera utilisé au § 3.1 ci-dessous.

Le théorème suivant est une conséquence facile de l'inégalité fondamentale et du théorème **2.13**.

2.15 Théorème (dépendance continue par rapport aux conditions initiales et aux paramètres). *Soit* $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *encore et toujours un ouvert,* f *localement lipschitzienne en* y. *Soit* $(t_0, y_0) \in U$, $\varphi_{(t_0,y_0)} : I_{(t_0,y_0)} \to \mathbb{R}^n$ *la solution maximale ayant* (t_0, y_0) *comme condition initiale. Alors, pour tout intervalle fermé, borné* $I \subset I_{(t_0,y_0)}$, $I \ni t_0$ *et pour tout* $\varepsilon > 0$, *il existe* $\delta^1_\varepsilon, \delta^2_\varepsilon > 0$ *tels que si* $|t_1 - t_0| < \delta^1_\varepsilon$ *et* $\|y_1 - y_0\| < \delta^2_\varepsilon$, *si* $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *désigne la solution maximale de conditions initiales* (t_1, y_1), *on a :*

i) $I_1 \supset I$

ii) $\|\varphi_1(t) - \varphi(t)\| < \varepsilon$, $\forall\, t \in I$.

Preuve: On note φ_0 la solution avec condition initiale (t_0, y_0), et I_{t_0,y_0} son intervalle (ouvert) de définition. Soit $I \subset I_{(t_0,y_0)}$ fermé, borné et soit $\varepsilon > 0$. Pour $\varepsilon' \leq \varepsilon$, $\varepsilon' > 0$, posons :

$$K_{\varepsilon'} = \{(t, y) \in I \times \mathbb{R}^n \mid \|y - \varphi(t)\| \leq \varepsilon'\} \quad .$$

$K_{\varepsilon'}$ est compact, et pour ε' ssez petit, $K_{\varepsilon'} \subset U$. Soient $\delta_1, \delta_2 > 0$ suffisamment petits pour que

$$|t1 - t_0| < \delta_1 \, , \, \|y_1 - y_0\| < \delta_2 \Rightarrow (t_1, y_1) \in U \quad .$$

Soit $\varphi_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ la solution maximale de condition initiale (t_1, y_1) et soit $M = \sup\{\|f(t, x)\| \mid (t, y) \in K_{\varepsilon'}\}$. Si δ_1 est assez petit, pour s entre t_0 et t_1 on aura $(s, \varphi_1(s)) \in K_{\varepsilon'}$ et alors :

$$\|\varphi_1(t_1) - \varphi(t_0)\| = \left\| \int_{t_0}^{t_1} f(s, \varphi_1(s)) ds \right\| \leq M \cdot |t_1 - t_0| \leq M \cdot \delta_1 \quad .$$

Il suit alors de l'inégalité fondamentale que

$$\text{(2-3)} \qquad \|\varphi_1(t) - \varphi_0(t)\| \leq (\delta_2 + M\delta_1) e^{k(b-t_0)} \quad , \quad t \in I \cap I_1$$

où b désigne l'extrémité droite de I. Choisissons δ_1, δ_1 assez petits pour que $(\delta_1 + \delta_1 M) e^{k(b-t_0)} < \varepsilon'$. Il suit alors de (2-3) que $(t, \varphi_1(t)) \in K_{\varepsilon'}$ si $t \in I_1$, $t < b$ et il suit de **2.13** que $I_1 \supset [t_0, b]$; même raisonnement pour l'extrémité gauche de I. L'affirmation ii) suit aussi de (2-3).

q.e.d.

Définissons le flot Φ de l'équation par :

$$\Omega = \left\{(t_0, x_0, t) \in U \times \mathbb{R} \mid t \in I_{(t_0,y_0)}\right\} \text{ et } \Phi : \Omega \to \mathbb{R}^n \quad , \quad \Phi(t_0, x_0, t) = \varphi_{(t_0,x_0)}(t)$$

Φ est la famille de toutes les solutions maximales. Le corollaire suivant est une conséquence immédiate du théorème précédent.

2.16 Corollaire. Ω *est un ouvert et* Φ *est continue.*

3. Equations différentielles linéaires

3.1 Résultats généraux

Un sytème de n équations linéaires d'ordre 1 s'écrit

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{1,1}(t)y_1 + \cdots + a_{1,n}(t)y_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ y_n' &= a_{n,1}(t)y_1 + \cdots + a_{n,n}(t)y_n + b_n(t) \end{aligned}$$

où les $a_{i,j}$, $i,j = 1,\ldots,n$ et les b_i, $i = 1,\ldots,n$ sont des applications continues d'un intervalle I dans $\mathbb{R}$. Si l'on pose

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad , \quad A(t) = (a_{i,j}(t)) : I \to M(n,n,\mathbb{R}) \quad , \quad b(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix} : I \to \mathbb{R}^n$$

où $M(n,n,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$, alors on peut écrire le système de façon plus succinte:

$$y' = A(t)(y) + b(t) \quad .$$

Si $b(t)$ est identiquement nulle on parle de système *homogène*, sinon de système *inhomogène* ou *non homogène*.

Si $[\tau_1, \tau_2] \subset I$,

$$\left\| A(t)(y_1) + b(t) - \big(A(t)(y_2) + b(t)\big) \right\| \le \|A(t)\| \, \|y_1 - y_2\| \le \sup\left\{ \|A(t)\|, t \in [\tau_1, \tau_2] \right\} \|y_1 - y_2\|$$

et donc il suit de **2.14** que les solutions maximales sont définies sur I tout entier. La structure de l'espace des solutions maximales d'une équation linéaire est très simple, comme les deux résultats suivants nous le montrent.

3.1 Théorème. *L'ensemble S des solutions maximale du système linéaire homogène $y' = A(t)(y)$, où $A : I \to M(n,n,\mathbb{R})$ est continue, est un sous-espace vectoriel de dimension n de l'espace vectoriel de toutes les applications de I dans $\mathbb{R}$.*

Preuve: Soit S l'epace des solutions de $y' = A(t)(y)$. Si φ_1 et φ_2 sont des solutions maximales et λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, on vérifie immédiatement que $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$ est aussi une solution, ce qui fait que S est bien un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les applications de I dans $\mathbb{R}^n$. Choisissons $t_0 \in I$ et définissons $ev : S \to \mathbb{R}^n$ par $ev(\varphi) = \varphi(t_0)$, i.e. ev est l'évaluation en t_0. Alors ev est une application linéaire et il suit de **2.12** que ev est un isomorphisme:

- ev est injective parce que si $\varphi_1(t_0) = \varphi_2(t_0) = y_0$, alors φ_1 et φ_2 sont deux solutions maximales avec mêmes conditions initiales et donc coïncident.
- ev est surjective parce que si $y_0 \in \mathbb{R}^n$ il existe $\varphi \in S$ avec condition initiale (t_0, y_0), c'est-à-dire que $ev(\varphi) = y_0$.

q.e.d.

Une base $\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)$ de S est appelée un système fondamental de solutions.

3.2 Proposition. *Soit $y' = A(t)(y) + b(t)$ une équation linéaire non homogène, $A : I \to M(n,n,\mathbb{R})$ et $b : I \to \mathbb{R}^n$ continues. Si $\theta : I \to \mathbb{R}^n$ est une solution particulière de cette équation, toute autre solution est de la forme $\varphi(t) + \theta(t)$, où $\varphi(t)$ est une solution de l'équation linéaire homogène associée: $y' = A(t)(y)$.*

Preuve: Si $\theta_1(t)$ est une solution du système non homogène, alors en posant $\varphi(t) = \theta(t) - \theta_1(t)$ on a

$$\varphi'(t) = \theta'(t) - \theta_1'(t) = A(t)(\theta(t)) + b(t) - \Big(A(t)(\theta_1(t)) + b(t)\Big) = A(t)\left(\theta(t) - \theta_1(t)\right) = A(t)(\varphi(t))$$

ce qui montre que $\varphi(t)$ est solution du système homogène, et $\theta_1 = \theta + \varphi$.

q.e.d.

Voyons comment trouver les solutions d'un système non homogène à partir d'un système fondamental $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ de solutions du système homogène (méthode dite de la variation des constantes). Soit $\Phi(t) : I \to M(n, n, \mathbb{R})$ la matrice dont la j-ème colonne est le vecteur $\varphi_j(t)$:

$$\Phi(t) = \left(\varphi_j^i(t)\right)_{i,j=1,\ldots,n}, \text{ où } \varphi_j(t) = \begin{pmatrix} \phi_j^1(t) \\ \vdots \\ \varphi_j^n(t) \end{pmatrix} \quad .$$

Alors on a:

1) $\Phi'(t) = A(t) \cdot \Phi(t)$ (produit matriciel) parce que les $\varphi_i(t)$ sont des solutions.

2) $\Phi(t)$ est inversible pour tout $t \in I$, car si $\Phi(t_0)(C) = 0$, où $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$, cela veut dire que $\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t_0) = 0$. Donc $\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t)$ est la solution avec conditions initiales $(t_0, 0)$, tout comme la solution identiquement nulle. Par unicité des solutions maximales, on a donc que $\sum_{i=1}^n c_i\varphi_i(t) = 0$ $\forall\, t \in I$ et puisque les $\varphi_i(t)$ sont linéairement indépendantes, on doit avoir $c_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$.

On cherche des solutions de la forme $\theta(t) = \Phi(t) \cdot C(t)$, où $C : I \to \mathbb{R}^n$. On a :

$$\theta'(t) = \Phi'(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t)$$

et on aimerait que

$$\theta'(t) = A(t)(\theta(t)) + b(t)$$

c'est-à-dire:

$$A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + \Phi(t) \cdot C'(t) = A(t) \cdot \Phi(t) \cdot C(t) + b(t) \Rightarrow C'(t) = \Phi(t)^{-1} \cdot b(t)$$

Donc $C(t)$ doit être une primitive de l'application $\Phi(t)^{-1} \cdot b(t) : I \to \mathbb{R}^n$. En refaisant le chemin à l'envers, on voit réciproquement que pour toute primitive $C(t)$ de $\Phi(t)^{-1}b(t)$, $\Phi(t)C(t)$ est solution de l'équation non homogène (ajouter une constante $C \in \mathbb{R}^n$ à une primitive $C(t)$ équivaut à ajouter à $\theta(t)$ la solution $\Phi(t) \cdot C$ du système homogène).

