

## Chapitre I – Espaces métriques et théorème du point fixe

*Sommaire.* Le fait que toute suite de Cauchy de nombres réels converge permet de construire des nombres réels tels que  $\sqrt{2} = \sup \{x \mid x^2 \leq 2\}$  ou  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + 1/n)^n$ . Dans ce chapitre nous généralisons la notion de distance de 2 nombres et les notions associées (limites de suites, continuité, suites de Cauchy) à des espaces plus généraux, tels que l'espace  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  des fonctions continues de l'intervalle  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$ , ou encore l'espace des  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  des sous-espaces compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ .

Cela nous permettra par la suite de construire des fonctions (par exemple des solutions explicites d'équations implicites, ou des solutions d'équations différentielles) comme limite de suites de Cauchy dans des espaces appropriés, de manière analogue à la construction de nombres réels. Ces constructions se feront pour la plupart en se ramenant au théorème du point fixe (§ 3).

Au § 4 on montre comment la plupart des objets fractals usuels se définissent et se construisent naturellement à l'aide du théorème du point fixe, appliqué à certaines transformations de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ .

### 1. Espaces métriques et espaces vectoriels normés

La notion de distance entre 2 points du plan ou de l'espace nous est familière. Plus généralement, dans l'espace  $\mathbb{R}^n$  on utilise ce qu'on appelle la distance euclidienne:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1 \dots n} (x_i - y_i)^2} \quad , \quad x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n \quad .$$

La définition suivante généralise la distance euclidienne.

**1.1 Définition – espace métrique.** Un espace métrique  $(X, d)$  est un ensemble  $X$  muni d'une application  $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ , appelée distance ou métrique, qui satisfait les propriétés suivantes:

- (1)  $\forall x, y \in X \quad d(x, y) \geq 0$  , et  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- (2)  $d(x, y) = d(y, x)$  (symétrie).
- (3)  $\forall x, y, z \in X \quad d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$  (inégalité du triangle).

L'exemple par excellence est bien sûr  $\mathbb{R}^n$  muni de la distance euclidienne. Voici d'autres exemples :

- (1) Sur  $\mathbb{R}^n$  on peut considérer d'autres métriques :
  - $d_\infty(x, y) = \max \{|x_i - y_i| \mid i = 1, \dots, n\}$
  - $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i|$
- (2) Soit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ continue}\}$ . Si  $f, g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on pose:

$$d_\infty(f, g) = \sup \{|f(t) - g(t)| \mid t \in [0, 1]\} \quad .$$

- (3) On peut définir une métrique sur un ensemble quelconque  $X$  en posant, pour  $x, y \in X$ :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{si } x \neq y \end{cases} \quad .$$

On l'appelle métrique discrète.

- (4) Métrique induite. Si  $(X, d)$  est un espace métrique et  $A$  un sous-ensemble, la restriction:

$$d|_{A \times A} : A \times A \rightarrow \mathbb{R}$$

définit une distance sur  $A$ . Ainsi, la métrique euclidienne sur  $\mathbb{R}^3$  induit une distance sur la sphère  $S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$ ; pour cette métrique, la distance entre le pôle nord et le pôle sud vaut 2.

- (5) Métrique produit. Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques; on peut définir une métrique sur  $X \times Y$  par:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y, d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sup \{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\} .$$

On vérifie dans chaque cas que les propriétés (1) à (3) de la définition de distance sont satisfaites.

En fait, dans la plupart des exemples qui précèdent, la métrique provient d'une norme; c'est une donnée en rapport avec la structure d'espace vectoriel, qui s'inspire de la notion de norme des vecteurs de l'espace:

**1.2 Définition – espace vectoriel normé.** Un espace vectoriel normé  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel  $E$  sur le corps  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  muni d'une application  $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie:

- (1)  $\forall x \in E, \|x\| \geq 0$ , et  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (2)  $\forall \lambda \in \mathbb{K}, x \in E, \|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$ , où  $|\lambda|$  désigne respectivement la valeur absolue si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou le module si  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- (3)  $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$  (inégalité du triangle.)

Si  $(E, \| \cdot \|)$  est un espace vectoriel normé, on définit la distance associée à une norme par:

$$d_{\| \cdot \|}(x, y) = \|x - y\|$$

On vérifie sans peine que les propriétés (1) à (3) de la définition de distance sont satisfaites. Par exemple, la symétrie se montre ainsi:

$$d_{\| \cdot \|}(x, y) = \|x - y\| = \|(-1)(y - x)\| = |-1| \|y - x\| = \|y - x\| = d_{\| \cdot \|}(y, x) .$$

Quelques exemples d'espaces vectoriels normés:

- (1) Dans  $\mathbb{R}^n$  on peut définir plusieurs normes:

- La norme euclidienne:  $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1, \dots, n} x_i^2}$ , que l'on note aussi  $\|x\|_2$ .
- $\|x\|_\infty = \sup \{|x_i|, i = 1, \dots, n\}$
- $\|x\|_1 = \sum_{i=1, \dots, n} |x_i|$ .

- (2) L'espace vectoriel  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  peut être muni des normes:

- $\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$
- $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$
- $\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 (f(t))^2 dt}$

- (3) On peut généraliser de plusieurs façons les exemples de (2). D'abord, considérons l'espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  des fonctions continues de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{C}$ , noté  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{C})$ ; on peut le munir des normes:

$$\|f\|_\infty = \sup \{|f(t)|, t \in [0, 1]\}$$

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$$

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 dt}$$

où ici  $| \cdot |$  dénote le module des nombres complexes. On peut encore considérer un compact  $K$  de  $\mathbb{R}^n$  et l'espace  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  des applications continues de  $K$  dans  $\mathbb{R}^p$ . Puisque toute application continue sur un compact est bornée, la définition suivante a un sens:

$$\|f\|_\infty = \sup \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in K\} \quad , \quad f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$$

et on vérifie qu'elle définit bien une norme.

- (4) Si  $X$  est un ensemble quelconque, on peut considérer l'espace vectoriel  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  des fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}^p$  et le munir de la norme:

$$\|f\|_\infty = \sup \{ \|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in X \} \quad , \quad f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$$

- (5) Si  $F \subset E$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $\| \cdot \|$  une norme sur  $E$ , sa restriction à  $F$  définit une norme sur  $F$ . Par exemple, cela s'applique à

$$P([0, 1], \mathbb{R}) = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(t) = \sum_{i=0}^d a_i t^i \right\} \quad ,$$

le sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  formé par les applications polynomiales.

- (6) Norme produit. Si  $(E, \| \cdot \|_E)$  et  $(F, \| \cdot \|_F)$  sont des espaces normés, on peut définir une norme sur l'espace vectoriel  $E \times F$  par:

$$(x, y) \in E \times F, \quad \|(x, y)\| = \sup \{ \|x\|_E, \|y\|_F \} .$$

Le fait que les propriétés (1), (2) et (3) de la définition 1.2 sont satisfaites par ces exemples se vérifie facilement, à l'exception de la propriété (2) ( $\|f\| = 0 \Rightarrow f = 0$ ) pour la norme  $\| \cdot \|_1$  et  $\| \cdot \|_2$  de l'exemple (2), pour laquelle il faut utiliser le lemme suivant. La propriété (3) (inégalité du triangle) de la norme  $\| \cdot \|_2$  se démontre comme pour la norme euclidienne (voir [H-W, th. IV.1.1].)

**1.3 Lemme.** Soit  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue et supposons que  $f(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1]$ . Alors:

$$\int_0^1 f(t) dt = 0 \quad \implies \quad f \equiv 0 \quad .$$

*Preuve:* Si  $\exists t_0 \in [0, 1]$  avec  $f(t_0) > 0$ , puisque  $f$  est continue  $\exists \delta > 0, \delta < 1$ , tel que  $f(t) \geq f(t_0)/2$  si  $|t - t_0| \leq \delta, t \in [0, 1]$ . Au moins la moitié de l'intervalle  $[t_0 - \delta, t_0 + \delta]$  est inclus dans  $[0, 1]$ , et donc:

$$\int_0^1 f(t) dt \geq \int_{[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \cap [0, 1]} f(t) dt \geq \delta \cdot f(t_0)/2 > 0$$

ce qui contredit l'hypothèse.

*q.e.d.*

A l'aide de la notion de distance on va maintenant définir les notions de limite de suites, limite d'applications, continuité d'applications.

**1.4 Définition – limite d'une suite.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et soit  $\{x_n\} \subset X$  une suite dans  $X$ . On dit que cette suite converge vers  $a \in X$  si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

et on écrit alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a \quad , \quad \text{ou encore } x_n \rightarrow a \text{ si } n \rightarrow \infty$$

Remarquons que si elle existe, la limite d'une suite est unique. En effet, si on a  $a$  et  $a'$  dans  $X$  tels que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N'_\varepsilon \text{ tel que } n > N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a') < \varepsilon$$

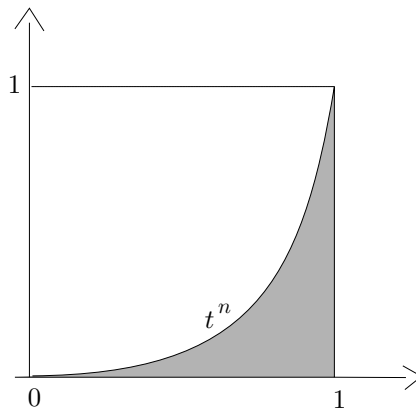
alors, si  $n \geq \sup \{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\}$ ,

$$d(a, a') \leq d(a, x_n) + d(x_n, a') \leq 2\varepsilon$$

et donc  $d(a, a') \leq 2\varepsilon, \forall \varepsilon > 0$ , d'où  $d(a, a') = 0$ , et il en suit que  $a = a'$ .

Par exemple, si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , dire qu'une suite  $\{f_n\}$  de fonctions converge vers une fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , c'est dire qu'elle converge uniformément vers  $f$ , ce qui implique en particulier la convergence ponctuelle: pour tout  $t \in [0, 1]$  fixé, la suite  $\{f_n(t)\} \subset \mathbb{R}$  converge vers  $f(t)$  (convergence dans  $\mathbb{R}$ ). Par contre, dire que cette suite converge pour la norme  $\| \cdot \|_1$  c'est dire qu'elle converge "en moyenne", ce qui en général n'implique pas la convergence ponctuelle. Par exemple, la suite de fonctions  $\{t^n\} \subset \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  ne converge pas pour  $\| \cdot \|_\infty$  (car ce ne pourrait être que vers la fonction identiquement nulle, et  $\|t^n - 0\|_\infty = 1$ ), alors que pour la norme  $\| \cdot \|_1$  elle converge effectivement vers la fonction identiquement nulle:

$$\|t^n - 0\|_1 = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \rightarrow 0 \text{ si } n \rightarrow \infty.$$



**Figure I.1** – L'aire hachurée représente la norme  $\| \cdot \|_1$  de la fonction  $t^n$

**1.5 Définition – limite d'une application.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application,  $a \in X$  et  $b \in Y$ . On dit que  $f(x)$  tend vers  $b$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon \text{ tel que } d_X(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d_Y(f(x), b) < \varepsilon$$

et on écrit alors:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = b, \text{ ou encore } f(x) \rightarrow b \text{ si } x \rightarrow a.$$

On dit que  $f$  est continue en  $a$  si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ; on dit que  $f$  est continue si elle est continue en tout point  $a$  de  $X$ .

La proposition suivante montre que l'étude de la limite d'une application peut se ramener à l'étude de limites de suites.

**1.6 Proposition.**

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall \text{ suite } \{x_n\} \text{ avec } x_n \rightarrow a, \text{ on a: } f(x_n) \rightarrow b$$

*Preuve:* Commençons par l'implication  $\Rightarrow$ . L'hypothèse dit:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.q. } d(x, a) < \delta_\varepsilon \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon$$

et si  $x_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty, \exists N_{\delta_\varepsilon} = N'_\varepsilon$  tel que  $n > N'_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \delta_\varepsilon$  ce qui implique encore que  $d(f(x_n), b) < \varepsilon$ , et donc on a bien que  $f(x_n) \rightarrow b$ .

Pour la réciproque, il nous faut raisonner par l'absurde. Nions le fait que  $f(x) \rightarrow b$  si  $x \rightarrow a$ :

$$\exists \varepsilon > 0 \text{ tel que } \forall \delta > 0, \exists x_\delta \text{ tel que } d(x_\delta, a) < \delta \text{ mais } d(f(x_\delta), b) \geq \varepsilon.$$

On peut prendre en particulier  $\delta = 1/n, n \in \mathbb{N}$ , ce qui nous fournit une suite  $\{x_n\} \subset X$  qui tend vers  $a$ , mais  $d(f(x_n), b) \geq \varepsilon, \forall n \in \mathbb{N}$ .

