

# Analyse II A (analyse réelle)

année 2001–2002

FELICE RONGA

---



---

## TABLE DES MATIÈRES

<b>I – Espaces métriques et théorème du point fixe</b>	1
1. Espaces métriques et espaces vectoriels normés	1
2. Ouverts, fermés, adhérence.	7
<i>La preuve de Bernstein du théorème d'approximation de Weierstrass</i>	9
3. Espaces complets.	11
4. Le théorème du point fixe et premières applications	15
5. Construction de fractals par la méthode des IFS (Iterated Function Systems)	20
1. EXEMPLES D'OBJETS FRACTALS	20
<i>L'ensemble de Cantor (1872)</i>	20
<i>Le triangle de Sierpinski (1916)</i>	20
<i>La courbe de von Koch (1904)</i>	21
2. LA DIMENSION DE HAUSDORFF	22
3. L'ESPACE MÉTRIQUE COMPLET $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$	24
4. LA MÉTHODE IFS	27
5. EXEMPLES DE PROGRAMMES	30
<b>II – Dérivabilité, théorème des fonctions implicites</b>	35
1. Dérivabilité, différentiabilité	35
1. NORME D'UNE APPLICATION LINÉAIRE	35
2. L'INÉGALITÉ FONDAMENTALE DE L'INTÉGRALE	36
3. DÉRIVABILITÉ, DIFFÉRENTIABILITÉ	37
4. DÉRIVÉES D'ORDRE SUPÉRIEUR ET FORMULE DE TAYLOR	41
<i>Etude des extrema locaux de fonctions</i>	47
2. Le théorème des fonctions implicites	49
1. DÉPENDANCE DES RACINES SIMPLES D'UNE FAMILLE DE POLYNÔMES PAR RAPPORT À DES PARAMÈTRES	54
2. MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE POUR LA RECHERCHE D'EXTREMA LIÉS	56
3. Éléments de calcul des variations	61
1. GÉODÉSIIQUES SUR LES SURFACES	67
4. Théorèmes de l'application inverse et du rang	70
1. SOUS-VARIÉTÉS DE $\mathbb{R}^n$	73
5. Singularités d'applications, contours apparents, enveloppes	77
1. ENVELOPPES	81
<b>III – Equations différentielles ordinaires</b>	86
1. Introduction, exemples	86
1. TRANSPORT DE CHAMPS DE VECTEURS	89
2. CLASSIFICATION DES SYSTÈMES LINÉAIRES DANS LE PLAN	92
2. Théorèmes d'existence et unicité	96
3. Equations différentielles linéaires	104

1. RÉSULTATS GÉNÉRAUX . . . . .	104
2. COMPLEXIFICATION . . . . .	106
3. EQUATION LINÉAIRE D'ORDRE $n$ À COEFFICIENTS CONSTANTS . . . . .	107
4. SYSTÈMES LINÉAIRES À COEFFICIENTS CONSTANTS . . . . .	112
4. Equations non linéaires : stabilité . . . . .	118
1. MÉTHODE DIRECTE DE LIAPOUNOV (1892) . . . . .	120
2. LINÉARISATION DES CHAMPS DE VECTEURS DE $\mathbb{R}^2$ . . . . .	122
3. STABILITÉ STRUCTURELLE . . . . .	123
<i>La bifurcation de Hopf</i> . . . . .	124