3.2 Complexification

Soit $M(n,n,\mathbb{C})$ l'espace des $n\times n$ matrices à coefficients complexes. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$:

$$\psi:\mathbb{C}^n\to\mathbb{R}^{2n}\quad,\quad (x_1+iy_1,\ldots,x_n+iy_n)\mapsto(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_n)\quad .$$

Si $C:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$ est une application $\mathbb{C}$-linéaire, on en déduit une application $\mathbb{R}$-linéaire $C_{\mathbb{R}}:\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^{2n}$ de sorte que le diagramme suivant commute:

$$\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^n & \xrightarrow{C} & \mathbb{C}^n\\ \downarrow & & \downarrow\\ \mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{C_{\mathbb{R}}} & \mathbb{R}^{2n}\end{array}$$

c'est à dire: $C_{\mathbb{R}}=\psi^{-1}C\psi$. En termes de matrices, si $C=(\alpha_{k,\ell}+i\beta_{k,\ell})$ et $A=(\alpha_{k,\ell})$, $B=(\beta_{k,\ell})$ on vérifie que:

$$C_{\mathbb{R}}=\begin{pmatrix}A & -B\\ B & A\end{pmatrix}\quad .$$

D'autre part, on a une inclusion naturelle

$$M(n,n,\mathbb{R})\subset M(n,n,\mathbb{C})$$

induite par l'inclusion $\mathbb{R}\hookrightarrow\mathbb{C}$, $x\mapsto x+i\cdot 0$ et donc si l'on a une application $\mathbb{R}$-linéaire $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, on en déduit une application $\mathbb{C}$-linéaire $A_{\mathbb{C}}:\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n$.

Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $C:I\to M(n,n,\mathbb{C})$ une application continue; on peut regarder l'équation linéaire correspondante:

$$y'=C(t)y\quad .$$

En passant à $C_{\mathbb{R}}$ on voit que l'on peut lui appliquer les résultats du § **3.1** : les solutions maximales sont définies sur tout I, à valeurs dans $\mathbb{C}^n$, et forment un sous-espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{R}$ de l'espace de toutes les applications de I dans $\mathbb{C}^n$. Mais il suit immédiatement du fait que $C(t)$ est $\mathbb{C}$-linéaire que l'espace des solutions est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, et il devra donc être de dimension n sur $\mathbb{C}$.

Si $\varphi\ \underline{:\ I}\to\mathbb{C}$ est une application, on définit sa conjuguée $\overline{\varphi}$ comme étant l'application qui envoit $t\in I$ sur $\overline{\varphi(t)}$, c'est-à-dire le complexe conjugué de $\varphi(t)$. On définit de même $Re(\varphi)$ et $Im(\varphi)$ en prenant respectivement les parties réelles et imaginaires de $\varphi(t)$, $t\in I$.

3.3 Proposition. *Soit $A:I\to M(n,n,\mathbb{R})$ continue, $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soient $S_{\mathbb{R}}$ l'espace des solutions de $y'=A(t)y$, $S_{\mathbb{C}}$ l'espace des solutions de $y'=A_{\mathbb{C}}(t)y$. Alors*

1) si $\varphi\in S_{\mathbb{C}}$, alors $\overline{\varphi}\in S_{\mathbb{C}}$.

2) $S_{\mathbb{R}}=\{\varphi\in S_{\mathbb{C}}\mid\varphi=\overline{\varphi}\}$.

3) Si $\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in S_{\mathbb{C}}$ forment une $\mathbb{C}$-base de $S_{\mathbb{C}}$, alors les $Re(\varphi_i)$, $Im(\varphi_i)$, $i=1,\ldots,n$ engendrent $S_{\mathbb{R}}$ sur $\mathbb{R}$

La preuve de cette proposition est immédiate et elle est laissée au lecteur.

3.4 Exemple.

Reprenons l'équation de l'exemple **1.4(2)**:

$$\begin{array}{l}y_1'=-y_2\\ y_2'=y_1\end{array}\ ,\ \text{soit } y'=A(y) \text{ où } y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}\ ,\ A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad .$$

Puisque $\text{dét}(A-\lambda I)=\lambda^2+1$, A admet $\pm i$ comme valeurs propres. On vérifie que $v=\begin{pmatrix}i\\ 1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de valeur propre i : $A(v)=i\cdot v$. Il en suit que $\phi(t)=e^{it}\cdot v$ est solution; en effet :

$$\left(e^{it}\cdot v\right)'=ie^{it}\cdot v=A(e^{it}\cdot v)\quad .$$

Donc $Re(e^{it}v)=\begin{pmatrix}-sin(t)\\ cos(t)\end{pmatrix}$ et $Im(e^{it}v)=\begin{pmatrix}cos(t)\\ sin(t)\end{pmatrix}$ sont solutions réelles, et on vérifie qu'elles sont linéairement indépendantes; elles forment donc une base des solutions réelles de l'équation.

3.3 Equation linéaire d'ordre n à coefficients constants

Il s'agit de l'équation:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0 \quad , \quad a_i \in \mathbb{R} \text{ ou } a_i \in \mathbb{C} \quad . \tag{3-1}$$

On ramène cette équation d'ordre n à un système d'équations d'ordre 1 par la procédé général décrit au §1. On pose:

$$y_1 = x \quad , \quad y_2 = x' \quad , \quad y_n = x^{(n-1)}$$

et on obtient le système équivalent:

$$\begin{gathered} y_1' = y_2 \quad , \quad y_2' = y_3 \quad , \quad \ldots , \quad y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = -a_1 y_n - a_2 y_{n-1} - \cdots - a_n y_1 \end{gathered}$$

soit, sous forme matricielle:

$$y' = A\,y \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \\ -a_n & & \cdots & & -a_1 \end{pmatrix} \quad . \tag{3-2}$$

Si $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, respectivement $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, est une solution de (3-2) avec condition initiales $\varphi(t_0) = y_0 = (y_{01}, \ldots, y_{0n})$, alors la première composante $\varphi_1(t)$ de $\varphi(t)$ est solution de l'équation de départ (3-1), et les conditions initiales peuvent s'écrire:

$$\varphi_1(t_0) = y_{01} \, , \, \varphi_1'(t_0) = y_{02} \, , \, \ldots , \, \varphi^{(n-1)} = y_{0n} \quad .$$

Les solutions forment donc encore un espace vectoriel de dimension n (respectivement sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Aussi, on peut parler de la complexifiée de l'équation (3-1) dans le cas où $a_i \in \mathbb{R}$, ce qui revient à regarder les a_i comme des complexes à partie imaginaire nulle.

A une équation du type (3-1) on associe le polynôme à coefficients réels (respectivement complexes):

$$p(\lambda) = a_1 \lambda^n + a_2 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n$$

que l'on appelle polynôme caractéristique de l'équation. On voit facilement que $p(\lambda) = \text{dét}(A - \lambda I)$, où A est la matrice de **(3-2)** et I denote la matrice de l'identité. Que l'on soit dans le cas $a_i \in \mathbb{R}$ ou $a_i \in \mathbb{C}$, on considère les racines complexes distinctes $\lambda_i \in \mathbb{C}$, $i = 1, \ldots, m$ et on dénote par α_i la multiplicité de λ_i. On aura alors:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad , \quad \alpha_1 + \cdots + \alpha_m = n \quad .$$

Le théorème suivant donne une description complète des solutions de l'équation **(3-1)** (ou de sa complexifiée) à partir des racines du polynôme caractéristique et de leur multiplicité.

3.5 Théorème. *Supposons que le polynôme caractéristique $p(\lambda)$ de l'équation $x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0$ s'écrive sous la forme*

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{\alpha_1} \cdots (\lambda - \lambda_m)^{\alpha_m} \quad , \quad \lambda_i \in \mathbb{C} \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \text{ pour } i \neq j \quad .$$

Alors les n fonctions

$$t^j e^{\lambda_i t} \quad , \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, m$$

forment une base du $\mathbb{C}$-espace vectoriel des solutions de l'équation.

Preuve: A tout polynôme $q(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell \lambda^\ell$ on peut associer une application linéaire $q(D)$ de l'espace $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ des applications $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, dans lui-même, en posant:

$$q(D)(\varphi) = \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell \varphi^{(\ell)} \quad .$$

Si l'on désigne encore par $D : \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ l'opération de dérivation, on peut encore écrire $q(D) = \sum_{\ell=0}^{k} b_\ell D^\ell$, où $D^0 = I =$ identité. On voit que $D \cdot q(D) = q(D) \cdot D$, et de là on déduit que si $r(\lambda)$ est un autre polynôme, $q(D)r(D) = r(D)q(D)$. En particulier, pour tout $i = 1, \ldots, m$ on peut écrire:

$$p(D) = q_i(D)(D - \lambda_i I)^{\alpha_i} \quad , \quad \text{où} \quad q_i(\lambda) = \prod_{j \neq i} (\lambda - \lambda_j)^{\alpha_j} \quad .$$

Notre équation peut s'écrire:

$$p(D)(x) = 0 \quad .$$

Vérifions que les fonctions $t^j e^{\lambda_i t}$, $0 \leq j \leq \alpha_i - 1$ sont solutions de l'équation. Du fait que

$$(D - \lambda_i I)(t^j e^{\lambda_i t}) = j t^{j-1} e^{\lambda_i t} + t^j \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i t^j e^{\lambda_i t} = j t^{j-1} e^{\lambda_i t} \qquad \text{si } j \geq 1$$

et $(D - \lambda_i I)(e^{\lambda_i t}) = \lambda_i e^{\lambda_i t} - \lambda_i e^{\lambda_i t} = 0$ on déduit que

$$(D - \lambda_i I)^{\alpha_i}(t^j e^{\lambda_i t}) = 0 \quad \text{si } j \leq \alpha_i - 1$$

et donc

$$p(D)(t^j e^{\lambda_i t}) = q_i(D)(D - \lambda_i I)^{\alpha_i}(t^j e^{\lambda_i t}) = 0 \quad \text{si } j \leq \alpha_i - 1 \quad .$$

Reste à voir que les $t^j e^{\lambda_i t}$, $0 \leq j \leq \alpha_i - 1$, $i = 1, \ldots, m$ sont linéairement indépendantes, c'est-à-dire que s'il existe $a_{i,j} \in \mathbb{C}$ tels que $\sum_{0 \leq j < \alpha_i,\, 1 \leq i \leq m} a_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} = 0$, alors $a_{i,j} = 0 \, \forall \, i, j$. Or

$$\sum_{0 \leq j < \alpha_i,\, 1 \leq i \leq m} a_{i,j} t^j e^{\lambda_i t} = \sum_{1 \leq i \leq m} P_i(t) e^{\lambda_i t}$$

où les $P_i(t) = \sum_{0 \leq j < \alpha_i} a_{i,j} t^j$ sont des polynômes. L'indépendance linéaire de ces solutions résultera donc du lemme ci-dessous.

q.e.d.