*q.e.d.*

Examinons par exemple la continuité de l'application "évaluation en 0":

$$ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad ev_0(f) = f(0).$$

Puisque  $|f(0) - g(0)| \leq \|f - g\|_\infty$ , on voit que  $ev_0$  est continue si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de  $\|\cdot\|_\infty$ . Par contre, la suite de fonctions  $(t-1)^n$  tend vers 0 pour la norme  $\|\cdot\|_1$ , puisque  $\|(t-1)^n\|_1 = 1/(n+1)$ , mais la suite  $ev_0((t-1)^n) = (-1)^n$  ne tend pas vers 0.

Nous donnons maintenant une condition qui assure que deux métriques (ou deux normes) sur un même espace définissent les mêmes notions de limite et de continuité.

**1.7 Définition – métriques équivalentes.** Soient  $d_1$  et  $d_2$  deux métriques sur l'ensemble  $X$ . On dira qu'elles sont équivalentes s'il existe deux constantes  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que:

$$\forall x, y \in X, \quad d_1(x, y) \leq k_1 \cdot d_2(x, y) \quad \text{et} \quad d_2(x, y) \leq k_2 \cdot d_1(x, y).$$

Si  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sont deux normes sur l'espace vectoriel  $E$ , on dira qu'elles sont équivalentes s'il existe des constantes  $k_1 > 0$  et  $k_2 > 0$  telles que:

$$\forall x \in E, \quad \|x\|_1 \leq k_1 \cdot \|x\|_2 \quad \text{et} \quad \|x\|_2 \leq k_2 \cdot \|x\|_1.$$

On vérifie immédiatement que si sur l'espace métrique  $X$  on remplace la métrique  $d_1$  par une métrique  $d_2$  qui lui est équivalente, une suite  $\{x_n\} \subset X$  a pour limite  $a \in X$  relativement à  $d_1$  si et seulement si c'est le cas relativement à  $d_2$ . Il en va de même pour la notion de continuité d'une application  $f : X \rightarrow Y$ , lorsque l'on remplace sur  $X$ , respectivement sur  $Y$ , les métriques par des métriques équivalentes. Aussi, les métriques associées à des normes équivalentes sont équivalentes.

L'exemple de l'application  $ev_0 : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  ci-dessus montre que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes. On vérifie tout de même que  $\forall f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \|f\|_1 \leq \|f\|_\infty$ , ce qui assure que toute suite de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  qui converge uniformément converge aussi en moyenne.

Les diverses normes vues sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes, car on vérifie facilement que:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty.$$

En fait on a même plus:

**1.8 Proposition.** *Toutes les normes sur  $\mathbb{R}^n$  sont équivalentes.*

*Preuve:* Soit  $\| \cdot \|'$  une norme quelconque sur  $\mathbb{R}^n$ . On va montrer qu'elle est équivalente à  $\| \cdot \|_1$ . Tout d'abord, tout  $x \in \mathbb{R}^n$  s'écrit  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  où les  $e_i$  sont les vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$  et donc:

$$\|x\|' = \left\| \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\|' \leq \sum |x_i| \|e_i\|' \leq M \cdot \sum_{i=1, \dots, n} |x_i| = M \cdot \|x\|_1$$

où  $M = \sup \{ \|e_i\|' , i = 1, \dots, n \}$

ce qui montre déjà la moitié de l'équivalence de ces deux normes.

Montrons maintenant que l'application:

$$\| \cdot \|' : (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1) \rightarrow \mathbb{R}$$

est continue. Voyons d'abord une conséquence de l'inégalité du triangle, valable pour toute norme sur un espace vectoriel  $E$ :

$$\forall x, y \in E, \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$

et donc

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

mais puisque les rôles de  $x$  et  $y$  sont interchangeables, cela prouve que

$$\| \|x\| - \|y\| \| \leq \|x - y\|$$

(ce qui prouve, entre autre, qu'une norme est toujours une application continue). Revenons à notre norme  $\| \cdot \|'$ . Pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  nous avons:

$$\| \|x\|' - \|y\|' \| \leq \|x - y\|' \leq M \|x - y\|_1$$

ce qui montre bien que  $\| \cdot \|' : (\mathbb{R}^n, \| \cdot \|_1) \rightarrow \mathbb{R}$  est continue. Il faut se rappeler maintenant que le bord de la boule de rayon 1 pour la norme  $\| \cdot \|_1$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$C = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_1 = 1 \}$$

est compact dans  $\mathbb{R}^n$ , et que toute fonction continue sur un compact de  $\mathbb{R}^n$  atteint son infimum et son maximum (voir [H-W, IV.2, th. (2.3)].) Cela implique que

$$\inf \{ \|x\|' , \text{ avec } x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \|x\|_1 = 1 \} = k > 0$$

car si cet infimum était nul, il serait atteint, ce qui voudrait dire qu'il existerait un vecteur  $x$  de  $C$ , donc non nul, avec  $\|x\|' = 0$ . Remarquons que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  non nul,  $x/\|x\|_1 \in C$  et donc:

$$\|x\|' = \|x\|_1 \left\| \frac{x}{\|x\|_1} \right\|' \geq \|x\|_1 \cdot k , \text{ i.e } \|x\|_1 \leq (1/k) \|x\|'$$

*q.e.d.*

**1.9 Remarque.** En fait il se peut que 2 métriques définissent les mêmes notions de convergence sans être équivalentes au sens de la définition 1.7. Par exemple, si  $(X, d)$  est un espace métrique, on vérifie facilement que la métrique  $d_1(x, y) = \inf \{ 1, d(x, y) \}$  définit la même notion de convergence que  $d$ , mais n'est pas équivalente à  $d$  si celle-ci n'est pas bornée.

---

## 2. Ouverts, fermés, adhérence.

**2.1 Définition – boule.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique,  $a$  un point de  $X$  et  $r > 0$ . On définit la boule (ouverte) de centre  $a$  et rayon  $r$  par:

$$B(a, r) = \{x \in X \mid d(x, a) < r\} .$$


---

**2.2 Définition – sous-ensemble ouvert.** Le sous-ensemble  $U$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit ouvert si :

$$\forall x \in U, \exists r > 0 \text{ tel que } B(x, r) \subset U .$$


---

### 2.3 Exemples.

- (1) Dans  $\mathbb{R}$  les boules ne sont autres que les intervalles ouverts bornés:  $B(x, r) = ]x - r, x + r[$ .
  - (2)  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{R}$ , car si  $x \neq 0$ ,  $B(x, |x|) \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .
  - (3) Plus généralement, dans un espace métrique  $(X, d)$ , si  $a \in X$ ,  $X \setminus \{a\}$  est ouvert.
  - (4)  $\mathbb{Q}$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}$ , car toute boule de  $\mathbb{R}$  contient des irrationnels.
  - (5) L'ensemble  $U = \{f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) \neq 0\}$  est un ouvert de  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  muni de  $\|\cdot\|_\infty$ , car si  $f \in U$ ,  $B(f, |f|) \subset U$ . Qu'en est-il pour  $\|\cdot\|_1$ ?
  - (6)  $\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})$  n'est pas ouvert dans  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , car dans toute boule de centre  $0 \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  on trouve des fonctions continues qui ne sont pas polynomiales (par exemple celles de la forme  $r \cdot \sin(2\pi t)$ ).
  - (7) Les boules elles-mêmes sont des ouverts: si  $x \in B(a, r)$ , alors  $r' = r - d(x, a) > 0$ , et  $B(x, r') \subset B(a, r)$ , car si  $y \in B(x, r')$ ,  $d(y, a) \leq d(y, x) + d(x, a) < r' + d(x, a) = r$ .
  - (8) Si l'ensemble  $X$  est muni de la métrique discrète, tout sous-ensemble est ouvert.
- 

**2.4 Définition – sous-ensemble fermé.** Le sous-ensemble  $F$  de l'espace métrique  $(X, d)$  est dit fermé si son complémentaire  $X \setminus F$  est ouvert.

---

Par exemple, les sous-ensembles constitués par un point sont fermés.

**2.5 Définition – adhérence d'un sous-ensemble.** Soit  $A \subset X$  un sous-ensemble de l'espace métrique  $X$ . On définit l'adhérence  $\overline{A}$  de  $A$  par:

$$\overline{A} = \{x \in X \mid \forall r > 0, B(x, r) \cap A \neq \emptyset\}$$


---

Remarquons que  $A \subset \overline{A}$ , puisque si  $x \in A$ ,  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \ni x$ . La prochaine proposition fait le lien entre la notion de fermé et d'adhérence, et montre qu'on peut exprimer l'adhérence en termes de limites de suites.

**2.6 Proposition.**

(1)  $A$  est fermé  $\Leftrightarrow A = \overline{A}$ .

(2)  $\overline{A} = \{x \in X \mid \exists \text{ une suite } \{x_n\} \subset A \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x\}$ .

*Preuve:* (1) Si  $A$  est fermé et  $x \in X \setminus A$ , puisque ce dernier est ouvert  $\exists r > 0$  t.q.  $B(x, r) \subset X \setminus A$  et  $x \notin \overline{A}$ ; donc  $A = \overline{A}$ .

Réciproquement, si  $A = \overline{A}$  et  $x \in X \setminus A$ , alors  $x \notin \overline{A}$ , donc  $\exists r > 0$  t.q.  $B(x, r) \cap A = \emptyset$ , c'est-à-dire  $B(x, r) \subset X \setminus A$ .

(2) Si  $x_0 \in \overline{A}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ ,  $B(x, 1/n) \cap A \neq \emptyset$ , donc  $\exists x_n \in B(x, 1/n) \cap A$ , et alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ .

Réciproquement, si  $\exists \{x_n\} \subset A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = x$ ,  $\forall r > 0$ ,  $B(x, r) \cap A \ni x_n$  pour  $n \geq N_r$ , et donc on a bien que  $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$ .

*q.e.d.*

**2.7 Exemples.**

(1) L'adhérence du sous-ensemble  $\mathbb{Q}$  de  $\mathbb{R}$  est  $\mathbb{R}$  lui-même puisque tout nombre réel est limite de rationnels.

(2) Soit  $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ . Alors  $\overline{A} = A \cup \{0\}$ .

(3) Un théorème de Weierstrass (voir le théorème **2.10** à la fin de ce §) affirme que toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  est limite uniforme d'une suite de polynômes. Cela peut s'exprimer en disant que si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de  $\| \cdot \|_\infty$  on a:

$$\overline{\mathcal{P}([0, 1], \mathbb{R})} = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}).$$

(4) L'adhérence de l'intervalle  $]0, 1]$  dans l'espace  $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$  est le même intervalle  $]0, 1]$  (le point 0 est bien limite d'une suite dans  $]0, 1]$ , mais il n'appartient pas à l'espace ambiant considéré  $\mathbb{R}_+$  !). Cela montre qu'il est important de savoir dans quel espace on travaille lorsqu'on considère les notions d'ouvert, fermé etc. . . , bien que souvent cela ne soit pas dit explicitement.

(5) Si  $A \subset \mathbb{R}$  est borné, alors  $\inf(A)$ ,  $\sup(A) \in \overline{A}$ .

La notion suivante est parfois utile.

**2.8 Définition - voisinages.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique et  $a \in X$ . On dit que  $V \subset X$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$  s'il existe un ouvert  $U \subset X$  tel que  $a \in U \subset V$ .

Pour terminer ce §, citons sans preuve une proposition qui montre que l'on peut exprimer la continuité sans faire appel à la notion de distance, mais seulement aux ouverts, fermés ou voisinages.

**2.9 Proposition.** Soient  $(X, d_X)$  et  $(Y, d_Y)$  des espaces métriques,  $f : X \rightarrow Y$  une application et  $a \in X$ . On a:

(1)  $f$  continue au point  $a \Leftrightarrow \forall V$  voisinage de  $f(a)$  dans  $Y$ ,  $f^{-1}(V)$  est un voisinage de  $a$  dans  $X$ .

(2)  $f : X \rightarrow Y$  est continue  $\Leftrightarrow \forall V \subset Y$  ouvert,  $f^{-1}(V)$  est ouvert dans  $X \Leftrightarrow \forall F \subset Y$  fermé,  $f^{-1}(F)$  est fermé dans  $X$ .