---

LISTE DES FIGURES

**Chapitre I**

1 – L'aire hachurée représente la norme $\  \cdot \ _1$ de la fonction $t^n$ . . . . .	4
2 – $f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon])$ n'est pas un voisinage de $(0, 0)$ : $f$ n'est donc pas continue en $(0, 0)$ . . . . .	9
3 – L'aire hachurée représente la distance pour la norme $\  \cdot \ _1$ entre 2 termes de la suite $f_n(t)$ . . . . .	12
4 – Méthode de Newton selon 4.2 et selon 4.3 . . . . .	18
5 – Construction de l'ensemble de Cantor . . . . .	20
6 – Le triangle de Sierpinski, dessiné à l'aide de la méthode des I.F.S. . . . .	21
7 – Construction de la courbe de Von Koch . . . . .	21
8 – La courbe de Von Koch, dessinée à l'aide de la méthode des I.F.S. . . . .	21
9 – Comportement de la $s$ -mesure de $A$ selon les valeurs de $s$ . . . . .	24
10 – La distance de Hausdorff de $A$ à $B$ est inférieure à $\varepsilon$ . . . . .	25
11 – Distance de Hausdorff du carré au cercle inscrit . . . . .	25
12 – La fougère avec un bon et un mauvais choix de probabilités . . . . .	29
13 – Esquisse des transformations qui codent la feuille de fougère . . . . .	30
14 – Un bon Cantor . . . . .	33
15 – Un mauvais Cantor . . . . .	33

**Chapitre II**

1 – Passage d'une relation implicite à une relation explicite . . . . .	49
2 – Le théorème des fonctions implicites . . . . .	52
3 – La courbe d'équation $y^2 - x(x - 1)^2 = 0$ . . . . .	52
4 – La courbe d'équation $y^2(1 - x) - x(2x - 1)^2 = 0$ . . . . .	55
5 – Exemple d'extremum lié : distance minimale d'une courbe à un point donné . . . . .	57
6 – Valeurs extremales de $x \cdot y$ sur le cercle $x^2 + y^2 - 1 = 0$ . . . . .	60
7 – La parabole semi-cubique, d'équation $y^2 - x^3 = 0$ . . . . .	60
8 – Calcul de la longueur du graphe de $\varphi$ . . . . .	61
9 – Calcul de l'aire de la surface engendrée par rotation du graphe de $\varphi$ . . . . .	63
10 – Graphe de la fonction "en cloche" $(x - 1)^2(x + 1)^2$ , prolongée par 0 en dehors de $[-1, 1]$ . . . . .	64
11 – Graphes engendrant des surfaces minimales par rotation autour de l'axe $Ox$ . . . . .	66
12 – La sphère, le cylindre et le cône . . . . .	67
13 – Le théorème d'inversion locale . . . . .	70
14 – Le théorème du rang lorsque $n = 1, p = 2$ et $n = 2, p = 1$ . . . . .	72
15 – Le tore . . . . .	73
16 – Diverses façons de donner une description locale d'une sous-variété . . . . .	75
17 – Le pli et la fronce . . . . .	77
18 – Contour apparent de la projection sur le plan $x + 0.4z = 0$ du tore . . . . .	78
19 – Contour apparent et projection d'une courbe tracée sur une surface . . . . .	78
20 – Contour apparent de la projection d'une surface sur un plan . . . . .	80
21 – Application stables d'une courbe dans le plan . . . . .	80
22 – Enveloppe de la famille de cercles centrés sur un cercle donné... . . . . .	81
23 – Enveloppe des droites coupées par les axes $OX$ et $OY$ selon un segment de longueur 1 . . . . .	82

24 – La surface $S$ associée à la famille de droites précédente, vue de côté . . . . .	82
25 – La même surface d’avant vue d’en haut . . . . .	82
26 – Une caustique dans la nature . . . . .	84
27 – Le lieu des centres des cercles osculateurs à une parabole . . . . .	85
<b>Chapitre III</b>	
1 – Allure des solutions de $y' = 2ty^2$ . . . . .	88
2 – Solutions de $y' = 3y^{2/3}$ . . . . .	89
3 – Solutions de $(x, y)' = (x^2 - y^2, 2xy)$ . . . . .	91
4 – $A$ diagonalisable sur $\mathbb{R}$ . . . . .	95
5 – $A$ diagonalisable sur $\mathbb{C}$ . . . . .	95
6 – $A$ non diagonalisable . . . . .	95
7 – Exemples d’allure dans une base quelconque . . . . .	95
8 – Construction de solutions approchées . . . . .	97
9 – Trajectoires de l’équation prédateur-proie, avec $a = b = c = d = 1$ . . . . .	120
10 – La bifurcation de Hopf . . . . .	125