3.6 Lemme. *Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, et soient $P_i(t)$ des polynômes à coefficients dans $\mathbb{C}$. Si*

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0$$

alors $P_i(t) \equiv 0$ pour tout $i = 1, \ldots, k$.

Preuve: Par induction sur k. Si k=1, l'égalité

$$P_1(t) e^{\lambda_1 t} \equiv 0$$

entraîne $P_1(t) \equiv 0$, parce l'exponentielle ne s'annulle jamais.

Supposons $k > 1$ et montrons que si le résultat est vrai pour $k - 1$ il l'est aussi pour k. Dans l'égalité

$$\sum_{i=1}^{k} P_i(t) e^{\lambda_i t} \equiv 0$$

divisons par $e^{\lambda_1 t}$. On obtient:

$$P_1(t) + \sum_{i=2}^{k} P_i(t)e^{\mu_i t} \equiv 0 \tag{3-3}$$

où $\mu_i = \lambda_i - \lambda_1$, $i = 2, \ldots, k$. On a que $\mu_i \neq 0$, $i = 2, \ldots, k$ et $\mu_i - \mu_j \neq 0$ si $i \neq j$. En dérivant (3-3) on obtient:

$$P_1'(t) + \sum_{i=2}^{k} (\mu_i P_i(t) + P_i'(t))e^{\mu_i t} \equiv 0$$

et en dérivant ℓ-fois on obtient une égalité de la forme:

$$P_1^{(\ell)}(t) + \sum_{i=2}^{k} (\mu_i^\ell P_i(t) + Q_i(t))e^{\mu_i t} \equiv 0 \tag{3-4}$$

où $Q_i(t)$ est un polynôme de degré strictement inférieur au degré de $P_i(t)$ si $P_i \not\equiv 0$. Si l'on prend $\ell =$ degré$(P_1) + 1$ on aura que $P_1(t)^{(\ell)} \equiv 0$ et il suit alors de (3-4) et de l'hypothèse d'induction que

$$\mu_i^\ell P_i(t) + Q_i(t) \equiv 0 \quad , \quad i = 2, \ldots, k$$

Puisque Q_i doit être de degré strictement inférieur au degré de P_i, on a que $P_i \equiv 0$, $i = 2, \ldots, k$, et en remplaçant dans (3-4) on voit que $P_1 \equiv 0$.

q.e.d.

3.7 Remarque. Le théorème **3.5** nous donne en fait les solutions à valeurs dans $\mathbb{C}$ de l'équation, même si l'on est dans le cas où les coefficients a_i sont réels. Dans ce cas on peut trouver une base de l'espace vectoriel $S_\mathbb{R}$ des solutions réelles de la manière suivante; si les a_i sont réels, les racines du polynôme caractéristique peuvent être énumérées ainsi :

$$\lambda_1 \, , \, \overline{\lambda}_1, \ldots, \lambda_k \, , \, \overline{\lambda}_k, \, \lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_h$$

avec $\lambda_i \neq \overline{\lambda}_i$, $i = 1, \ldots, k$, et $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = k+1, \ldots, h$. On pose encore $\alpha_i =$ multiplicité de λ_i, et on remarque que la multiplicité de $\overline{\lambda}$ est égale à la multiplicité de λ, de sorte que

$$n = 2(\alpha_1 + \cdots + \alpha_k) + \alpha_{k+1} + \cdots + \alpha_h \quad .$$

On sait d'après **3.3** que $S_\mathbb{R}$ est engendré par

$$\left.\begin{array}{lcl} Re(t^j e^{\lambda_i t}) & , & Im(t^j e^{\lambda_i t}) \\ \quad \| & & \\ Re(t^j e^{\overline{\lambda}_i t}) & , & Im(t^j e^{\overline{\lambda}_i t}) = -Im(t^j e^{\lambda_i}) \end{array}\right\} \quad i = 1, \ldots, k \quad , \quad 0 \leq j \leq \alpha_i - 1$$

$$\text{et} \quad t^j e^{\lambda_i t} \quad i = k+1, \ldots, h \quad .$$

Il suffit donc de prendre les n fonctions

$$\begin{array}{c} Re(t^j e^{\lambda_i t}) \quad , \quad Im(t^j e^{\lambda_i t}) \quad , \quad i = 1, \ldots, k \, , \, 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \\ te^{\lambda_i t} \quad , \quad i = k+1, \ldots, h \, , \, 0 \leq j \leq \alpha_i - 1 \end{array}$$

pour engendrer $S_\mathbb{R}$; comme cet espace est de dimension n, cette dernière liste de fonctions est une base de l'espace vectoriel $S_\mathbb{R}$.

3.8 Définition. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On appelle quasi-polynôme de degré ℓ et d'exposant λ toute fonction de la forme $P(t)e^{\lambda t}$, où $P(t)$ est un polynôme de degré au plus ℓ à coefficients complexes. On denote par Q_λ^ℓ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de ces fonctions.

On parle de quasi-polynôme réel si λ et les coefficients de $P(t)$ sont réels.

Notons que Q_λ^ℓ admet comme base les $\ell+1$ fonctions: $e^{\lambda t}$, $te^{\lambda t}$, ..., $t^\ell e^{\lambda t}$. Le théorème suivant permet de ramener la construction d'une solution particulière d'une équation linéaire d'ordre n dont le second membre est un quasi-polynôme à la résolution d'une équation (algébrique) linéaire.

3.9 Théorème. *L'équation*

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = e^{\lambda t} b(t) \tag{3-5}$$

où $b(t)$ est un polynôme de degré ℓ a pour solution particulière un unique quasi-polynôme de la forme

$$t^\nu c(t) e^{\lambda t}$$

où $c(t) = c_0 + c_1 \cdot t + \cdots + c_\ell \cdot t^h$ est un polynôme de degré ℓ et ν est la multiplicité de λ en tant que racine du polynôme caractéristique de l'équation (3-6)*: $p(t) = t^n + a_1 t^{n-1} + \cdots + a_n$ (si λ n'est pas une racine de $p(t)$, on pose $\nu = 0$). Plus précisément, l'equation linéaire*

$$p(D)(t^\nu c(t) e^{\lambda t}) = e^{\lambda t} b(t) \quad ,$$

dans laquelle les inconnues sont les $\ell+1$ coefficients $c_0, \ldots, c_\ell$ de $c(t)$, est de rang maximum.

Ce theorème est une conséquence immédiate du lemme suivant:

3.10 Lemme. *L'application linéaire*

$$p(D) : Q_{\lambda+\nu}^\ell \to Q_\lambda^\ell$$

est surjective et son noyau est:

$$\mathrm{Ker}(p(D)) = \left\{ \sum_{j=0}^{\nu-1} c_j t^j e^{\lambda t} \;\middle|\; 0 \le j \le \nu - 1 \,,\, c_i \in \mathbb{C} \right\} \quad .$$

Preuve: Puisque

$$D(t^j e^{\lambda t}) = \begin{cases} t^{j-1} e^{\lambda t} + t^j \lambda e^{\lambda t} & \text{si } j > 0 \\ \lambda e^{\lambda t} & \text{sinon} \end{cases} \tag{3-6}$$

on a bien que $p(D)$ envoit Q_λ^ℓ dans lui-même.

Supposons d'abord que $p(\lambda) \neq 0$ et essayons de décrire la matrice de $p(D) : Q_\lambda^\ell \to Q_\lambda^\ell$ dans la base $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \ldots, t^\ell e^{\lambda t}$. Il suit de (3-6) que la matrice de D s'écrit:

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

d'où on voit que

$$D^i = \begin{pmatrix} \lambda^i & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda^i \end{pmatrix}$$

et donc

$$p(D) = \begin{pmatrix} p(\lambda) & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & p(\lambda) \end{pmatrix}$$

Il s'en suit que $\text{dét}(p(D)) \neq 0$, et donc $p(D)$ est un isomorphisme, ce qui démontre le lemme dans ce cas.

Si $\nu > 0$, on peut écrire $p(D) = q(D)(D - \lambda I)^\nu$, où $q(t)$ est un polynôme de degré $n - \nu$, avec $q(\lambda) \neq 0$. D'après la première partie de cette preuve, $q(D)$ est un isomorphisme, et il suit de **3.5** que le noyau de $(D - \lambda I)^\nu$ est engendré par les $e^{\lambda t}$, $0 \leq j \leq \nu - 1$. Puisque $p(D) = q(D)(D - \lambda I)^\nu$ et que $q(D)$ est un isomorphisme, le noyau de $p(D)$ et celui de $(D - \lambda I)^\nu$ coïncident, et le lemme en suit aussitôt.

q.e.d.