■

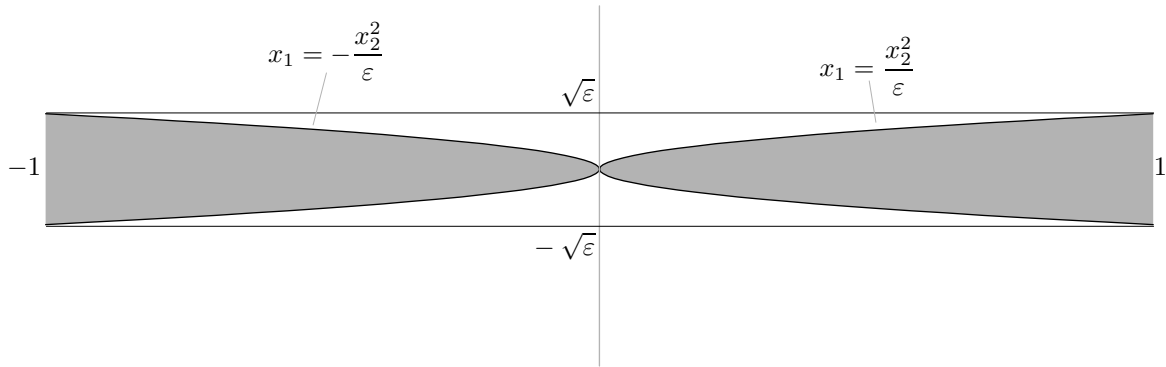
Par exemple, considérons la fonction

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_2^2}{x_1} & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

L'ensemble

$$f^{-1}(] - \varepsilon, \varepsilon[) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \neq 0, x_2^2 < \varepsilon x_1\} \cup \{(0, x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$





**Figure I.2** –  $f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon])$  n'est pas un voisinage de  $(0, 0)$  :  $f$  n'est donc pas continue en  $(0, 0)$

est représenté en gris sur la figure **I.2**. On voit que ce n'est pas un voisinage de  $(0, 0)$ , ce qui, d'après la proposition **2.9(1)**, montre que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

*La preuve de Bernstein du théorème d'approximation de Weierstrass*

Le théorème d'approximation de Weierstrass dit que toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  peut être approchée par des polynômes. On va présenter la preuve de S.N. Bernstein (1912) de ce théorème, qui définit explicitement, en termes des valeurs de  $f$ , une suite de polynômes  $f_n(x)$  convergent uniformément vers  $f$ , pour  $x \in [0, 1]$ . Soient  $k$  et  $n$  des entiers; les polynômes de Bernstein de  $f$  sont définis par les expressions :

$$B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad , \quad k, n \geq 0 \quad , \quad k \leq n \quad , \quad \text{où} \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Si  $f \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ , son  $n$ -ième polynôme de Bernstein est défini par :

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k} \quad .$$

**2.10 Théorème.** *La suite  $\{f_n(x)\}_{n \geq 1}$  converge uniformément vers  $f(x)$  pour  $x \in [0, 1]$ .*

Cela équivaut à dire que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\|_\infty = 0$ , ou encore :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ (indépendant de } x) \text{ tel que } n \geq N_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon \quad , \quad \forall x \in [0, 1] \quad .$$

D'abord deux lemmes; le premier donne deux propriétés fondamentales des polynômes de Bernstein.

**2.11 Lemme.** *Les polynômes de Bernstein vérifient les propriétés suivantes :*

i)

$$B_n^k(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0, 1]$$

ii)

$$\sum_{k=0}^n B_n^k(x) = 1 \quad , \quad \forall n \geq 0$$

*Preuve:* i) suit du fait que  $0 \leq x \leq 1$ . Pour ii) on utilise la formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où il suffit de poser  $a = x$  et  $b = 1 - x$ .

*q.e.d.*

Le deuxième lemme consiste en des calculs avec les coefficients binomiaux.

**2.12 Lemme.**

i)

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n \cdot x$$

ii)

$$\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = n^2 \cdot x^2 + n \cdot x(1-x)$$

*Preuve:* Pour i) :

$$\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} = n \cdot x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} = n \cdot x$$

Pour ii) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= \sum_{k=1}^n k^2 \frac{n \cdot (n-1)!}{k \cdot (k-1)! (n-k)!} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= n \cdot x \sum_{k=1}^n k \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \text{ (on pose } k = \ell + 1) = n \cdot x \cdot \left( \sum_{\ell=0}^{n-1} (\ell+1) \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell} \right) \\ &= n \cdot x \cdot \left( \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \ell \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}}_{=(n-1) \cdot x \text{ par i)}} + \underbrace{\sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} x^\ell (1-x)^{n-1-\ell}}_{=1} \right) \\ &= n \cdot x \cdot ((n-1) \cdot x + 1) = n^2 \cdot x^2 + n \cdot x \cdot (1-x) \end{aligned}$$

*Preuve du théorème :* Puisque  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue et  $[0, 1]$  compact, d'après **[H-W, th. III.4.5]**  $f$  est uniformément continue. Donc, si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $\delta_\varepsilon > 0$  (indépendant de  $x$ ) tel que

$$|x - x'| < \delta_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon$$

Posons  $\delta = \delta_{\varepsilon/2}$ , de sorte que  $|x - x'| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon/2$ ; soit  $M = \sup \{|f(x)|, x \in [0, 1]\}$ . Alors :

$$\begin{aligned} |f(x) - f_n(x)| &= \left| f(x) \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}}_{=1} - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \underbrace{\left| \sum_{|x - \frac{k}{n}| \geq \delta} (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|}_{=(I)} + \underbrace{\left| \sum_{|x - \frac{k}{n}| < \delta} (f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right|}_{=(II)} \end{aligned}$$

Or :

$$(II) \leq \sum_{\substack{|x - \frac{k}{n}| < \delta \\ < \varepsilon/2}} |f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} < \varepsilon/2 \cdot \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon/2$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
 \text{(I)} &\leq 2M \cdot \sum_{|x-\frac{k}{n}| \geq \delta} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leq 2M \sum_{k=0}^n \left( \frac{x-k/n}{\delta} \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
 &= \frac{2M}{\delta^2} \left( x^2 \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \frac{2x}{n} \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n k^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right) \\
 &\stackrel{\text{(lemme 2.12)}}{=} \frac{2M}{\delta^2} \left( x^2 - \frac{2x}{n} \cdot n \cdot x + \frac{1}{n^2} (n^2 \cdot x^2 + n \cdot x(1-x)) \right) = \frac{2M}{n\delta^2} \cdot x(1-x) \\
 &\qquad\qquad\qquad \text{(puisque } x(1-x) \leq 1/4) \leq \frac{2M}{4n\delta^2} = \frac{M}{2n\delta^2}
 \end{aligned}$$

Finalement :

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \text{(I)} + \text{(II)} < \varepsilon/2 + \frac{M}{2n\delta^2}$$

et il suffit de prendre  $n$  assez grand pour que  $\frac{M}{2n\delta^2} \leq \varepsilon/2$  pour assurer que  $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ .  
*q. e. d.*

Pour comprendre intuitivement le résultat précédent, il faut étudier le polynôme  $B_n^k(x)$  : c'est un polynôme positif, qui atteint son maximum au point  $x = \frac{k}{n}$ , et dont les valeurs se rapprochent rapidement de 0 à mesure que l'on s'éloigne de  $\frac{k}{n}$  (voir figure I.3). L'expression  $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \binom{n}{k} x^k \cdot (1-x)^{n-k}$  peut être vue comme une moyenne pondérée des valeurs de  $f$  aux points  $\frac{k}{n}$ , où le poids de  $f(\frac{k}{n})$  est  $B_n^k(x)$ . Donc, si  $x$  est proche de  $\frac{k}{n}$ , le poids de  $f(\frac{k}{n})$  est plus grand que le poids des autres termes; cette moyenne sera donc proche de  $f(\frac{k}{n})$ , qui est proche de  $f(x)$ , puisque  $f$  est continue et que  $x$  est proche de  $\frac{k}{n}$ .

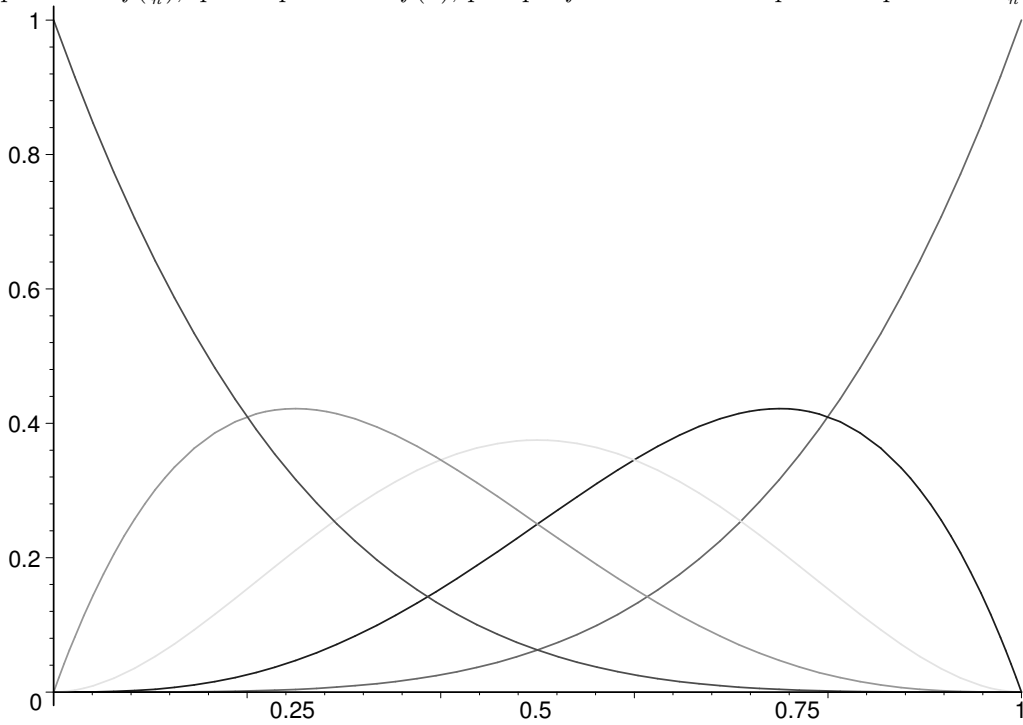


Figure I.3 – Les polynômes de Bernstein de degré 4

Si au lieu de l'intervalle  $[0, 1]$  on travaille avec un intervalle  $[a, b]$ , on se ramène au cas de  $[0, 1]$  par l'application  $\phi(x) = (x - a)/(b - a)$ , qui induit une bijection de  $[a, b]$  sur  $[0, 1]$ . Posons :

$$\hat{B}_n^k(x) = B_n^k(\phi(x)) = \frac{1}{(b-a)^n} \binom{n}{k} (x-a)^k (b-x)^{n-k} \quad .$$

Alors, si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est continue, la suite de polynôme  $\sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n}) \hat{B}_n^k(x)$  converge uniformément vers  $f(x)$ , pour  $x \in [a, b]$ .

### 3. Espaces complets.

**3.1 Définition – suite de Cauchy.** On dit que la suite  $\{x_n\}$  dans l'espace métrique  $(X, d)$  est de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n, m \geq N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

On écrit alors:  $d(x_n, x_m) \rightarrow 0, n, m \rightarrow \infty$ .

**3.2 Remarque.** Toute suite qui converge est de Cauchy: si  $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n) = a$ , cela veut dire que:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_\varepsilon \text{ tel que } n > N_\varepsilon \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

et donc

$$n, m > N_{\varepsilon/2} \Rightarrow d(x_n, x_m) \leq d(x_n, a) + d(a, x_m) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Par contre il y a des suites de Cauchy qui ne convergent pas: dans l'espace  $] - 1, +1[$ , la suite  $\{1 - 1/n\}$  est une suite de Cauchy, puisque la même suite converge dans  $\mathbb{R}$  vers 1, mais  $1 \notin ] - 1, +1[$ . Cet exemple peut paraître artificiel, mais la remarque **3.4** montre que ce n'est pas le cas.

Remarquons encore que 2 métriques équivalentes définissent la même notion de suite de Cauchy.

**3.3 Définition – espace métrique complet.** L'espace métrique  $(X, d)$  est dit complet si toute suite de Cauchy dans  $X$  converge (dans  $X$ ).

L'intérêt des espaces complets est de pouvoir y représenter les éléments comme limites de suites de Cauchy. Par exemple, dans  $\mathbb{R}$  on a:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ce qui définit parfaitement le nombre  $e$  une fois que l'on a montré que  $(1 + 1/n)^n$  est une suite de Cauchy.

L'exemple par excellence d'espace complet est  $\mathbb{R}^n$ , muni d'une norme quelconque (elles sont toutes équivalentes). Un des buts principaux de ce chapitre est de montrer que  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty)$  est complet.

**3.4 Remarque.** La construction de  $\mathbb{R}$  à partir de  $\mathbb{Q}$  peut se généraliser de la façon suivante : pour tout espace métrique  $(X, d)$  on peut construire (de manière essentiellement unique) un espace  $(\tilde{X}, \tilde{d})$  qui le contient, qui est complet et tel que l'adhérence de  $X$  dans  $\tilde{X}$  est égale à  $\tilde{X}$ . On appelle  $\tilde{X}$  le complété de  $X$ ; on va esquisser sa construction. On pose :

$$\tilde{X} = \{ \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset X \mid \{x_n\} \text{ est une suite de Cauchy} \} / \sim$$

où  $\sim$  est la relation d'équivalence qui identifie deux suites  $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  et  $\{x'_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  si  $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x'_n) = 0$ . En désignant par  $[x_n]$  la classe d'équivalence de la suite  $\{x_n\}$ , on définit une métrique sur  $\tilde{X}$  en posant  $d([x_n], [y_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y_n)$ ; on montre que cette limite existe (en utilisant que  $\mathbb{R}$  est complet!) et qu'elle ne dépend pas des représentants de  $[x_n]$  et  $[y_n]$  que l'on choisit. On définit une inclusion  $i : X \rightarrow \tilde{X}$  par  $i(x) = [x, x, \dots, x, \dots]$ . On montre enfin que  $\tilde{X}$  est complet et que l'adhérence de  $i(X)$  est égale à  $\tilde{X}$ .

**3.5 Exemple.**

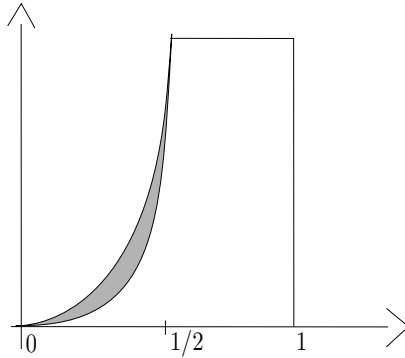
L'espace  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$  n'est pas complet: la suite de fonctions continues

$$f_n(t) = \begin{cases} (2t)^n & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ 1 & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est de Cauchy pour  $\| \cdot \|_1$ , puisque

$$\int_0^1 |f_n(t) - f_m(t)| dt = (1/2) \left| 1/(n+1) - 1/(m+1) \right|$$

mais si  $f_n$  convergeait, sa limite  $f(t)$  devrait être nulle dans  $[0, 1/2[$ , égale à 1 dans  $[1/2, 1]$ . Cela suggère d'ailleurs que l'on pourrait compléter  $(\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_1)$  en considérant des fonctions plus générales que des fonctions continues.



**Figure I.4** – L'aire hachurée représente la distance pour la norme  $\| \cdot \|_1$  entre 2 termes de la suite  $f_n(t)$

Les exemples d'espaces complets dont nous aurons besoin par la suite seront construits à l'aide des trois propositions qui suivent, à l'exception de l'espace  $\mathcal{K}\mathbb{R}^n$  du §5.3.

**3.6 Théorème.** Soit  $X$  un ensemble. Alors l'espace  $\mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  de fonctions bornées de  $X$  dans  $\mathbb{R}^p$  muni de la norme  $\|f\|_\infty = \sup \{\|f(x)\|_{\mathbb{R}^p}, x \in X\}$  est complet, où  $\| \cdot \|_{\mathbb{R}^p}$  est l'une des normes équivalentes sur  $\mathbb{R}^p$ .

*Preuve:* Soit  $\{f_n\}$  une suite de Cauchy. Pour tout  $x \in X$  fixé, la suite des valeurs correspondantes:  $\{f_n(x)\} \subset \mathbb{R}^p$  est de Cauchy, et comme  $\mathbb{R}^p$  est complet, elle admet une limite. On définit l'application  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  en posant:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)).$$

C'est un bon candidat pour la limite de la suite  $f_n$ . Le reste de la preuve consiste à montrer que:

- (1)  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^p)$  (c'est-à-dire:  $f$  est bornée).
- (2) La suite  $f_n$  tend vers  $f$  au sens de la norme  $\| \cdot \|_\infty$  (c'est-à-dire la convergence de  $f_n$  vers  $f$  a lieu non seulement point par point, mais uniformément sur  $X$ ).

(1) Utilisons l'hypothèse que  $f_n$  est de Cauchy avec  $\varepsilon = 1$ :

$$\exists N_1 \text{ tel que } n, m \geq N_1 \Rightarrow \|f_n(x) - f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} < 1, \forall x \in X \quad .$$

Puisque  $f_{N_1} : X \rightarrow \mathbb{R}^p$  est bornée,  $\exists M$  tel que  $\|f_{N_1}(x)\| \leq M, \forall x \in X$ , et donc

$$\|f_m(x)\|_{\mathbb{R}^p} \leq \|f_m(x) - f_{N_1}(x)\| + \|f_{N_1}(x)\| < 1 + M, \forall x \in X, m \geq N_1$$

et donc  $f(x) \leq 1 + M$  et  $f \in \mathcal{B}(X, \mathbb{R}^n)$ .

(2) Soit  $\varepsilon > 0$  et  $x \in X$ . Puisque  $f_k(x) \rightarrow f(x)$ ,  $\exists N_{\varepsilon, x}^1$  tel que

$$k \geq N_{\varepsilon, x}^1 \Rightarrow \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon.$$

Pour ce  $\varepsilon$ ,  $\exists N_{\varepsilon}^2$  tel que

$$k, \ell > N_{\varepsilon}^2 \Rightarrow \|f_k(x) - f_{\ell}(x)\| < \varepsilon \forall x \in X$$

puisque la suite d'applications  $\{f_k\}$  est de Cauchy. Donc, si  $\ell \geq N_{\varepsilon}^2$  et  $k \geq \sup\{N_{x, \varepsilon}^1, N_{\varepsilon}^2\}$  on a :

$$\|f_{\ell}(x) - f(x)\| \leq \|f_{\ell}(x) - f_k(x)\| + \|f_k(x) - f(x)\| < \varepsilon + \varepsilon$$

et donc

$$\ell \geq N_{\varepsilon}^2 \Rightarrow \|f_{\ell}(x) - f(x)\|_{\infty} < 2\varepsilon \forall x \in X$$

*q. e. d.*

**3.7 Proposition.** *Soit  $X$  un espace complet et  $A \subset X$ . On a :*

$$A \text{ est complet} \Leftrightarrow A \text{ est fermé} .$$

*Preuve:* Si  $A \subset X$  est complet et  $\{a_n\} \subset A$  est une suite qui converge vers  $x \in X$ , alors  $\{a_n\}$  est une suite de Cauchy (puisque dans  $X$  elle converge). Mais alors elle doit converger dans  $A$ , puisque celui-ci est complet, donc  $x \in A$ . C'est dire que  $A$  est fermé dans  $X$ . Notez que jusqu'ici l'on n'a pas utilisé le fait que  $X$  est complet.

Si  $A \subset X$  est fermé, toute suite de Cauchy  $\{a_n\} \subset A$  doit converger dans  $X$ , puisque celui-ci est complet. Mais puisque  $A$  est fermé, cette limite doit appartenir à  $A$ , ce qui prouve que  $A$  est complet.

*q. e. d.*

**3.8 Proposition.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  un compact. Alors le sous-espace  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  de  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  est fermé pour la norme  $\|\cdot\|_{\infty}$ .*

*Preuve:* Il s'agit de voir qu'une suite d'applications continues qui converge uniformément dans  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  a pour limite une fonction continue. Soit donc  $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  une suite qui converge uniformément vers  $f \in \mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  et soient  $x, x_0 \in K$ . On a :

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq \|f(x) - f_n(x)\| + \|f_n(x) - f_n(x_0)\| + \|f_n(x_0) - f(x_0)\|$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, il existe  $N_{\varepsilon}$  tel que :

$$n \geq N_{\varepsilon} \Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\| < \varepsilon \text{ et } \|f_n(x_0) - f(x_0)\| < \varepsilon$$

puisque la suite converge au sens de  $\|\cdot\|_{\infty}$ . Il existe aussi un  $\delta_{n, \varepsilon}$  tel que

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{n, \varepsilon} \Rightarrow \|f_n(x) - f_n(x_0)\|_{\mathbb{R}^p} < \varepsilon$$

puisque  $f_n$  est continue. Donc

$$\|x - x_0\|_{\mathbb{R}^n} < \delta_{N_{\varepsilon}, \varepsilon} = \delta_{\varepsilon} \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < 3\varepsilon$$

*q. e. d.*

**3.9 Corollaire.** *Soit  $K \subset \mathbb{R}^p$  compact. Alors  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  muni de la métrique induite par  $\|\cdot\|_{\infty}$  sur  $\mathcal{B}(K, \mathbb{R}^p)$  (i.e. convergence uniforme) est complet ■.*

**3.10 Corollaire.** Soit  $K \subset \mathbb{R}^n$  compact et  $F \subset \mathbb{R}^p$  fermé. Alors le sous-espace de  $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$  :

$$\mathcal{C}(K, F) = \{f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p) \mid f(x) \in F \forall x \in K\}$$

est complet.

*Preuve:* Il suffit de montrer que ce sous-espace est fermé. Or si  $\{f_n\} \subset \mathcal{C}(K, F)$  est une suite d'applications ayant pour limite  $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R}^p)$ , on a

$$\forall x \in K, \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x)) = f(x) \in F$$

puisque  $F$  est fermé, et donc  $f \in \mathcal{C}(K, F)$ .

*q.e.d.*

## 4. Le théorème du point fixe et premières applications

Le théorème qui suit sera utilisé pour la construction de solutions d'équations de toutes sortes.

**4.1 Théorème.** Soit  $(X, d)$  un espace métrique complet et soit  $T : X \rightarrow X$  une application pour laquelle il existe  $q \in \mathbb{R}$ ,  $0 < q < 1$ , tel que

$$d(T(x), T(y)) \leq qd(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Alors il existe un unique point  $\omega \in X$ , tel que:

$$T(\omega) = \omega.$$

De plus, si l'on note par  $T^n(x) = \underbrace{T(T(\dots T(x)\dots))}_{n\text{-fois}}$  l'image de  $x$  par le  $n$ -ième itéré de  $T$ , on a:

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)) \quad \forall x \in X$$

et la vitesse de la convergence peut être estimée par:

$$d(\omega, T^n(x)) \leq d(x, T(x)) \frac{q^n}{1-q}.$$

Une application qui satisfait les hypothèses de **4.1** est appelée une transformation contractante et  $q$  est appelée une constante de contraction. Une telle application est uniformément continue:

$$d(x, y) < \frac{\varepsilon}{q} \Rightarrow d(T(x), T(y)) < q \frac{\varepsilon}{q} = \varepsilon$$

et on a même l'expression explicite  $\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{q}$ .

Un point  $\omega \in X$  tel que  $T(\omega) = \omega$  est appelé point fixe de  $T$ .

*Preuve du théorème:* Si  $\omega$  et  $\omega'$  sont des points fixes, alors

$$d(\omega, \omega') = d(T(\omega), T(\omega')) \leq qd(\omega, \omega')$$

ce qui n'est possible que si  $d(\omega, \omega') = 0$ , c'est-à-dire  $\omega = \omega'$  et donc il y a au plus un point fixe.

Montrons que si  $x \in X$ , la suite  $\{T^n(x)\} \subset X$  est de Cauchy. Notons pour commencer que si  $\ell \in \mathbb{N}$ ,

$$d(T^{\ell+1}(x), T^\ell(x)) \leq qd(T^\ell(x), T^{\ell-1}(x)) \leq \dots \leq q^\ell d(T(x), x).$$

Pour  $n, k \in \mathbb{N}$  on a :

$$\begin{aligned} d(T^{n+k}(x), T^n(x)) &\leq d(T^{n+k}(x), T^{n+k-1}(x)) + d(T^{n+k-1}(x), T^{n+k-2}(x)) + \dots + d(T^{n+1}(x), T^n(x)) \\ &\leq d(T(x), x)q^n(1 + q + \dots + q^{k-1}) < d(T(x), x)\frac{q^n}{1-q} \quad (\#) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité s'obtient en remplaçant la série géométrique finie  $1 + q + \dots + q^{k-1}$  de raison  $q$  par la série infinie, dont la somme vaut  $1/(1-q)$ . On voit que si  $n \rightarrow \infty$ ,  $d(T^{n+k}(x), T^n(x)) \rightarrow 0$  et donc la suite  $T^n(x)$  est de Cauchy, et par conséquent elle converge vers une limite que nous appellerons  $\omega$ , dont nous allons montrer que c'est un point fixe de  $T$ . D'abord, remarquons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n+1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)).$$

Ensuite, le fait que  $T$  est contractante entraîne qu'elle est continue, et donc :

$$\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^{n+1}(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T(T^n(x))) = T(\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x))) = T(\omega).$$

Enfin, si dans l'inégalité (#) on fait tendre  $k$  vers l'infini, on voit que :

$$d(\omega, T^n(x)) \leq d(T(x), x)\frac{q^n}{1-q}$$

*q.e.d.*

L'exemple suivant est une application typique du théorème du point fixe et des notions développées dans ce chapitre. Soit  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue pour laquelle il existe  $q \in \mathbb{R}$  vérifiant  $0 < q < 1$ , tel que  $|K(x, t)| \leq q$ ,  $\forall x, t \in [0, 1]$ , et soit  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue. On aimerait trouver une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continue satisfaisant l'équation intégrale suivante (équation de Fredholm) :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x, t)f(t)dt.$$

Cela se ramène facilement à la recherche d'un point fixe en définissant  $T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  par :

$$T(g)(x) = \phi(x) + \int_0^1 K(x, t)g(t)dt.$$

On vérifie sans peine que :

- (1)  $T$  est une transformation, c'est-à-dire que si  $g \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ ,  $T(g) \in \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ .
- (2)  $T$  est contractante si l'on munit  $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$  de la norme  $\| \cdot \|_\infty$ , de constante de contraction  $q$ .