3.11 Exemple.
Considérons l'équation

$$y'' - y = te^t \quad . \tag{3-7}$$

Ici $\lambda = 1$, $p(t) = t^2 - 1$ et $p(1) = 0$, avec $\nu = 1$. D'après **3.9** on a une solution particulière $\phi(t)$ de la forme:

$$\phi(t) = te^t(c_0 + c_1 t)$$

On a:

$$\phi'(t) = e^t\Big(c_0 + 2c_1 t + c_1 t^2\Big) \text{ et } \phi''(t) = e^t\Big(2c_0 + 2c_1 + (c_0 + 4c_1)t + c_1 t^2\Big) \quad .$$

En remplaçant dans (3-7) on obtient le système de 2 équations linéaires:

$$4c_1 = 1 \quad , \quad 2c_0 + 2c_1 = 0$$

d'où l'on tire que $c_0 = 1/4$, $c_1 = -1/4$ et donc $\phi(t) = te^t(t-1)/4$. Pour avoir le système complet des solutions, il faut ajouter à $\phi(t)$ une solution quelconque de l'équation homogène $y'' - y = 0$.

3.4 Systèmes linéaires à coefficients constants

Considérons l'équation

$$y' = A(y) \tag{3-8}$$

où $A \in M(n,n,\mathbb{R}$ ou $M(n,n,\mathbb{C})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{C}^n$) une solution et supposons qu'elle soit indéfiniment dérivable. En dérivant (3-8) et en substituant on obtient:

$$\begin{aligned}\varphi''(t) &= A(\varphi'(t)) = A(A(\varphi(t)) = A^2(\varphi(t))\\ &\vdots\\ \varphi^{(k)}(t) &= A^k(\varphi(t))\end{aligned}$$

où $A^k = \underbrace{A\cdots A}_{k-\text{fois}}$ est le produit matriciel de A k-fois avec elle-même. La série de Taylor de $\varphi(t)$ en t_0 s'écrit donc, en posant $\varphi(t_0) = y_0$:

$$y_0 + A(y_0)(t-t_0) + \frac{1}{2!}A^2(y_0)(t-t_0)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k(y_0)(t-t_0)^k + \cdots$$

ce qui ressemble à la série de Taylor d'une exponentielle (c'est même exactement le cas pour $n = 1$). Ceci nous incite à généraliser la fonction exponentielle comme suit.

3.12 Proposition. *Soit $A \in M(n,n,\mathbb{C})$. La suite*

$$s_k(A) = I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \cdots + \frac{1}{k!}A^k$$

converge dans $M(n,n,\mathbb{C})$, uniformément sur toute boule $\{A \mid \|A\| \le r\}$.

Preuve: Supposons que $\|A\| \le r$. Puisque $\left\|A^k\right\| \le \|A\|^k$, on a:

$$\|s_{k+\ell} - s_k\| \le \frac{1}{k!}\|A\|^k + \cdots + \frac{1}{(k+\ell)!}\|A\|^{k+\ell} \le \sum_{h=k}^{k+\ell}\frac{1}{h!}r^h \quad . \tag{3-9}$$

Or la série de nombre réels $\sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}r^h$ converge vers l'exponentielle ordinaire e^r, donc elle satisfait la condition de Cauchy:

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon \text{ tel que } k \ge K_\varepsilon \Rightarrow \sum_{h=k}^{k+\ell}\frac{1}{h!}r^h < \varepsilon \quad \forall\, \ell \ge 0$$

et en remplaçant dans (3-9) :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists K_\varepsilon \text{ tel que } k \ge K_\varepsilon \Rightarrow \|s_{k+\ell}(A) - s_k(A)\| < \varepsilon \quad \forall\, \ell \ge 0$$

ce qui veut dire que $s_k(A)$ satisfait la condition d'être une suite de Cauchy uniformément en A, pour $\|A\| \le r$. Puisque $M(n,n,\mathbb{C})$ est complet (comme tout espace vectoriel normé de dimension finie), le résultat en suit aussitôt.

q.e.d.

La proposition précédente nous autorise à poser:

$$e^A = \lim_{k\to\infty} s_k(A) = \sum_{h=0}^{\infty}\frac{1}{h!}A^h$$

et cela définit une application

$$e : M(n,n,\mathbb{C}) \to M(n,n,\mathbb{C}) \quad , \quad A \mapsto e^A$$

que l'on appelle exponentielle de matrices. Notons que si $A \in M(n,n,\mathbb{R})$, alors $e^A \in M(n,n,\mathbb{R})$.

3.13 Exemples.

(1) Soient $A \in M(m,m,\mathbb{C})$ et $B \in M(n,n,\mathbb{C})$, et considérons la matrice de $M(m+n,m+n,\mathbb{C})$: $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
On vérifie aisément que

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} A^k & 0 \\ 0 & B^k \end{pmatrix}$$

et de là il suit que

$$e^{\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^A & 0 \\ 0 & e^B \end{pmatrix} \quad .$$

On en déduit que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, l'exponentielle de la matrice diagonale :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

est égale à

$$\begin{pmatrix} e^{\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

(2) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On vérifie que $A^2 = 0$, et donc

$$e^A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2}_{=0} + 0 + \dots = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

De même, si $N \in M(n,n,\mathbb{C})$, et $N^k = 0$, alors

$$e^N = I + N + \dots + \frac{1}{(k-1)!} N^{k-1} \quad .$$

Dans l'exemple **(1)** on voit que l'exponentielle d'une matrice diagonale se ramène à l'exponentielle ordinaire. Dans l'exemple **(2)** il en va tout autrement : l'exponentielle d'une matrice nilpotente (i.e. dont une puissance est nulle) se calcule par un nombre fini d'opérations d'addition et multiplication.

Une propriété importante de l'exponentielle ordinaire est de transformer la somme en produit: $e^{a+b} = e^a e^b$. Cela reste vrai si on remplace a et b par des matrices A et B qui commutent (mais ce n'est pas vrai en général, voir plus loin l'exemple **3.18**) :

3.14 Proposition. *Soient A, $B \in M(n,n,\mathbb{C})$ et supposons que*

$$AB = BA \quad .$$

Alors

$$e^{A+B} = e^A e^B \quad .$$

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant, de nature plutôt technique :

3.15 Lemme. *Soient* $\{A_i\}_{i=0,\ldots,\infty}$ *et* $\{B_j\}_{j=0,\ldots,\infty}$, $A_i, B_j \in M(n,n,\mathbb{C})$ *deux suites de matrices. Alors si*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \|A_i\| < \infty \text{ et } \sum_{j=0}^{\infty} \|B_j\| < \infty$$

on a que

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} B_j\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i+j=k} A_i B_j\right) \quad .$$

Preuve: Posons

$$W_n = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i+j=k} A_i B_j\right) \text{ et } w_k = \sum_{i+j=k} \|A_i\|\,\|B_j\| \quad .$$

Puisque

$$\sum_{k=0}^{n} w_k = \sum_{k=0}^{n}\sum_{i+j=k} \|A_i\|\,\|B_j\| \le \left(\sum_{i=0}^{n}\|A_i\|\right)\left(\sum_{j=0}^{n}\|B_j\|\right) \le \left(\sum_{i=0}^{\infty}\|A_i\|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\|B_j\|\right) < \infty$$

la suite W_n converge. D'autre part :

$$\left\| W_{2n} - \left(\sum_{i=0}^{n} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{n} B_j\right)\right\| = \left\|\sum_{\substack{i,j>n \\ i+j\le 2n}} A_i B_j\right\| \le \sum_{\substack{i,j>n \\ i+j\le 2n}} \|A_i\|\,\|B_j\|$$

$$\le \sum_{i+j\le 2n} \|A_i\|\,\|B_j\| - \sum_{i+j\le n} \|A_i\|\,\|B_j\| = W'_{2n} - W'_n$$

où $W'_n = \sum_{k=0}^{n} w_k$. Mais $\lim_{n\to\infty}(W'_{2n} - W'_n) = 0$ puisque W'_n converge. Comme W_n converge, W_{2n} et W_n ont même limite lorsque $n \to \infty$, et on en déduit que $\lim_{n\to\infty} W_n = \left(\sum_{i=0}^{\infty} A_i\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} B_j\right)$.

q.e.d.

Preuve de **3.14**. Pour commencer calculons $(A+B)^2$:

$$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$$

et puisque $AB = BA$ par hypothèse, on a que $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$, (mais si $AB \ne BA$ cette formule est fausse! − voir exemple **3.18**). En fait, la formule usuelle du binôme de Newton se généralise, en procédant par induction sur k et en utilisant que $AB = BA$:

$$(A+B)^k = \sum_{p=0}^{k} \binom{k}{p} A^p B^{k-p}$$

où $\binom{k}{p} = \frac{k!}{p!(k-p)!}$. Or d'après **3.15** :

$$\left(\sum_{p=0}^{\infty} \frac{A^p}{p!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty} \frac{B^q}{q!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{p+q=k} \frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{p+q=k} k!\frac{A^p}{p!}\frac{B^q}{q!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(A+B)^k$$

et donc $e^A e^B = e^{A+B}$.

q.e.d.

3.16 Corollaire. *La matrice* e^A *est inversible,* $\forall\, A \in M(n,n,\mathbb{C})$.

En effet, A et $-A$ commutent, donc:

$$e^A e^{-A} = e^{A-A} = e^0 = I \quad .$$

Par un changement linéaire de coordonnées on peut parfois ramener une matrice à une matrice dont l'exponentielle est plus simple à calculer (par exemple une matrice diagonale), le lemme suivant nous sera utile.

3.17 Lemme. *Si $S \in M(n,n,\mathbb{C})$ est inversible,*

$$S\left(e^{A}\right)S^{-1} = e^{SAS^{-1}} \quad \forall\, A \in M(n,n,\mathbb{C}) \quad .$$

Preuve: En effet:

$$S\left(e^{A}\right)S^{-1} = S\left(I + A + \cdots + \frac{1}{k!}A^k + \cdots\right)S^{-1} = SIS^{-1} + SAS^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}SA^kS^{-1} + \cdots$$

et puisque $(SAS^{-1})^k = SAS^{-1}SAS^{-1}\cdots SAS^{-1} = SA^kS^{-1}$,

$$S\left(e^{A}\right)S^{-1} = I + SAS^{-1} + \cdots + \frac{1}{k!}\left(SAS^{-1}\right)^k + \cdots = e^{SAS^{-1}} \quad ,$$

q.e.d.