Puisque d'après **3.9** ( $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}), \| \cdot \|_\infty$ ) est complet, on peut appliquer le théorème **4.1**, qui implique que l'équation intégrale ci-dessus possède une et une seule solution et nous fournit une méthode pour approcher cette solution : on peut par exemple itérer  $T$  sur la fonction 0. En particulier, dans le cas où  $\phi \equiv 0$ , l'unique solution est  $f \equiv 0$ .

### La méthode de Newton

Un autre exemple d'application de **4.1** nous est fourni par la méthode de Newton pour la recherche de racines de polynômes (ou plus généralement de fonctions  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ), dont nous présentons maintenant deux variantes.



**4.2 Proposition.** Soit  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable. Supposons que  $f'(x_0) \neq 0$  et qu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < q < 1$  et que:

$$(1) \quad \left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| \leq q \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$(2) \quad \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq r(1 - q).$$

Alors  $f$  possède une unique racine  $\omega$  dans  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . De plus, pour tout  $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , la suite  $x_n$  définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)}, \quad n \geq 1$$

a pour limite  $\omega$ . Enfin, la vitesse de convergence de  $\{x_n\}$  est estimée par

$$|x_n - \omega| \leq \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_0)} \right| \frac{q^{n-1}}{1 - q}$$

et si l'on prend  $x_1 = x_0$  :

$$|x_n - \omega| \leq r q^{n-1}.$$

Notons que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  (c'est-à-dire à dérivée continue) les hypothèses de cette proposition seront satisfaites si  $x_0$  est suffisamment proche d'une racine  $\omega$  de  $f$  en laquelle la dérivée de  $f$  est non nulle et si  $r$  est assez petit.

*Preuve:* Posons:

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$$

et vérifions que  $t$  est une transformation contractante de  $[x_0 - r, x_0 + r]$  de constante de contraction  $q$ ; le résultat suivra alors de **4.1**, puisque  $t(x) = x$  équivaut à  $f(x) = 0$ . On a:

$$t'(x) = 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)}$$

et donc si  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ,  $|t'(x)| \leq q$ . On déduit alors du théorème des accroissements finis (voir [**H-W**, chap. III.6.11]) que

$$\forall x, y \in [x_0 - r, x_0 + r], x < y, \quad \exists \xi \in [x, y] \text{ tel que } t(x) - t(y) = t'(\xi)(x - y)$$

et donc

$$|t(x) - t(y)| \leq q|x - y|$$

à cause de l'hypothèse (1).

Si  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$ ,

$$|t(x) - x_0| \leq |t(x) - t(x_0)| + |t(x_0) - x_0| \leq q \cdot r + r \cdot (1 - q) = r$$

à cause de la première partie de la preuve et de l'hypothèse (2). Cela prouve bien que  $t$  est une transformation contractante de  $[x_0 - r, x_0 + r]$ , et en fait  $x_n = t^{n-1}(x_1)$  et  $x_1 - t(x_1) = f(x_1)/f'(x_0)$ . Les affirmations suivent alors de **4.1**.

*q.e.d.*

**4.3 Variante de la proposition précédente.** Soit  $f : [x_0 - r, x_0 + r] \rightarrow \mathbb{R}$  une application deux fois dérivable. Supposons que  $f'(x) \neq 0$ ,  $x \in [x_0 - r, x_0 + r]$  et qu'il existe  $q \in \mathbb{R}$  tel que  $0 < q < 1$  et que:

$$(1) \quad \left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq q \quad \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$$

$$(2) \quad \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| \leq r(1 - q).$$

Alors  $f$  possède une unique racine  $\omega$  dans  $[x_0 - r, x_0 + r]$ . De plus, pour tout  $x_1 \in [x_0 - r, x_0 + r]$ , la suite  $x_n$  définie récursivement par

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

a pour limite  $\omega$ . On a

$$|x_n - \omega| \leq \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| \frac{q^{n-1}}{1 - q}$$

et si l'on prend  $x_1 = x_0$  alors

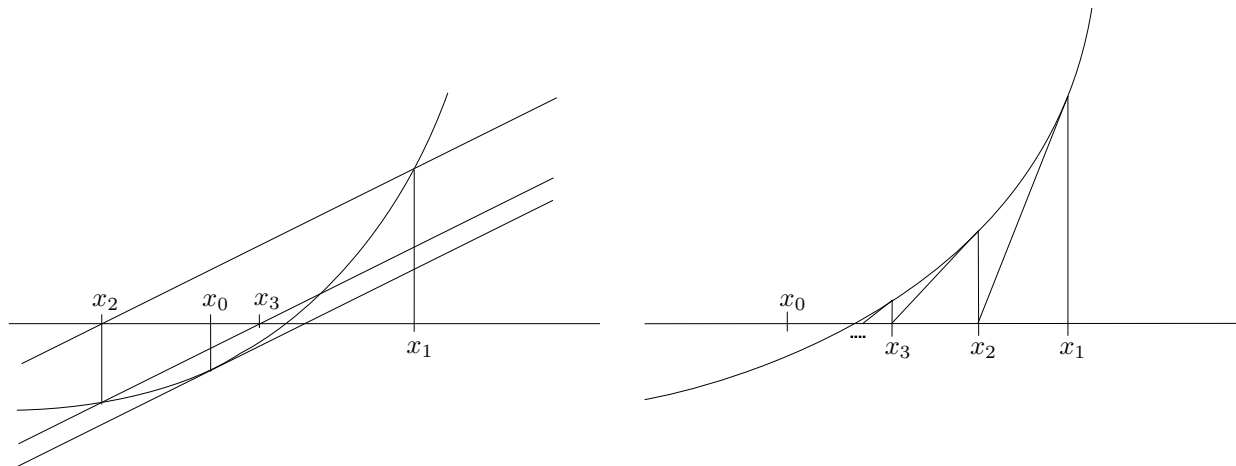
$$|x_n - \omega| \leq r q^{n-1}$$

*Preuve:* On reprend le schéma de la preuve précédente avec  $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ . Ici on a:

$$t'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$$

et l'hypothèse (1) nous assure alors que  $t$  est contractante. Le fait que  $t$  est une transformation de  $[x_0 - r, x_0 + r]$  se montre comme dans la proposition précédente.

*q.e.d.*



**Figure I.5** – Méthode de Newton selon 4.2 et selon 4.3

Par exemple, calculons la racine de 2 à l'aide des propositions qui précèdent. On pose  $f(x) = x^2 - 2$  et le problème est de calculer la racine positive de  $f$ . On commence par faire un bon choix pour  $x_0$  et  $r$ :

$$x_0 = 3/2 \quad , \quad r = \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\left| 1 - \frac{f'(x)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{3-2x}{3} \right| \leq \frac{1}{3}$$

et d'autre part

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \frac{1}{12};$$

on peut donc prendre  $q = 1/3$ . On doit itérer la fonction

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)} = \frac{3x - x^2 + 2}{3}$$

On commence l'itération avec  $x_1 = x_0 = 3/2$  et on obtient

$$x_2 = \frac{17}{12} (= 1,41\overline{6}) \dots = 1,41\overline{6}, \quad x_3 = \frac{611}{432} (= 1,4143\overline{518}), \quad \text{etc...}$$

L'estimation de la convergence donne  $|x_n - \sqrt{2}| \leq (1/2)(1/3)^{n-1}$ .

Essayons maintenant avec la variante, en prenant toujours  $x_0 = 3/2$ ,  $r = 1/2$ . On doit itérer la fonction

$$t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{x^2 + 2}{2x}$$

On vérifie que

$$\left| \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2} \right| \leq \frac{1}{2}$$

et que

$$\left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \frac{1}{12}.$$

On peut donc prendre  $q = 1/2$ . L'estimation de la convergence donne  $|x_n - \sqrt{2}| \leq (1/2)^n$ . En partant de  $x_1 = 3/2$  on obtient:

$$x_2 = \frac{17}{12} (= 1,41\overline{6}), \quad x_3 = \frac{577}{408} (= 1,4142156862745098039), \quad \text{etc...}$$

#### Equations intégrales de Volterra

D'abord on va étendre un peu les possibilités d'applications du théorème 4.1.

**4.4 Proposition.** Soit  $X$  un espace métrique complet et  $T : X \rightarrow X$  une transformation telle qu'il existe un entier positif  $N$  tel que la  $N$ -ième itérée  $T^N$  de  $T$  soit contractante. Alors  $T$  admet un et un seul point fixe  $\omega$ , et  $\forall x \in X$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (T^n(x)) = \omega$ .

*Preuve:* On peut appliquer 4.1 à  $T^N$ , et donc  $T^N$  possède un unique point fixe  $\omega$ , et  $\lim_{n \rightarrow \infty} T^{n \cdot N}(x) = \omega$ ,  $\forall x \in X$ . Mais alors:

$$T^N(T(\omega)) = T^{N+1}(\omega) = T(T^N(\omega)) = T(\omega)$$

et on voit  $T(\omega)$  est aussi point fixe de  $T^N$ , donc  $T(\omega) = \omega$ . Ce point fixe de  $T$  est unique, car tout point fixe de  $T$  est aussi point fixe de  $T^N$ . Il reste à voir que  $\omega = \lim_{n \rightarrow \infty} T^n(x)$ ,  $\forall x \in X$ . Soit donc  $x \in X$ ; on sait que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^{k \cdot N}(T^\ell(x)) = \omega$ ,  $\ell = 0, \dots, N-1$  et donc

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K_\varepsilon^\ell, \ell = 0, \dots, N-1 \text{ tels que } k \geq K_\varepsilon^\ell \Rightarrow d(T^{k \cdot N}(T^\ell(x)), \omega) < \varepsilon \quad ;$$

posons  $K_\varepsilon = \sup \{K_\varepsilon^0, \dots, K_\varepsilon^{N-1}\}$ . Alors, si  $n \geq N \cdot K_\varepsilon$ , par division euclidienne  $n$  peut s'écrire de façon unique sous la forme :

$$n = k \cdot N + r \quad , \quad \text{avec} \quad 0 \leq r \leq N - 1$$

et  $n \geq N \cdot K_\varepsilon \Rightarrow k \cdot N + r \geq N \cdot K_\varepsilon \Rightarrow k \geq K_\varepsilon - r/N \Rightarrow k \geq K_\varepsilon$ , puisque  $k$  est entier et  $r/N < 1$ , et donc

$$d(T^n(x), \omega) = d(T^{k \cdot N}(T^r(x)), \omega) < \varepsilon \quad .$$

*q.e.d.*

Un exemple de transformation non contractante, dont un itéré est une application contractante : on prend l'application linéaire  $A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de matrice  $\begin{pmatrix} 0 & 100 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .  $A$  n'est visiblement pas contractante, puisqu'elle envoie le 2-ème vecteur de base sur un vecteur de longueur 100, mais  $A^2 = 0$  est tout ce qu'il y a de plus contractant.

Un exemple plus substantiel nous est fourni par les équations intégrales de Volterra. On se donne les fonctions  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  continues. On cherche une fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie :

$$f(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t)f(t)dt .$$

C'est dire qu'on cherche un point fixe de la transformation

$$T : \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R}) , \quad T(g)(x) = \phi(x) + \int_0^x K(x, t)g(t)dt .$$

Nous allons montrer par induction sur  $n$  que

$$|T^n(g_1)(x) - T^n(g_2)(x)| \leq \frac{x^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty ,$$

où  $M = \sup \{|K(x, t)|, x, t \in [0, 1]\}$ . Pour  $n = 1$  cette inégalité se vérifie facilement. Supposons-la vraie pour  $n$  et montrons qu'elle est vraie pour  $n + 1$ :

$$\begin{aligned} |T^{n+1}(g_1)(x) - T^{n+1}(g_2)(x)| &= |T(T^n(g_1))(x) - T(T^n(g_2))(x)| \\ &\leq \int_0^x |K(x, t)| |T^n(g_1)(t) - T^n(g_2)(t)| dt \leq \int_0^x M \frac{t^n}{n!} M^n \|g_1 - g_2\|_\infty dt \\ &= \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} M^{n+1} \|g_1 - g_2\|_\infty . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\|T^n(g_1) - T^n(g_2)\|_\infty \leq \frac{M^n}{n!} \|g_1 - g_2\|_\infty$$

et comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} M^n/n! = 0$ , si on choisit  $q$ ,  $0 < q < 1$ , il existe  $N$  tel  $M^N/N! \leq q$  et alors  $T^N$  sera contractante, de constante de contraction  $q$ . On peut donc affirmer que l'équation intégrale dont on est parti admet une unique solution, que l'on peut obtenir par itération de  $T$ .

## 5. Construction de fractals par la méthode des IFS (Iterated Function Systems)

Les objets fractals ont été étudiés pour la première fois de façon systématique en 1975 par Benoît Mandelbrot [M]. Ce sont des sous-ensembles du plan, de l'espace ou plus généralement de  $\mathbb{R}^n$  qui ont en commun la propriété d'être d'un aspect compliqué, alors qu'ils sont définis par des règles très simples. Il n'existe pas de définition précise de la notion de fractal; deux approches sont possibles, l'une disant qu'un objet fractal est un sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$  de dimension de Hausdorff non entière (mais tous les exemples usuels sont de dimension un nombre qui n'est pas non plus une fraction), l'autre disant qu'un fractal est réunion de sous-ensembles qui sont des fractions de lui-même.

Ces deux points de vue sont d'ailleurs liés, et c'est ce qui nous permettra de calculer la dimension (au sens de Hausdorff) de ces fractals. Cette dimension est une extension de la notion que nous connaissons intuitivement; elle tient compte du degré de complexité du fractal en tant que sous-ensemble de  $\mathbb{R}^n$ .

L'approche que nous allons présenter pour définir et construire les fractals est basée sur le théorème du point fixe (théorème 4.1). Elle a été introduite par M.F. Barnsley et A.D. Sloan †, qui l'ont utilisée pour développer une méthode de compression d'images.

### 5.1 EXEMPLES D'OBJETS FRACTALS

#### *L'intervalle*

Le tout premier exemple nous est fourni par l'intervalle  $[0, 1]$  : il est réunion des 2 intervalles  $[0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ . Si  $w_1(x) = 1/2x$  et  $w_2(x) = 1/2(x - 1) + 1$  sont les homothéties de rapport  $1/2$  et centre respectivement 0 et 1, on peut dire que

$$[0, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1]) \quad ;$$

c'est dire que  $[0, 1]$  est réunion de deux "moitiés" de lui-même.

#### *L'ensemble de Cantor (1872)*

C'est un sous-ensemble  $C \subset \mathbb{R}$  défini ainsi : on partage l'intervalle  $[0, 1]$  en trois intervalles égaux et on enlève l'intervalle ouvert du milieu  $]1/3, 2/3[$ ; puis on recommence avec les deux intervalles  $[0, 1/3]$  et  $[1/3, 2/3]$ , et ainsi de suite. Plus précisément, si l'on pose :

$$C_0 = [0, 1] \quad , \quad C_1 = C_0 \setminus ]1/3, 2/3[ \quad , \quad C_{k+1} = C_k \setminus M_k$$

où  $M_k$  est la réunion des  $2^{k-1}$  intervalles ouverts qui sont les tiers du milieu des intervalles dont  $C_k$  est réunion, alors

$$C = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k \quad .$$

Soient  $w_1(x) = 1/3x$  et  $w_2(x) = 1/3x + 2/3$  les homothéties de rapport  $1/3$  et de centre respectivement 0 et 1. Alors on a :

$$C = w_1(C) \cup w_2(C) \quad .$$

On voit donc que  $C$  est réunion de deux copies réduites de lui-même.



**Figure I.6** – Construction de l'ensemble de Cantor

† Byte, janvier 1988, A better way to compress images.

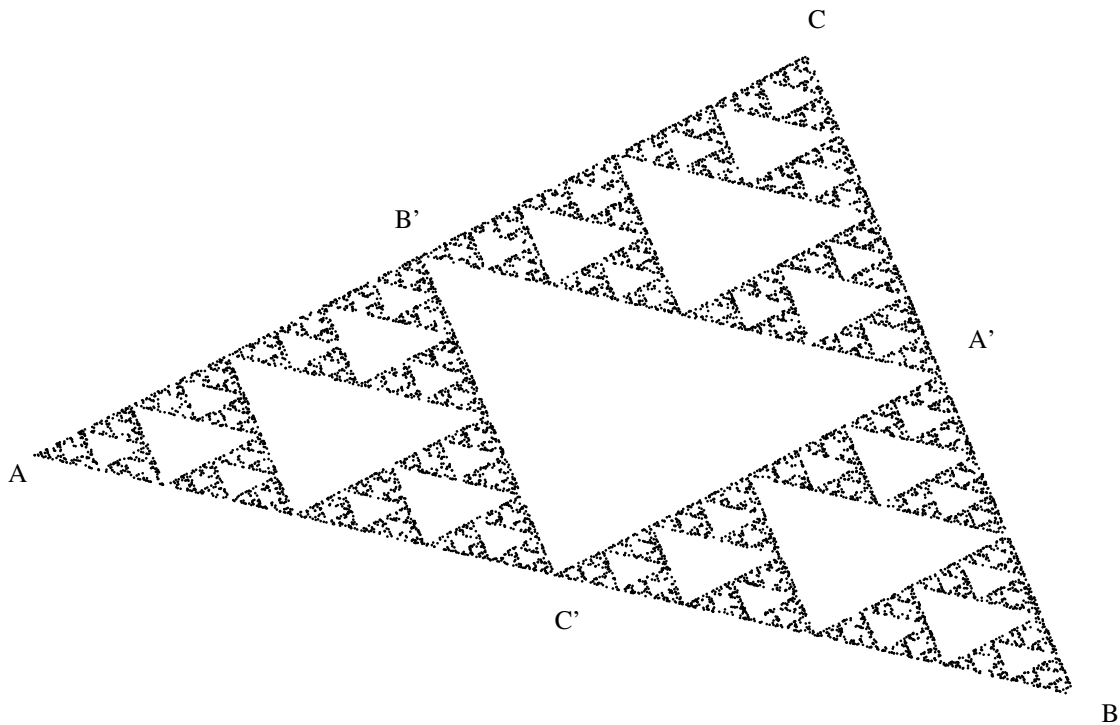
*Le triangle de Sierpinski (1916)*

Tout d'abord, si  $P \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , notons par  $w_P^\lambda : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'homothétie de centre  $P$  et rapport  $\lambda$ . Explicitement :

$$w_P^\lambda(x) = (\lambda(x - P) + P) \quad .$$

Le triangle de Sierpinski est un sous-ensemble  $S \subset \mathbb{R}^2$  qui est obtenu ainsi : On part d'un triangle de sommets  $A, B, C$ , dont on prend les milieux  $A', B'$  et  $C'$  des côtés  $\overline{BC}, \overline{AC}$  et  $\overline{AB}$  respectivement. Si on enlève l'intérieur du triangle de sommets  $A', B', C'$ , il reste trois triangles, dont les dimensions sont la moitié de celles du triangle  $ABC$  :  $A'B'C, A'C'B$  et  $B'C'A$ . On recommence avec ces 3 nouveaux triangles, et ainsi de suite. Si  $P \in \mathbb{R}^2$ , désignons par  $w_P^\lambda$  l'homothétie de centre  $P$  et de rapport  $\lambda$ ; on voit que

$$S = w_A^{1/2}(S) \cup w_B^{1/2}(S) \cup w_C^{1/2}(S).$$



**Figure I.7** – Le triangle de Sierpinski, dessiné à l'aide de la méthode des I.F.S.

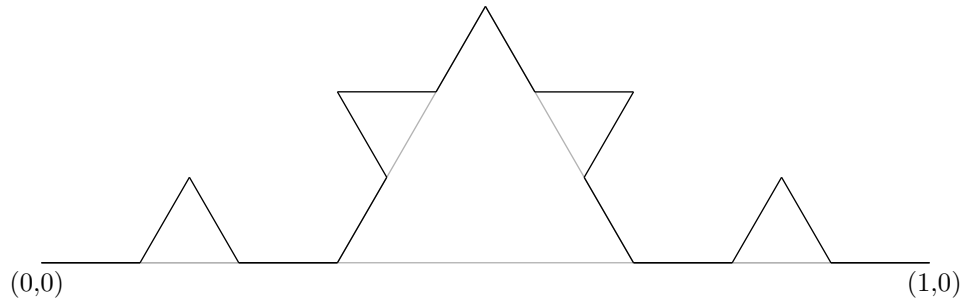
*La courbe de von Koch (1904)*

On part du segment  $[0, 1]$ , que l'on partage en trois segments égaux. On construit un triangle équilatéral sur le segment du milieu, et on enlève l'intérieur de ce même segment. On obtient ainsi 4 nouveaux segments, et on recommence la construction précédente sur chacun d'entre eux.

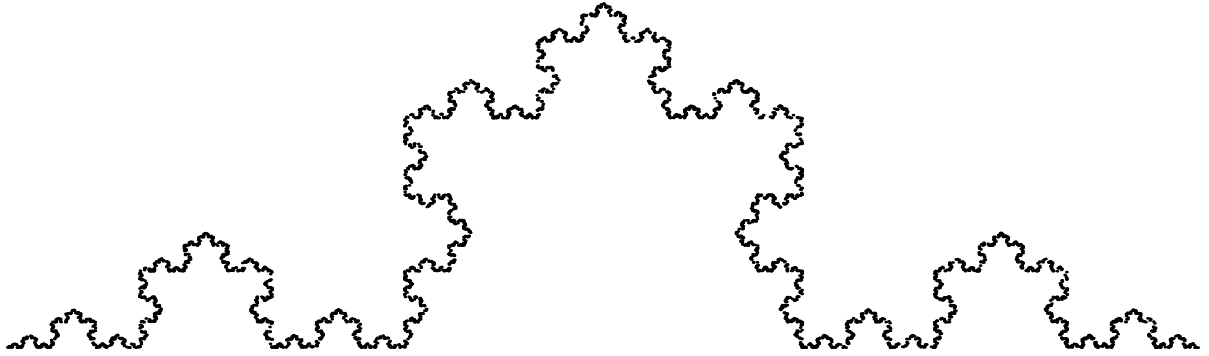
Appelons  $K$  le résultat de cette construction; on voit que

$$K = w_{(0,0)}^{1/3}(K) \cup w_{(1,0)}^{1/3}(K) \cup w_3(K) \cup w_4(K)$$

où  $w_3$  est la rotation de  $\pi/3$  centrée en  $(0, 0)$  suivie de l'homothétie de centre  $(0, 0)$  et rapport  $1/3$ , puis de la translation par  $(1/3, 0)$ ;  $w_4$  est la rotation d'angle  $-\pi/3$  centrée en  $(1, 0)$ , suivie de l'homothétie de centre  $(1, 0)$  et rapport  $1/3$ , puis de la translation par  $(-1/3, 0)$ .



**Figure I.8** – Construction de la courbe de Von Koch



**Figure I.9** – La courbe de Von Koch, dessinée à l'aide de la méthode des I.F.S.

## 5.2 LA DIMENSION DE HAUSDORFF (1918)

Essayons de saisir, au moins intuitivement, la notion de dimension d'un objet, pour ensuite calculer les dimensions des exemples ci-dessus. Si l'on fait subir à un objet de dimension  $s$  une homothétie de rapport  $\lambda$ , sa mesure  $\mu_s$  sera multipliée par  $\lambda^s$ :

- la longueur d'une courbe sera multipliée par  $\lambda$ .
- l'aire d'une surface sera multipliée par  $\lambda^2$ .
- un volume sera multiplié par  $\lambda^3$ .