3.18 Exemple.
On veut calculer l'exponentielle de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. On voit tout de suite que 1 et 2 sont des valeurs propres de A, et on calcule que les vecteurs propres correspondants sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On pose alors $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on a:

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

et donc

$$e^{A} = S\left(e^{S^{-1}AS}\right)S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e^2 - e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Notons que

$$e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & e \\ 0 & e^2 \end{pmatrix} \neq e^{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

ce qui montre que l'hypothèse $AB = BA$ dans **3.14** est bien nécessaire.

Le prochain résultat généralise la formule de dérivation de l'exponentielle ordinaire: $(e^{at})' = ae^{at}$.

3.19 Théorème. *Soit $A \in M(n,n,\mathbb{C})$ et $t, t_0 \in \mathbb{R}$. On a:*

$$\text{(3-10)} \qquad \frac{d}{dt}\left(e^{tA}\right)_{t=t_0} = e^{t_0A}A = Ae^{t_0A} \quad .$$

Preuve: Soit $h \in \mathbb{R}$, $h \neq 0$. Alors puisque t_0A et hA commutent, d'après 3.13 $e^{(t_0+h)A} = e^{t_0A}e^{hA}$ et donc:

$$\frac{e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A}}{h} = e^{t_0A}\left(\frac{e^{hA} - I}{h}\right) = e^{t_0A}\left(\frac{I + hA + \frac{h^2}{2!}A^2 + \cdots - I}{h}\right)$$
$$= e^{t_0A}\left(A + h\left(\frac{A^2}{2!} + \cdots\right)\right) \to e^{t_0A}A \quad \text{si} \quad h \to 0$$

et enfin, puisque A et t_0A commutent, e^{t_0A} et A commutent aussi.

q.e.d.

3.20 Corollaire. *La solution maximale de l'equation $y' = Ay$ ayant pour conditions initiales (t_0, y_0) a pour expression:*

$$\varphi(t) = e^{(t-t_0)A}(y_0) \tag{3-11}$$

Preuve: En effet, si l'on dérive le membre de droite de (3-11) en utilisant (3-10) on obtient:

$$\varphi(t)' = e^{(t-t_0)A}\,(A(y_0)) = Ae^{(t-t_0)A}(y_0) = A(\varphi(t))$$

et d'autre part $\varphi(t_0) = e^{0A}(y_0) = I(y_0) = y_0$

q.e.d.

La résolution de $y' = A(y)$ se ramène donc au calcul d'une exponentielle de matrice.

3.21 Exemple.
Considérons l'équation

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}(y)$$

Les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ sont les racines du polynôme $\text{dét}(A - \lambda I) = \lambda^2 - \lambda - 2$, c'est-à-dire $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 2$. Les vecteurs propres correspondants sont $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si l'on pose $S = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, on aura que $S^{-1}AS = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, où $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Puisque $e^{(t-t_0)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} e^{-(t-t_0)} & 0 \\ 0 & e^{2(t-t_0)} \end{pmatrix}$ la solution générale de l'équation de départ aura pour expression

$$Se^{(t-t_0)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}S^{-1}(y_0) = \cdots = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} (2e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^1 + 2(-e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^2 \\ (-e^{-(t-t_0)} + e^{2(t-t_0)})y_0^1 + (e^{-(t-t_0)} + 2e^{2(t-t_0)})y_0^2 \end{pmatrix} \quad .$$

Le théorème d'algèbre linéaire qui suit est utile pour calculer l'exponentielle d'une matrice; nous l'admettrons, sans démonstration.

3.22 Théorème de décomposition. *Soit $A \in M(n,n,\mathbb{C})$ et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ ses valeurs propres distinctes, n_i la multiplicité de λ_i, de sorte que le polynôme caractéristique de A s'écrit :*

$$p_A(\lambda) = d\acute{e}t(A - \lambda I) = (-1)^n \prod_{i=1,\ldots,k} (\lambda - \lambda_i)^{n_i}$$

et $n_1 + \cdots + n_k = n$. Posons :

$$V_i = \operatorname{Ker}(A - \lambda_i)^{n_i} \quad , \quad i = 1, \ldots, k \quad .$$

Alors on a :
i) Les V_i sont invariants par A : si $v \in V_i$, alors $A(v) \in V_i$.

ii) V_i est de dimension n_i et $V_i \cap V_j = \{0\}$, pour $i \neq j$, de sorte que

$$\mathbb{C}^n = \bigoplus_{i=1,\dots,k} V_i$$

■

Il en suit que si l'on choisit une base $e_1, \dots, e_n$ de $\mathbb{C}^n$ de sorte que $e_1, \dots, e_{n_1}$ soit une base de V_1, $e_{n_1+1}, \dots, e_{n_1+n_2}$ une base de V_2, et ainsi de suite, la matrice de l'application linéaire associée à A dans cette base s'écrit :

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

où A_i est la matrice de $A|V_i : V_i \to V_i$. Posons $N_i = A_i - \lambda_i I$, de sorte que $A = \lambda_i I + N_i$, et $N_i^{n_i} = 0$; on a :

$$e^{(t-t_0)A} = \begin{pmatrix} e^{(t-t_o)A_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & e^{(t-t_0)A_k} \end{pmatrix}$$

et puisque $\lambda_i I$ et N_i commuttent :

$$e^{(t-t_0)A_i} = e^{(t-t_0)\lambda_i} \left(I + tN_i + \cdots + \frac{(t-t_0)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} N_i^{n_i-1} \right) \quad .$$

Si $v = v_1 + \cdots + v_k \in \mathbb{C}^n$, avec $v_i \in V_i$, la solution de l'équation $y' = A(y)$ avec condition initiale (t_0, v) s'écrit donc sous la forme :

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{(t-t_0)\lambda_i} \left(I + tN_i + \cdots + \frac{(t-t_0)^{n_i-1}}{(n_i-1)!} N_i^{n_i-1} \right)(v_i) = \sum_{i=1}^{k} e^{(t-t_0)\lambda_i} P_i(t)$$

où $P_i(t)$ est un polynôme en t de degré au plus $n_i - 1$, à coefficients des vecteurs de V_i.

Plus précisément, on a démontré le résultat suivant :

3.23 Théorème. *Les solutions de l'équation $y' = A(y)$ sont de la forme :*

$$\varphi(t) = \sum_{i=1}^{k} e^{(t-t_0)\lambda_i} P_i(t)$$

où $P_i(t)$ est un polynôme à coefficients des vecteurs de V_i de degré exactement :

$$\text{degré}(P_i(t)) = \inf\left\{ \ell_i \geq 1 \mid N_i^{\ell_i} = 0 \right\} - 1 \quad .$$

Ce degré est au plus égal à la multiplicité de λ_i moins 1.

■

4. Equations non linéaires : stabilité

Soit $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$. On dit que $x_0 \in U$ est un point d'équilibre, ou point critique, si $\xi(x_0) = 0$, auquel cas l'application constante $\varphi : \mathbb{R} \to U$, $\varphi(t) = x_0$ est solution de l'équation différentielle associé au champ ξ : $\varphi'(t) = 0 = \xi(\varphi(t))$.

4.1 Définition. On dit que le point d'équilibre x_0 du champ de vecteurs ξ est stable si pour tout $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, R) \subset U$ il existe $r(R)$, avec $0 < r(R) \leq R$, tel que si $\varphi : I \to U$ est une solution maximale de l'équation associée au champ ξ telle que il existe $t_0 \in I$ avec $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r$, alors $\|\varphi(t) - x_0\| \leq R$ pour tout $t \geq t_0$.

Si c'est le cas, alors il suit du théorème **2.13** que $I \supset [t_0, +\infty[$.

On dit que x_0 est un point d'équilibre asymptotiquement stable si de plus il existe r_0, avec $0 < r_0 \leq R$ tel que si $\varphi : I \to U$ est une solution maximale et il existe $t_0 \in I$ tel que $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r_0$, alors

$$\lim_{t \to +\infty} (\varphi(t)) = x_0$$

Dans le cas d'un champ de vecteurs linéaire $\xi(x) = A(x)$ sur $\mathbb{C}^n$, $A \in M(n, n, \mathbb{C})$, l'origine est toujours un point d'équilibre : $\xi(0) = A(0) = 0$. On déduit immédiatement du théorème **3.23** :

4.2 Théorème. *Soit $A \in M(n, n, \mathbb{C})$ et soient λ_i, $i = 1, \ldots, k$ les valeurs propres ditinctes de A, n_i, $i = 1, \ldots, k$ leur multiplicités. Alors :*

i) le point critique $0 \in \mathbb{C}^n$ est asymptotiquement stable $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) < 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$

ii) le point critique $0 \in \mathbb{C}^n$ est stable $\Leftrightarrow Re(\lambda_i) \leq 0$, $\forall\, i = 1, \ldots, k$ et si $Re(\lambda_i) = 0$, alors l'espace propre associé à λ_i est de dimension n_i.

Preuve: Rappelons que si $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$ et $i = \sqrt{-1}$, alors $|e^z| = e^x$.

Soit $\varphi(t)$ la solution maximale de condition initiale $(0, x_0)$, avec $x_0 = v_1 + \cdots + v - k$, $v_i \in V_i = \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)^{n_i}$. D'après **4.3** :

$$\|\varphi(t)\| \leq \sum_{i=1}^{k} e^{Re(\lambda_i)\cdot t}\, \|P_i(t))\| \quad .$$

Si $Re(\lambda_i) < 0 \,\forall\, i = 1, \ldots, k$ cette expression tend vers 0 pour $t \to \infty$, car l'exponentielle domine tout polynôme pour $t \to \infty$; on a donc stabilité asymptotique. Si $Re(\lambda_i) \leq 0$, et $Re(\lambda_j) = 0 \Rightarrow$ l'espace propre associé à λ_j est de dimension égale à la multiplicité de λ_j, alors $l_j = 0$ et $P_j(t) = v_j$, donc cette expression est bornée par

$$\sum_{i=1}^{k} \|v_i\|$$

pour t assez grand et on en déduit que 0 est un point critique stable.