D'autre part, la mesure d'un tel objet (longueur, aire, volume, etc...) sera invariante par translation et rotation. Donc, si un compact  $A \subset \mathbb{R}^n$  s'écrit sous la forme:

$$A = w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

où les  $w_i$  sont composées de rotations, translations et homothéties, toutes de même rapport  $\lambda$ , et que les intersections  $w_i(A) \cap w_j(A)$  sont de mesure négligeable, pour  $i \neq j$ , on aura:

$$\mu_s(A) = \mu_s(w_1(A)) + \dots + \mu_s(w_N(A)) = N\lambda^s \mu_s(A) \quad (*)$$

d'où l'on tire que

$$s = \dim(A) = \frac{\log(N)}{\log(1/\lambda)}.$$

Dans le cas de l'ensemble de Cantor  $C$ , on trouve donc:

$$\dim(C) = \frac{\log(2)}{\log(3)} = 0.6309297534 \dots$$

Pour le triangle de Sierpinski  $S$ :

$$\dim(S) = \frac{\log(3)}{\log(2)} = 1.584962501 \dots$$

et pour la courbe de Von Koch :

$$\dim(K) = \frac{\log(4)}{\log(3)} .$$

Notons que le segment  $[0, 1]$  est lui aussi "fractal" : il est réunion des deux moitiés de lui-même  $: [0, 1/2]$  et  $[1/2, 1]$ .

Cette approche n'est pas rigoureuse, parce qu'il se pourrait que dans (\*)  $\mu_s(A)$  soit infinie.

Nous allons donner la définition rigoureuse de la dimension au sens de Hausdorff d'un sous-ensemble  $A$  de l'espace  $\mathbb{R}^n$ . Pour simplifier, nous supposons que  $A$  est borné. D'abord, définissons l'hypercube de côté  $\ell$  et de centre  $a = (a_1, \dots, a_n)$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$P(a, \ell) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x_i - a_i| \leq \ell/2\} .$$

Soit  $\delta > 0$ ; un  $\delta$ -recouvrement de  $A$  est un ensemble fini  $\{P(a^i, \ell_i)\}_{i \in I}$  d'hypercubes tels que :

$$\ell_i \leq \delta \quad \text{et} \quad A \subset \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i) .$$

Soit  $s \geq 0$ ; on pose :

$$\mu_s^\delta(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \ell_i^s \text{ où } \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i) \supset A \text{ et } \ell_i \leq \delta \right\}$$

Remarquons que si  $\delta' < \delta$ , tout  $\delta'$ -recouvrement est aussi un  $\delta$ -recouvrement, et donc :

$$\delta' < \delta \Rightarrow \mu_s^\delta(A) \leq \mu_s^{\delta'}(A)$$

On pose

$$\mu_s(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\mu_s^\delta(A))$$

que l'on appelle  $s$ -mesure de  $A$ . Cette limite existe, puisque  $\mu_s^\delta$  est décroissant en  $\delta$ , et  $0 \leq \mu_s(A) \leq \infty$ .

Supposons que  $s > n$ ; puisque  $A$  est borné, il existe  $L$  telque  $A \subset P(0, L)$ . Alors, pour tout  $\delta > 0$ , on prend  $N \in \mathbb{N}$  assez grand pour que  $L/N \leq \delta$  et on partage  $P(0, L)$  en  $N^n$  cubes égaux de côté  $L/N$ ; ces cubes recouvrent  $A$ , et donc :

$$\mu_s^\delta(A) \leq N^n \left( \frac{L}{N} \right)^s = L^s \cdot N^{n-s} .$$

Or, si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$  et, puisque  $n - s < 0$ ,  $N^{n-s} \rightarrow 0$ ; on en déduit que  $\mu_s(A) = 0$  si  $s > n$ .

On peut donc définir ainsi la dimension de Hausdorff de  $A$  par :

$$\dim_H(A) = \inf \{s \mid \mu_s(A) = 0\}$$

et on aura que  $\dim_H(A) \leq n$ .

**5.1 Proposition.** *Supposons  $t > s$  ;*

- i) Si  $\mu_s(A) < \infty$ , alors  $\mu_t(A) = 0$*
- ii) si  $\mu_t(A) > 0$ , alors  $\mu_s(A) = \infty$ .*

*Preuve:* Si  $A \subset \cup_{i \in I} P(a^i, \ell_i)$ ,  $\ell_i \leq \delta$ , puisque  $t - s > 0$ ,  $\ell_i \leq \delta \Rightarrow \ell_i^{t-s} \leq \delta^{t-s}$  et donc on a :

$$\sum_{i \in I} \ell_i^t = \sum_{i \in I} \ell_i^{t-s} \leq \delta^{t-s} \sum_{i \in I} \ell_i^s$$

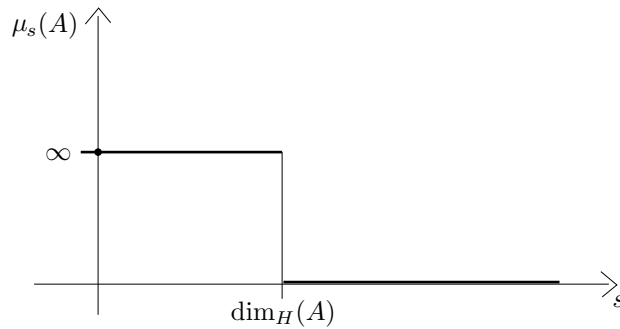
d'où il vient :

$$\mu_t^\delta(A) \leq \delta^{t-s} \mu_s^\delta(A) \tag{\#}$$

Si  $\mu_s(A) < \infty$ , il suit de (#) que si  $\delta \rightarrow 0$ , alors  $\mu_t^\delta(A) \rightarrow 0$ .

Si  $\mu_t(A) > 0$ , alors il suit de (#) que si  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\mu_s(A) \rightarrow \infty$ .





**Figure I.10** – Comportement de la  $s$ -mesure de  $A$  selon les valeurs de  $s$

*q.e.d.*

Posons  $\mu_s(A) = \infty$  si  $s < 0$ ; on déduit de **5.1** que

$$\dim_H(A) = \inf\{s \mid \mu_s(A) = 0\} = \sup\{s \mid \mu_s(A) = \infty\} \quad .$$

Intuitivement, on a défini cette mesure  $\mu_s(A)$  en approchant  $A$  par des hypercubes, dont on calcule le volume en imaginant qu'ils sont de dimension  $s$ , puisque on le pose égal à  $\ell^s$ , où  $\ell$  est la longueur du côté. Si  $s$  est trop grand par rapport à la vraie dimension de  $A$ ,  $\mu_s(A)$  sera nul, alors que si  $s$  est trop petit  $\mu_s(A)$  sera infini. La dimension sera donc l'infimum des  $s$  trop grands, ou encore le supremum des  $s$  trop petits.

Par exemple, prenons  $A = [0, 1] \times 0 \subset \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire l'intervalle  $[0, 1]$  vu comme sous-ensemble du plan. Pour calculer  $\mu_s(A)$ , on peut montrer qu'il suffit de considérer les recouvrements constitués par  $n$  carrés de côté  $\delta = 1/n$  et de centre  $\frac{2i-1}{2n}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ; leur  $s$ -mesure vaut

$$n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^s = n^{1-s}$$

Puis on fait tendre  $n \rightarrow \infty$ . On voit que

$$n^{1-s} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{si } s > 1 \\ \infty & \text{si } s < 1 \\ 1 & \text{si } s = 1 \end{cases}$$

et donc la dimension de Hausdorff de  $A$  vaut 1.

Remarquons enfin que, si  $A \subset \mathbb{R}^n$ , la dimension  $\dim_H(A)$  dépend en réalité de la paire  $(A, \mathbb{R}^n)$ , c'est-à-dire de la façon dont  $A$  est plongé dans  $\mathbb{R}^n$ . Par exemple, on peut montrer que la courbe de Von Koch est homéomorphe au segment  $[0, 1]$ .

5.3 L'ESPACE MÉTRIQUE COMPLET  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ 

Nous noterons par  $\|x\|$  la norme euclidienne et par  $d(x, y)$  la distance euclidienne,  $x, y \in \mathbb{R}^n$ .

Rappelons (voir [H-W IV.1.18]) qu'un sous-ensemble  $A \subset \mathbb{R}^n$  est dit compact si de toute suite de points dans  $A$  on peut extraire une sous-suite qui converge; on montre ([H-W th. IV.1.19]) que cela équivaut à supposer que  $A$  est fermé et borné. Si une fonction  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  est continue,  $A \subset \mathbb{R}^n$  compact, non vide, alors  $f$  est bornée et atteint ses bornes ([H-W th. IV.2.3].)

**5.2 Définition.** Soit  $A \subset \mathbb{R}^n$  non vide et  $x \in \mathbb{R}^n$ . On définit la distance de  $x$  à  $A$  par :

$$d(x, A) = \inf \{d(x, y) \mid y \in A\} \quad .$$

Notons que, puisque  $d(x, y) \geq 0$ , cet infimum existe.

---

Si  $A$  est vide, la définition précédente n'a pas de sens.

Si  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  sont compacts, ils sont bornés, et il existe alors  $R$  tel que si  $x \in K \cup L$ ,  $\|x\| \leq R$ . Alors, si  $x \in K$  et  $y \in L$ ,  $d(x, y) = \|x - y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2R$ , et donc pour tout  $x \in K$ ,  $d(x, L) \leq 2R$ . Il en suit que les nombres réels

$$\sup \{d(x, L), x \in K\} \quad \text{et} \quad \sup \{d(y, K), y \in L\}$$

sont bien définis.

**5.3 Définition – distance de Hausdorff.** Soient  $K$  et  $L$  deux sous-ensembles compacts de  $\mathbb{R}^n$ . On définit la distance de Hausdorff de  $K$  et  $L$  par :

$$d_H(K, L) = \sup \{ \sup \{d(x, L) \mid x \in K\}, \sup \{d(y, K) \mid y \in L\} \}$$

---

Dire que  $K$  et  $L$  sont proches signifie que tout point de  $K$  est proche de  $L$  et tout point de  $L$  est proche de  $K$ ; la proposition suivante, dont la preuve est une conséquence facile des définitions, précise cette affirmation. D'abord une notation : si  $A \subset \mathbb{R}^n$  et  $\varepsilon > 0$ ,  $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \leq \varepsilon\}$ ; on appelle  $A_\varepsilon$  un  $\varepsilon$ -épaissement de  $A$ .

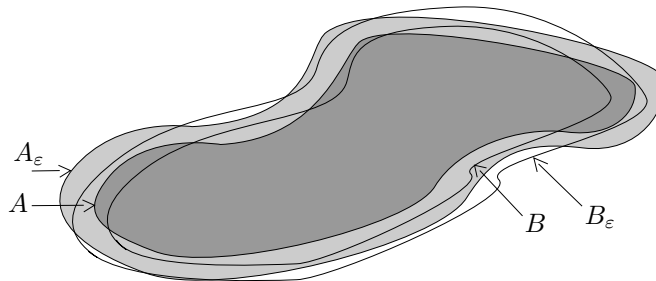
**5.4 Proposition.** Soient  $K, L \subset \mathbb{R}^n$  compacts, non vides. Alors

$$d_H(K, L) \leq \varepsilon \Leftrightarrow K \subset L_\varepsilon \text{ et } L \subset K_\varepsilon$$

et  $d_H(K, L) = \inf \{\varepsilon \mid K \subset L_\varepsilon \text{ et } L \subset K_\varepsilon\}$  (voir figure I.11.)

*Preuve:* En effet, pour que  $K \subset L_\varepsilon$ , la plus petite valeur possible que l'on peut prendre pour  $\varepsilon$  est  $\sup \{d(x, L), x \in K\}$ .