S'il existe j avec $Re(\lambda_j) \geq 0$, prenons $v_j \in V_i \setminus \{0\}$, et soit $\varphi(t)$ la solution maximale de condition initiale $(0, v_j)$. Alors

$$\|\varphi(t)\| = e^{Re(\lambda_i)\cdot t}\, \|P_j(t)\| \geq \|P_j(t)\| \quad , \quad t \geq 0$$

et comme $v_j \neq 0$, $P_j(t) = v_j + \cdots \not\equiv 0$, ce qui fait que $\|\varphi_j(t)\|$ ne tend pas vers 0 pour $t \to \infty$, donc on ne peut avoir stabilité asymptotique. Si l'espace propre de λ_j est de dimension strictement inférieur à la mutiplicité de λ_j, il existe $v_j \in V_j$ qui n'est pas vecteur propre, et dans ce cas $P_j(t) = v_j + t\,\underbrace{(A - \lambda_j I)(v_j)}_{\neq 0} + \cdots$, ce qui fait que $\|\varphi(t)\| \geq \|P_j(t)\| \to \infty$ si $t \to \infty$, donc on n'a pas stabilité.

q.e.d.

Dans le cas $n = 2$, on a examiné au § **II.1.2** tous les comportements possibles de champs de vecteurs linéaires, qui confirment le théorème ci-dessus.

Un exemple non linéaire est fourni par l'équation de Lotke-Volterra, ou équation prédateurs-proies, qui décrit l'évolution de deux espèces d'êtres vivants en cohabitation, l'une (les proies – par exemple des lapins) ayant à disposition autant de nourriture que nécessaire, l'autre (les prédateurs – par exemple des renards) se nourrissant exclusivement de la première espèce. Si $x(t)$ et $y(t)$ décrivent le nombre d'individus de la première, respectivement la deuxième espèce, une bonne approximation de l'évolution est décrite par le système d'équations :

$$\text{(4-1)} \qquad \begin{cases} x' = x(a-by) \\ y' = -y(c-dx) \end{cases} \quad , \quad a,b,c,d > 0 \quad .$$

En effet, en absence de l'autre espèce, la première croîtrait avec un taux positif : $x' = ax$; mais ce taux est diminué proportionellement au nombre de prédateurs, d'où $x' = x(a-by)$. D'autre part, si les prédateurs sont seuls, il dépérissent avec un taux constant : $y' = -cy$; par contre, en présence des proies ce taux est augmenté proportionellement à leur nombre, d'où $y' = y(-c+dx)$.

Les seules conditions initiales qui ont un sens sont dans le premier cadran. A part $(0,0)$, le seul point critique est $P = (c/d, a/b)$. L'équation (4-1) n'admet pas de solution explicite; par contre, elle admet une intégrale première, c'est-à-dire une fonction qui est constante sur les trajectoire. En effet, si $\varphi(t = (x(t), y(t))$ est une solution, alors

$$x'(t) = x(t)(a - by(t)) \quad , \quad y'(t) = -y(t)(c - dx(t))$$
$$\Rightarrow \quad \frac{x'(t)}{y'(t)} = \frac{x(t)}{c - dx(t)} \frac{a - by(t)}{-y(t)} \Rightarrow \quad \left(\frac{c}{x(t)} - d\right) x'(t) = \left(-\frac{a}{y(t)} + b\right) y'(t)$$

et en intégrant des deux cotès de la dernière égalité on obtient que :

$$c \cdot \log(x(t) - d \cdot x(t) = -a \cdot \log(y(t)) + b \cdot y(t) + C$$

où C est une constante qui dépend de la trajectoire. En d'autre termes, la fonction

$$F(x,y) = c \cdot \log(x) - d \cdot x + a \cdot \log(y) - b \cdot y$$

est constante sur les trajectoire. D'autre part, on calcule que $dF_P = 0$ et que la matrice des deuxièmes dérivées partielles en P s'écrit :

$$\begin{pmatrix} -\frac{d^2}{c} & 0 \\ 0 & -\frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

On peut déduire de là que la fonction F elle-même, après changement de coordonnées au voisinage de P de la forme $x'(x)$, $y'(y)$, s'écrit : $-(x' - c/d)^2 - (y' - a/b)^2$; on voit ainsi que les ensembles $F = C$ sont difféomorphes à des cercles concentriques.

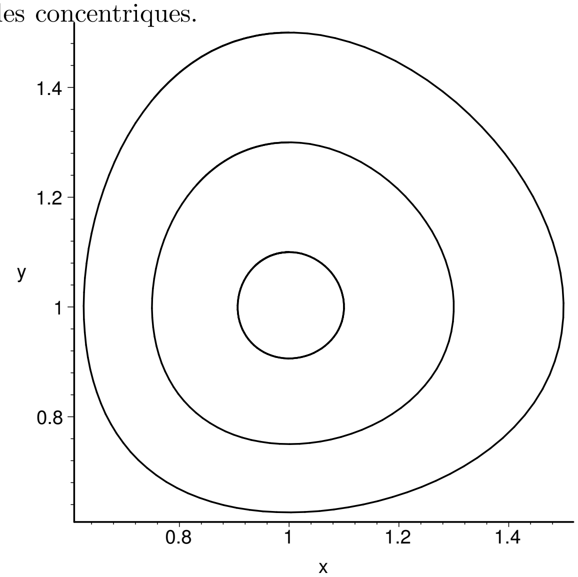

Figure III.9 – Trajectoires de l'équation prédateur-proie, avec $a = b = c = d = 1$

V. Volterra, Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie, Gauthier-Villars, Paris, 1931

Dans les deux paragraphes suivants nous allons établir des méthodes pour examiner la stabilité de points critiques de champs de vecteurs non nécessairement linéaires.

4.1 Méthode directe de Liapounov (1892)

4.3 Définition. Soit $x_0 \in U$, $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction continue, avec $f(x_0) = 0$. On dit que :

i) f est définie positive (respectivement négative) si $f(x) > 0$ (respectivement $f(x) < 0$) $\forall x \in U$, $x \neq x_0$

ii) f est semi-définie positive (respectivement négative) si $f(x) \geq 0$ $\forall x \in U$ (respectivement $f(x) \leq 0$).

Soit maintenant $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs, avec $\xi(x_0) = 0$. Si $L : U \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, on définit une nouvelle fonction $L_\xi : U \to \mathbb{R}$, appelée dérivée de L dans la direction ξ, par :

$$L_\xi(x) = dL_x(\xi(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x) \cdot \xi_i(x) \quad .$$

4.4 Définition. On dit que $L : U \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$, est une fonction de Liapounov pour ξ si $L(x_0) = 0$ et :

i) $L(x)$ est définie positive

ii) $L_\xi(x)$ est semi-définie négative.

Remarquons que si L est une fonction de Liapounov pour ξ, et $\varphi(t)$ une trajectoire de ξ, alors :

$$(L(\varphi(t)))' = L_\xi(\varphi(t)) \leq 0$$

et donc $L(\varphi(t))$ est décroissante. Si de plus $L_\xi(x)$ est définie négative, alors $L(\varphi(t))$ est strictement décroissante.

4.5 Théorème de stabilité. *Soit $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs, $x_0 \in U$, $\xi(x_0) = 0$, et soit L une fonction de Liapounov pour ξ. Alors :*

i) x_0 est un point d'équilibre stable de ξ

ii) si de plus $L_\xi(x)$ est défini négative, alors x_0 est asymptotiquement stable.

Preuve: Soit $R > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, R) \subset U$ et soit $C_R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - x_0\| = 0\}$. Posons :

$$m = \inf\{L(x) \mid x \in C_R\} \quad .$$

Puisque L est continue et $L(x_0) = 0$, il existe $r(R)$ tel que

$$\|x - x_0\| \leq r(R) \Rightarrow L(x) < m \quad .$$

Si $\varphi(t)$ est une trajectoire de ξ, et $\|\varphi(t_0) - x_0\| \leq r(R)$, alors $L(\varphi(t_0)) < m$, et donc $L(\varphi(t)) \leq L(\varphi(t_0)) < m$, $\forall t \geq t_0$. Donc $\varphi(t) \notin C_R$ pour $t \geq t_0$, et alors $\|\varphi(t) - x_0\| < R$ pour $t \geq t_0$, ce qui montre que x_0 est stable.

Pour ii), montrons d'abord que $L(\varphi(t)) \to 0$ pour $t \to \infty$. Puisque $L(\varphi(t)) \geq 0$ décroit, on peut poser $\ell = \lim_{t\to\infty} L(\varphi(t))$. Si $\ell > 0$, soit $r' \leq r$, $r' \geq 0$, tel que $\|x - x_0\| \leq r' \Rightarrow L(x) < \ell$; alors $r' \leq \|\varphi(t) - x_0\| \leq R$ pour $t \geq t_0$. Soit :

$$\mu = -\sup\{L_\xi(x) \mid r' \leq \|x - x_0\| \leq R\}$$

de sorte que $L_\xi(x) \leq -\mu$ si $r' \leq \|x - x_0\| \leq R$. Puisque $L_\xi(x)$ est définie négative, $\mu > 0$. Alors pour $t \geq t_0$:

$$L(\varphi(t)) = L(\varphi(t_0)) + \int_{t_0}^{t} \underbrace{L_\xi(\varphi(s))}_{\leq -\mu} ds \leq L(\varphi(t_0)) - \mu(t - t_0)$$

mais $L(\varphi(t_0)) - \mu(t-t_0) < 0$ pour t assez grand, ce qui contredit que L est définie positive. Montrons enfin que :

$$\lim_{t\to\infty} L(\varphi(t)) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = x_0 \quad .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et posons

$$m_\varepsilon = \inf\{L(x) \mid \varepsilon \leq \|x-x_0\| \leq R\} \quad ;$$

puisque $\lim_{t\to\infty}(L(\varphi(t)) = 0$, il existe $T_\varepsilon \geq t_0$ tel que

$$t \geq T_\varepsilon \Rightarrow L(\varphi(t)) < m_\varepsilon \quad .$$

Or $\varphi(t) \in \{x \mid \|x-x_0\| < R\}$ et si $t \geq T_\varepsilon$, $L(\varphi(t)) < m_\varepsilon \Rightarrow \varphi(t) \notin \{x \mid \varepsilon \leq \|x-x_0\| \leq R\}$, et donc $\varphi(t) \in \{x \mid \|x-x_0\| < \varepsilon\}$.

q.e.d.

Dans la même veine, on a le

4.6 Théorème d'instabilité. *Soit $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs, $x_0 \in U$, $\xi(x_0) = 0$, et soit L une fonction de calsse $\mathcal{C}^1$, avec $L(x_0) = 0$. Supposons que :*

i) pour tout $R > 0$ il existe $x_R \in U$ avec $\|x_R - x_0\| \leq R$ et $L(x) > 0$

ii) $L_\xi(x)$ est définie positive dans un voisinage de x_0.

Alors le point d'équilibre x_0 n'est pas stable.

■

La démonstration est semblable à celle de **4.5**.

4.7 Exemples.

(1) Soit $\xi(x,y) = (-y-x^3, x-y^3)$, $x_0 = (0,0)$. Posons $L(x,y) = x^2+y^2$; alors $L_\xi(x,y) = 2x(-y-x^3) + 2y(x-y^3) = -2(x^4+y^4)$. Puisque L est définie positive et L_ξ est définie négative, $(0,0)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable.

(2) Soit $\xi = (x+x^3, -y-y^3)$, $x_0 = (0,0)$. Posons $L(x,y) = x^2-y^2$. Alors
$L_\xi(x,y) = 2x(x+x^3) - 2y(-y-y^4) = 2(x^2+y^2+x^4+y^4)$ est définie positive, et $L(R,0) > 0$ pour tout $R > 0$, x_0 n'est donc pas stable.

(3) Si F désigne l'intégrale première de l'équation de Lotke-Volterra que l'on a trouvée à la fin du § précédent, la fonction $L(x,y) = -F(x,y) + F(P)$, où $P = (c/d, a/b)$ est le point critique étudié, peut être considérée comme fonction de Liapounov. En effet, le calcul que l'on a fait des dérivées deuxièmes de F montre que F possède un maximum local strict en P, et il en résulte que L est définie positive sur un voisinage de P. D'autre part, puisque F est une intégrale première, on a que $L_\xi = 0$.

4.2 Linéarisation des champs de vecteurs de $\mathbb{R}^2$

Si $\xi : U \to \mathbb{R}^2$ est un champ $\mathcal{C}^\infty$ et x_0 un point d'équilibre, alors $\xi(x) = d\xi_{x_0}(x - x_0) + r(x - x_0)$, avec $\lim_{h\to 0}(r(h)/\|h\|) = 0$. $d\xi_{x_0}$ peut être vu comme un champ linéaire, qui approche ξ au voisinage de x_0; on l'appelle partie linéaire du champ ξ en x_0. Le prochain théorème nous dit que dans certains cas la nature d'un point d'équilibre x_0 d'un champ de vecteurs ξ est la même que celle de sa partie linéaire en x_0.

4.8 Théorème. *Soit $\xi : U \to \mathbb{R}^2$ un champ de vecteurs $\mathcal{C}^\infty$ et $x_0 \in U$ un point d'équilibre. Soit $A \in M(2, 2, \mathbb{R})$ la matrice de la partie linéaire $d\xi_{x_0}$ de ξ en x_0. Alors :*
(1) si les parties réelles des valeurs propres de A sont strictement négatives x_0 est asymptotiquement stable
(2) s'il existe une valeur propre dont la partie réelle est stictement positive x_0 n'est pas stable.

Nous démontrerons seulement l'affirmation (1) de ce théorème; la preuve de (2) est semblable.

D'abord il nous faut établir 2 lemmes.

On notera par $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$ le produit scalaire euclidien sur $\mathbb{R}^2$ et par $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + y_2^2}$ la norme associée. Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique; on dit qu'elle est définie négative si $q(x) < 0 \;\forall\, x \neq 0$.

4.9 Lemme. *Soit $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une forme quadratique définie négative. Alors il existe $\gamma < 0$ tel que :*

$$q(x_1, x_2) \le \gamma(x_1^2 + x_2^2) \quad \forall\,(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \quad .$$

Preuve: Puisque q est une forme quadratique, $q(\alpha \cdot x) = \alpha^2 \cdot q(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^2$. On pose

$$\gamma = \sup\left\{q(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\right\}$$

et alors $q(x) = \|x\|^2 q(x/\|x\|)) \le \gamma \cdot \|x\|^2$.

q.e.d.

4.10 Lemme. *Soit A une matrice de l'une des formes suivantes :*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \; \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad \text{ou } A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}, \; \mu < 0 \text{ ou } A = \begin{pmatrix} \lambda & a \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \; \lambda < 0\,,\; 0 < a < -2\lambda \quad .$$

Alors la forme quadratique $q(x) = \langle x, A(x)\rangle$ est définie négative.

Preuve: Soit $x \in \mathbb{R}^2$, $x \neq 0$. Dans le 1er cas, $\langle x, A(x)\rangle = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 < 0$.

Dans le 2ème, $q(x) = \mu(x_1^2 + x_2^2) < 0$.

Dans le 3ème, $q(x) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) + a x_1 x_2$. Si $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, $q(x) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) < 0$, sinon :

- si $x_1x_2 < 0$, alors $ax_1x_2 < 0$ et $q(x) < 0$
- si $x_1x_2 > 0$, alors $ax_1x_2 < -2\lambda x_1x_2$, donc $q(x) < \lambda(x_1^2 + x_2^2) - 2\lambda x_1x_2 = \lambda(x_1 - x_2)^2 \le 0$.

q.e.d.

Preuve de **4.2**

Quitte à faire une translation et un changement de base on peut supposer que $x_0 = 0$; d'après **1.5**, on peut supposer que A est de l'une des trois formes du lemme **4.10**. Il existe donc $\gamma < 0$ tel que

$$\langle x, A(x)\rangle \le \gamma(x_1^2 + x_2^2) \quad .$$

On a que $\xi(x) = A(x) + r(x)$, avec $\|r(x)\| \le \varepsilon \|x\|$ si $\|x\| \le \delta_\varepsilon$. Posons $L(x) = \langle x, x\rangle$. Alors $L_\xi(X) = L_A(x) + L_r(x)$ et d'après **4.9**

$$L_A(x) = 2\langle x, A(x)\rangle \le 2\gamma \|x\|^2 \quad , \quad \gamma < 0 \quad .$$

D'autre part :

$$|L_r(x)| = |2\langle x, r(x)\rangle| \le 2\|x\| \|r(x)\| \le -\gamma \|x\|^2 \text{ pour } \|x\| < \delta_{-\gamma/2} \quad ;$$

Donc si $\|x\| \leq \delta_{-\gamma/2}$, alors $L_\xi(x) = L_A(x) + L_r(x) \leq \gamma \|x\|^2$; donc $L_\xi(x)$ est définie négative et on peut appliquer **4.5**.

q.e.d.

4.11 Exemples.

(1) Soit $\xi = (xy + y, x + xy)$. Les points critiques sont $P = (0,0)$ et $Q = (-1,1)$. D'autre part :

$$d\xi_(x,y) = \begin{pmatrix} y & x+1 \\ 1+y & x \end{pmatrix} \quad , \quad d\xi_P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad d\xi_Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Puisque les valeurs propres de $d\xi_Q$ sont négatives, ce point critique est stable. Par contre les valeurs proprres de $d\xi_P$ sont $+1$ et -1, donc P n'est pas stable.

(2) Soit $\xi(x,y) = (-y + x^3, x + y^3)$. Ici, le seul point critique est $(0,0)$; la partie linéaire de ξ en ce point est $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et son polynôme caractéristique $\lambda^2 + 1$. Les partie réelles des valeurs propres sont donc nulles, et le théorème **4.3** ne permet pas de conclure. En fait, si on pose $L(x,y) = x^2 + y^2$, on voit que $L_\xi(x,y) = 2(x^4 + y^4)$; puisque L est définie positive, ainsi que L_ξ, le théorème **4.6** permet de conclure que $(0,0)$ n'est pas un point critique stable.

Il faut remarquer que ce champ de vecteur a la même partie linéaire en $(0,0)$ que le champ de l'exemple **4.7(1)**, dont on a montré que $(0,0)$ est un point critique asymptotiquement stable. On voit bien que la partie linéaire ne permet pas de conclure lorsque les parties réelles des valeurs propres sont nulles; par contre la méthode directe de Liapounov permet de conclure (dans ce cas au moins).

4.3 Stabilité structurelle

Une famille de champs de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ est une application $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$, où $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ est un ouvert. On note $(x,v) \in \Omega$ un point de Ω, avec $x \in \mathbb{R}^2$ et $v \in \mathbb{R}^k$. v joue le rôle d'un paramètre : pour tout v fixé, $x \mapsto \xi(x,v)$ est un champ de vecteurs, que l'on notera ξ_v, sur l'ouvert $\Omega \cap \big(\mathbb{R}^2 \times \{v\}\big)$ de $\mathbb{R}^2$.

Une famille de champs de vecteurs peut-être vue comme déformation du champ ξ_{v_0} obtenu en fixant une valeur v_0 du paramètre. En général, on parle de "stabilité structurelle" d'une propriétés d'un être mathématique lorsque cette propriété subsiste après de petites déformations. Le prochain théorème donne une condition suffisante pour que le point d'équilibre d'un champ de vecteurs soit structurellement stable.

4.12 Théorème (stabilité structurelle). *Soit $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^2$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k$ ouvert, une famille $\mathcal{C}^\infty$ de champs de vecteurs. Soit $(x_0, v_0) \in \Omega$ tel que $\xi(x_0, v_0) = 0$ et supposons que les valeurs propres de $A = \frac{\partial \xi}{\partial x}(x_0,v_0)$ soient toutes à partie réelle strictement négative. Alors il existe $r_0 > 0$ et $R_0 > 0$ tels que $B(x_0, R_0) \times B(v_0, r_0) \subset \Omega$ et une application continue $\chi : B(v_0, r_0) \to B(x_0, R_0)$ telle que :*
(1) $\forall\, x \in B(x_0, R_0)\,, v \in B(v_0, r_0)$ on a :

$$\xi(x,v) = 0 \iff x = \chi(v)$$

(2) $\chi(v)$ est un point d'équilibre asymptotiquement stable de ξ_v, $\forall\, v \in B(v_0, r_0)$.

Preuve: L'hypothèse entraîne en particulier que les valeurs propres de A ne peuvent pas être nulles et donc que A est inversible. On peut alors appliquer le théorème des fonctions implicites **II.2.2** à l'équation $\xi(x,v) = 0$ au voisinage de (x_0, v_0). On en déduit l'existence de r_0, R_0 et χ vérifiant la propriété (1) de l'énoncé. De plus, quitte à prendre r_0 et R_0 suffisamment petits, les valeurs propres de $\frac{\partial \xi}{\partial x}(x,v)$ vont encore avoir des parties réelles strictement négatives, et donc $\chi(v)$ sera un point d'équilibre asymptotiquement stable de ξ_v pour $v \in B(v_0, r_0)$.

q.e.d.

On termine par un exemple de famille de champs de vecteurs qui n'est pas structurellement stable.

La bifurcation de Hopf

Considerons la famille de champ de vecteurs :

$$\text{(4-2)} \qquad \begin{aligned} x' &= -y + x(\varepsilon - x^2 - y^2) \\ y' &= x + y(\varepsilon - x^2 - y^2) \end{aligned}$$

où ε joue le rôle d'un paramêtre, que l'on prendra proche de 0.

Passons en coordonnées polaires; on cherche ρ' et θ' tels que :

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & \rho'\cos(\theta) - \rho\sin(\theta)\theta' &= -\rho\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)(\varepsilon - \rho^2) \\ &\text{(II)} & \rho'\sin(\theta) + \rho\cos(\theta)\theta' &= \rho\cos(\theta) + \rho\sin(\theta)(\varepsilon - \rho^2) \end{aligned}$$

et en calculant $\cos(\theta)\,\text{(I)} + \sin(\theta)\,\text{(II)}$ et $\sin(\theta)\,\text{(I)} - \cos(\theta)\,\text{(II)}$ on obtient le système d'équations :

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho(\varepsilon - \rho^2) \\ \rho\theta' &= \rho \end{aligned}$$

Une première solution est la constante $\rho = 0$. Pour les autres solutions, on peut supposer $\rho \neq 0$, et donc simplifier par ρ dans la deuxième équation du système précédent :

$$\text{(4-3)} \qquad \begin{aligned} \rho' &= \rho(\varepsilon - \rho^2) \\ \theta' &= 1 \end{aligned}$$

En prenant des conditions initiales avec $t_0 = 0$ on en tire que $\theta(t) = t + \theta_0$.

Pour déterminer ρ, on voit d'abord que si $\varepsilon > 0$, $\rho = \sqrt{\varepsilon}$ est une solution. Si $\rho_0 \neq \sqrt{\varepsilon}$, on peut résoudre (4-2) en intégrant par rapport au temps de 0 à t. Si $\varepsilon = 0$ on trouve:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} -\frac{1}{r^3}dr = \left.\frac{1}{2r^2}\right|_{\rho_0}^{\rho} = t$$

d'où l'on tire que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{\rho_0^2} + 2t}} \quad , \quad t > -\frac{1}{2\rho_0^2}$$

Si $\varepsilon \neq 0$ il suit de (4-2) que :

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{dr}{r(\varepsilon - r^2)} = \frac{1}{2\varepsilon}\int_{\rho_0}^{\rho}\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{\varepsilon - r^2}\right)d(r^2) = \frac{1}{2\varepsilon}\log\left(\frac{r^2}{|\varepsilon - r^2|}\right)\Bigg|_{\rho_0}^{\rho} = \frac{1}{2\varepsilon}\log\left(\frac{\rho^2}{\varepsilon - \rho^2}\frac{\varepsilon - \rho_0^2}{\rho_0^2}\right) = t$$

d'où l'on tire que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 + e^{-2\varepsilon t}\left(\frac{\varepsilon}{\rho_0^2} - 1\right)}} \quad .$$

Pour comprendre l'allure des solutions, il faut distinguer plusieurs cas.

- Si $\rho_0^2 < \varepsilon$ (et donc $\varepsilon > 0$), $\rho(t)$ est défini pour tout t et

$$t \to +\infty \Rightarrow \rho \to \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad t \to -\infty \Rightarrow \rho \to 0$$

- Si $\rho_0^2 > \varepsilon \neq 0$, on pose

$$t_- = \frac{1}{2\varepsilon}\log\left(\frac{\rho_0^2 - \varepsilon}{\rho_0^2}\right)$$

  de sorte que

$$\rho(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{1 - e^{-2\varepsilon(t - t_-)}}}$$

et $\rho(t)$ est défini pour $t > t_-$.

– Si $\varepsilon > 0$:

$$t \to +\infty \Rightarrow \rho \to \sqrt{\varepsilon} \quad , \quad t \to t_- \Rightarrow \rho \to +\infty$$

– Si $\varepsilon < 0$:

$$t \to +\infty \Rightarrow \rho \to 0 \quad , \quad t \to t_- \Rightarrow \rho \to +\infty$$

AInsi, lorsque ε passe de valeurs négatives à des valeurs positives on voit apparaître une trajectoire périodique (le cercle de rayon $\sqrt{\varepsilon}$).

Il suit du fait que $\theta = \theta_0 + t$ que l'on obtient les autres solutions par rotation autour de l'origine de celles qui ont été esquissées. Les droites en pointillé représentent des asymptotes obliques. Notons que pour $\varepsilon \neq 0$, lorsque t tend vers une des extrémités de son intervalle de définition ($-\infty$, t_- ou $+\infty$), $\rho(t)$ tend exponentiellement vers sa limite (que ce soit 0, $\sqrt{\varepsilon}$ ou $+\infty$), alors que pour $\varepsilon = 0$, lorsque t tend vers $+\infty$, $\rho(t)$ tend vers 0 comme $1/\sqrt{t}$, ce qui est beaucoup plus lent. Cela se voit les figures.

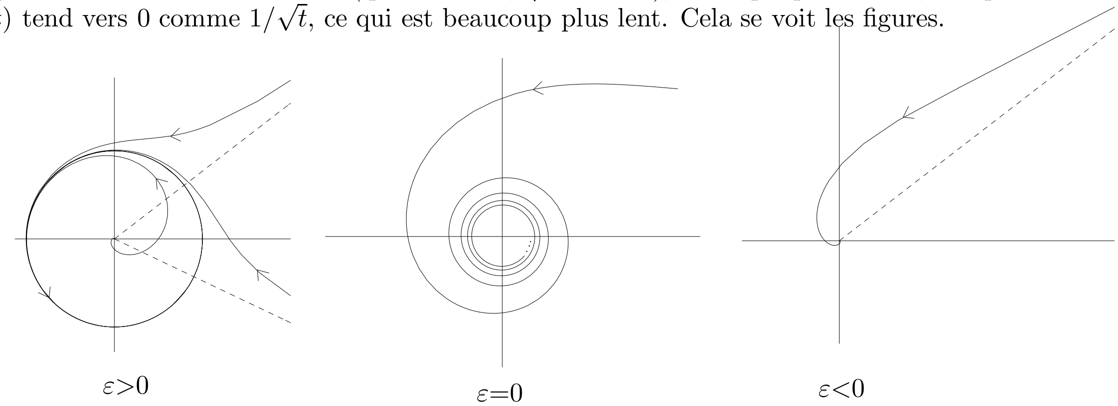

Figure III.10 – La bifurcation de Hopf

Puisque lorsque ε passe de valeurs négatives à des valeurs positives, on voit apparaître une orbite périodique, on n'a pas de stabilité structurelle au voisinage de $\varepsilon = 0$: on parle alors de bifurcation, parce qu'il y a un changement qualitatif de l'allure des trajectoires.

Notons que si on pose $\xi_\varepsilon = (-y + x(\varepsilon - x^2 - y^2), x + y(\varepsilon - x^2 - y^2))$, la partie linéaire de ξ_ε en $0 \in \mathbb{R}^2$ vaut :

$$\frac{\partial \xi}{\partial x}_{(0,\varepsilon)} = \begin{pmatrix} \varepsilon & -1 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

et son polynôme caractéristique est $(\lambda - \varepsilon)^2 + 1$, ses valeurs propres sont donc $\varepsilon \pm \sqrt{-1}$; elles traversent l'axe imaginaire lorsque ε passe de valeurs négatives à des valeurs positives.

Pour $\varepsilon = 0$, les trajectoires de la partie linéaires sont les cercles centrés à l'origine, alors que pour le champs lui-même ce sont des spirales qui tendent lentement vers l'origine.

Pour $\varepsilon < 0$, les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire sont négatives, donc l'origine est un attracteur, et les trajectoires tendent rapidement vers l'origine.

Pour $\varepsilon > 0$, les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire sont positives, donc l'origine est un répulseur. Mais le cercle de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ est un cycle attracteur : le trajectoires de l'extérieur et de l'intérieur du cercle s'approchent très rapidement en spiralant vers ce cercle.

En conclusion, lorsqu'on passe de $\varepsilon < 0$ à $\varepsilon > 0$, l'origine est d'abord un attracteur, qui s'affaiblit lorsque $\varepsilon = 0$, puis engendre un cercle attracteur de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon > 0$.

Ce type de phénomène, appelé bifurcation de Hopf, a été étudié par Eberhardt Hopf en 1942.† Un théorème de E. Hopf affirme, en gros, que le phénomène de l'apparition d'un cycle attracteur proche d'un cercle de rayon $\sqrt{\varepsilon}$ se produit chaque fois que l'on a une famille de champs de vecteurs $Y_\varepsilon(x, y)$, telle que $Y_\varepsilon(x, y) = 0$, l'origine est un attracteur "faible" pour Y_0, et que les parties réelles des valeurs propres de la partie linéaire de Y_ε traversent l'axe imaginaire pour $\varepsilon = 0$.

† L'article original de E. Hopf a paru dans une revue peu diffusée. On en trouve une traduction en anglais dans le livre "The Hopf bifurcation and its applications", J.E. Marsden and M. McCracken, Applied Math. Sciences 19, Springer Verlag (1976).