*q.e.d.*



**Figure I.11** – La distance de Hausdorff de  $A$  à  $B$  est inférieure à  $\varepsilon$

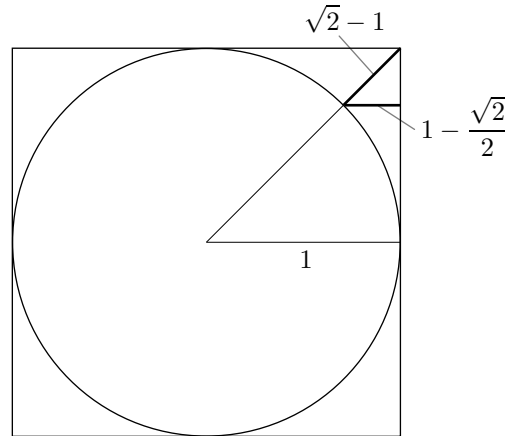


Figure I.12 – Distance de Hausdorff du carré au cercle inscrit

**5.5 Exemple.**

Prenons pour  $A \subset \mathbb{R}^2$  le cercle unité centré à l'origine et pour  $B$  le carré qui lui est circonscrit. Les points de  $A$  qui sont le plus éloignés de  $B$  sont les 4 points  $(\pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2})$  et leur distance à  $B$  vaut  $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Les points de  $B$  les plus éloignés de  $A$  sont les 4 sommets du carré, et leur distance à  $A$  vaut  $\sqrt{2} - 1$  :

$$\sup \{d(x, B) \mid x \in A\} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad , \quad \sup \{d(y, A) \mid y \in B\} = \sqrt{2} - 1$$

on vérifie que  $\sqrt{2} - 1 > 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ , d'où  $d_H(A, B) = \sqrt{2} - 1$  (voir figure I.12)

**5.6 Proposition.** *La distance de Hausdorff est une métrique, au sens de la définition 1.1, sur l'ensemble  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  des sous-ensembles compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ .*

*Preuve:* Les propriétés (1) et (2) se vérifient sans peine. Pour l'inégalité du triangle, soient  $A, B, C \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  et prenons  $x \in A, y \in B, z \in C$  :

$$\begin{aligned} d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z) \quad \forall x \in A, y \in B, z \in C \\ \Rightarrow d(x, C) &\leq d(x, y) + d(y, C) \leq d(x, y) + d_H(B, C) \quad \forall x \in A, \forall y \in B \\ &\Rightarrow d(x, C) \leq d(x, B) + d_H(B, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) \quad \forall x \in A \end{aligned}$$

et en échangeant les rôles de  $x$  et  $z$ , et de  $A$  et  $C$  on trouve :

$$d(z, A) \leq d_H(C, B) + d_H(B, A) \quad \forall z \in C$$

et de là il suit que

$$d_H(A, C) \leq d_H(A, B) + d_H(B, C) \quad .$$

*q. e. d.*

Rappelons que  $X \subset \mathbb{R}^n$  est compact si de toute suite dans  $X$  on peut extraire une suite qui converge. Il en suit que si  $\{F_k\}_{k=1, \dots, \infty}$ ,  $F_1 \supset \dots \supset F_k \supset F_{k+1} \dots$  est une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ , on a que  $\bigcap_{k=1, \dots, \infty} F_k \neq \emptyset$ , car on peut choisir  $x_k \in F_k$ , et la limite d'une suite extraite de  $\{x_k\}$  appartient à  $\bigcap_{k=1, \dots, \infty} F_k$ .

**5.7 Proposition.** Soit  $\{F_k\}_{k=1,\dots,\infty}$  une suite décroissante de compacts non vides de  $\mathbb{R}^n$ . Alors

$$\lim_{k \rightarrow \infty} F_k = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$$

où la limite est entendue au sens de la distance de Hausdorff.

*Preuve:* Soit  $A = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_k$  et  $\varepsilon > 0$  donné; posons :

$$A_{\geq \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, A) \geq \varepsilon\} \quad .$$

C'est un fermé de  $\mathbb{R}^n$  et la suite des  $F'_k = F_k \cap A_{\geq \varepsilon}$  est une suite décroissante de compacts. Or :

$$\bigcap_{k \geq 1} F'_k = \left( \bigcap_{k \geq 1} F_k \right) \cap A_{\geq \varepsilon} = A \cap A_{\geq \varepsilon} = \emptyset$$

donc il doit exister  $K_\varepsilon$  tel que  $F'_k = \emptyset$  si  $k \geq K_\varepsilon$ , ce qui entraîne que  $F_k \subset A_\varepsilon$  si  $k \geq K_\varepsilon$ . Comme  $A \subset F_k$  pour tout  $k$ , cela entraîne, d'après la proposition 5.4, que  $d_H(F_k, A) \leq \varepsilon$  si  $k \geq K_\varepsilon$ .

*q.e.d.*

**5.8 Proposition.** L'espace  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , muni de la distance de Hausdorff, est complet

*Preuve:* Soit  $\{X_k\}$  une suite de Cauchy de compacts de  $\mathbb{R}^n$  et posons:

$$F_N = \overline{\bigcup_{k \geq N} X_k}, \quad N \geq 1 \quad ;$$

on a que  $F_N \supset F_{N+1}$ . Si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $N_\varepsilon$  tel que  $N, M \geq N_\varepsilon \Rightarrow d_H(X_M, X_N) < \varepsilon$ , et donc  $X_N \subset (X_{N_\varepsilon})_\varepsilon$ ,  $N \geq N_\varepsilon$ . Il suit de ce fait que

$$F_N \subset (X_{N_\varepsilon})_\varepsilon \quad .$$

Puisque  $X_{N_\varepsilon}$  est fermé et borné dans  $\mathbb{R}^n$ , il en est de même pour  $(X_{N_\varepsilon})_\varepsilon$  et aussi pour  $F_N$ . Mais alors l'espace

$$A = \bigcap_{N \geq 1} F_N$$

est compact, non vide, et

$$A \subset (X_N)_\varepsilon, \quad N \geq N_\varepsilon.$$

Nous allons montrer que  $\lim_{N \rightarrow \infty} (X_N) = A$ .

Il suit de la proposition précédente que  $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N = A$ . Donc, si  $\varepsilon > 0$  est donné, il existe  $N'_\varepsilon$  tel que  $F_N \subset A_\varepsilon$  si  $N \geq N'_\varepsilon$ , et alors  $X_N \subset F_N \subset A_\varepsilon$ . Finalement :

$$N \geq \sup \{N_\varepsilon, N'_\varepsilon\} \Rightarrow X_N \subset F_N \subset A_\varepsilon \text{ et } A \subset (X_N)_\varepsilon \Rightarrow d_H(A, X_N) \leq \varepsilon \quad .$$

*q.e.d.*

## 5.4 LA MÉTHODE IFS

**5.9 Proposition.** Soient  $w_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, N$  des applications contractantes, de constante de contraction  $s_i$ ,  $0 < s_i < 1$   $i = 1, \dots, N$ . Elles induisent une application

$$\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N) : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad A \mapsto w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$$

qui est une transformation contractante de constante de contraction

$$s = \sup \{s_i, i = 1, \dots, N\}$$

de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  muni de la distance de Hausdorff.

*Preuve:* Si  $A \subset \mathbb{R}^n$  est compact,  $w_i(A) \subset \mathbb{R}^n$  est compact, ainsi que  $w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A)$ , donc  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$ , que nous noterons  $T$  pour le reste de la preuve, est bien une transformation de  $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ . Vérifions qu'elle est contractante. Soient  $A, B, C, D \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$  :

$$A \subset C_\varepsilon \text{ et } B \subset D_\varepsilon \Rightarrow A \cup B \subset C_\varepsilon \cup D_\varepsilon \subset (C \cup D)_\varepsilon$$

et de même

$$C \subset A_\varepsilon \text{ et } D \subset B_\varepsilon \Rightarrow C \cup D \subset (A \cup B)_\varepsilon \quad .$$

Il suit alors de **5.4** que

$$d_H(A \cup B, C \cup D) \leq \sup \{d_H(A, C), d_H(B, D)\}$$

et donc, pour tout  $A, B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$

$$d_H(w_1(A) \cup w_2(A), w_1(B) \cup w_2(B)) \leq \sup \{d_H(w_1(A), w_1(B)), d_H(w_2(A), w_2(B))\} \quad .$$

Si on a  $A_1, \dots, A_N, B_1, \dots, B_N \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ , en appliquant de façon répétée ce qui précède :

$$\begin{aligned} d_H(A_1 \cup \dots \cup A_N, B_1 \cup \dots \cup B_N) &= d_H((A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}) \cup A_N, (B_1 \cup \dots \cup B_{N-1}) \cup B_N) \\ &\leq \sup \{d_H(A_1 \cup \dots \cup A_{N-1}, B_1 \cup \dots \cup B_{N-1}), d_H(A_N, B_N)\} \leq \dots \\ &\dots \leq \sup \{d_H(A_1, B_1), \dots, d_H(A_N, B_N)\} \end{aligned}$$

Il suit du fait que  $\|w_i(x) - w_i(y)\| \leq s \cdot \|x - y\|$ ,  $i = 1, \dots, n$ , que  $d_H(w_i(A), w_i(B)) \leq s \cdot d_H(A, B)$ , donc finalement

$$d_H(w_1(A) \cup \dots \cup w_N(A), w_1(B) \cup \dots \cup w_N(B)) \leq \sup \{d_H(w_i(A), w_i(B)), i = 1, \dots, N\} \leq s \cdot d_H(A, B)$$

ce qui s'écrit encore :

$$d_H(T(A), T(B)) \leq s \cdot d_H(A, B) \quad .$$

*q.e.d.*

En appliquant le théorème du point fixe **4.1** à  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$  on obtient les deux corollaires suivants :

**5.10 Corollaire.** Dans les hypothèses de **5.9**,  $T = \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$  possède un unique point fixe  $A \subset \mathbb{R}^n$ , ce qui veut dire que

$$A = \bigcup_{i=1, \dots, N} w_i(A) \quad .$$

On a :

$$A = \lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) \quad \forall B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$$

et si  $B \subset A$ , alors

$$A = \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)} .$$

*Preuve:* Seule la dernière affirmation exige une explication. On sait que  $\forall B \in \mathcal{K}(R^n)$ ,  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = A$ . Or, si  $B \subset A$ ,  $T^k(B) \subset T^k(A) = A$ , et les inclusions

$$T^k(B) \subset \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)} \subset A$$

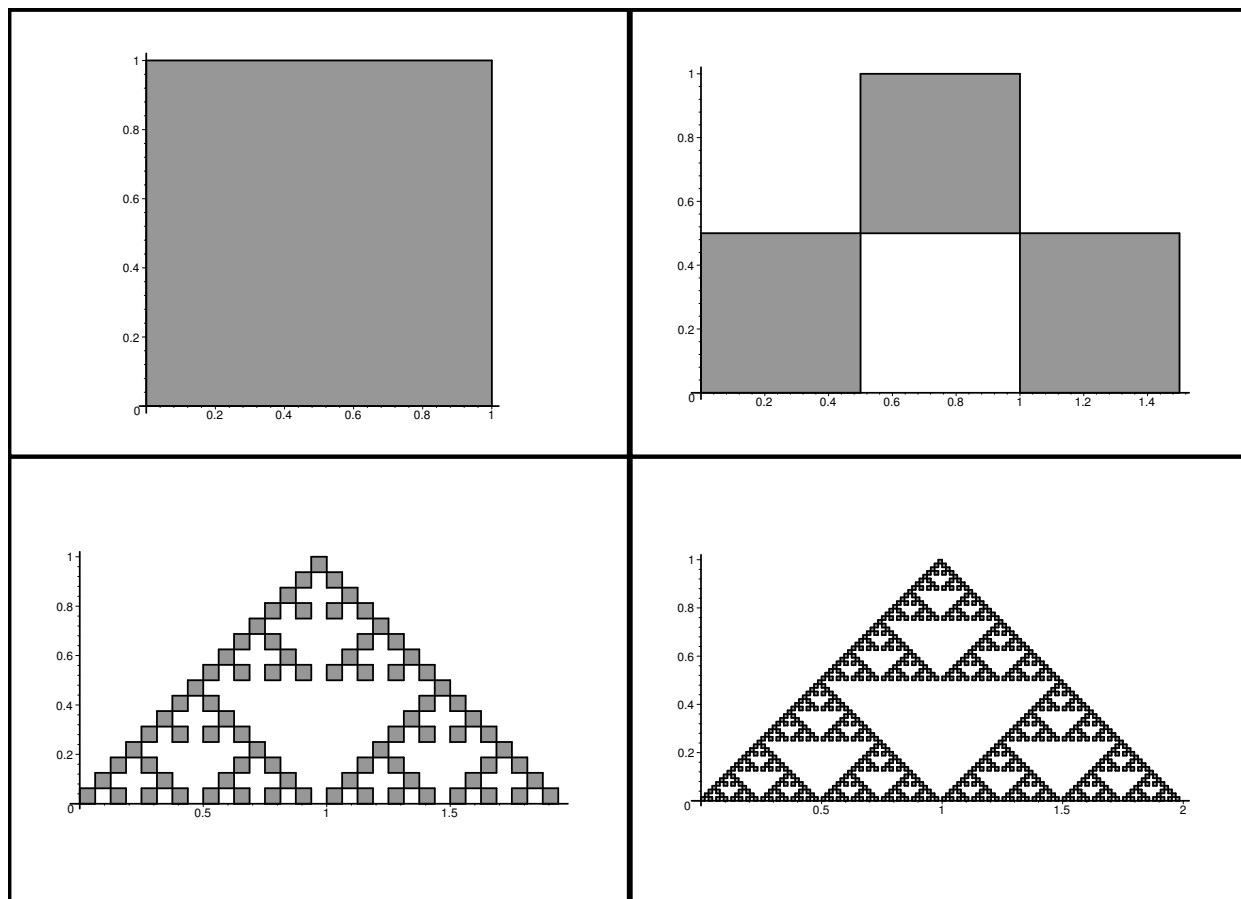
entraînent que  $\lim_{k \rightarrow \infty} T^k(B) = \overline{\bigcup_{k \geq 1} T^k(B)} = A$ .

*q. e. d.*

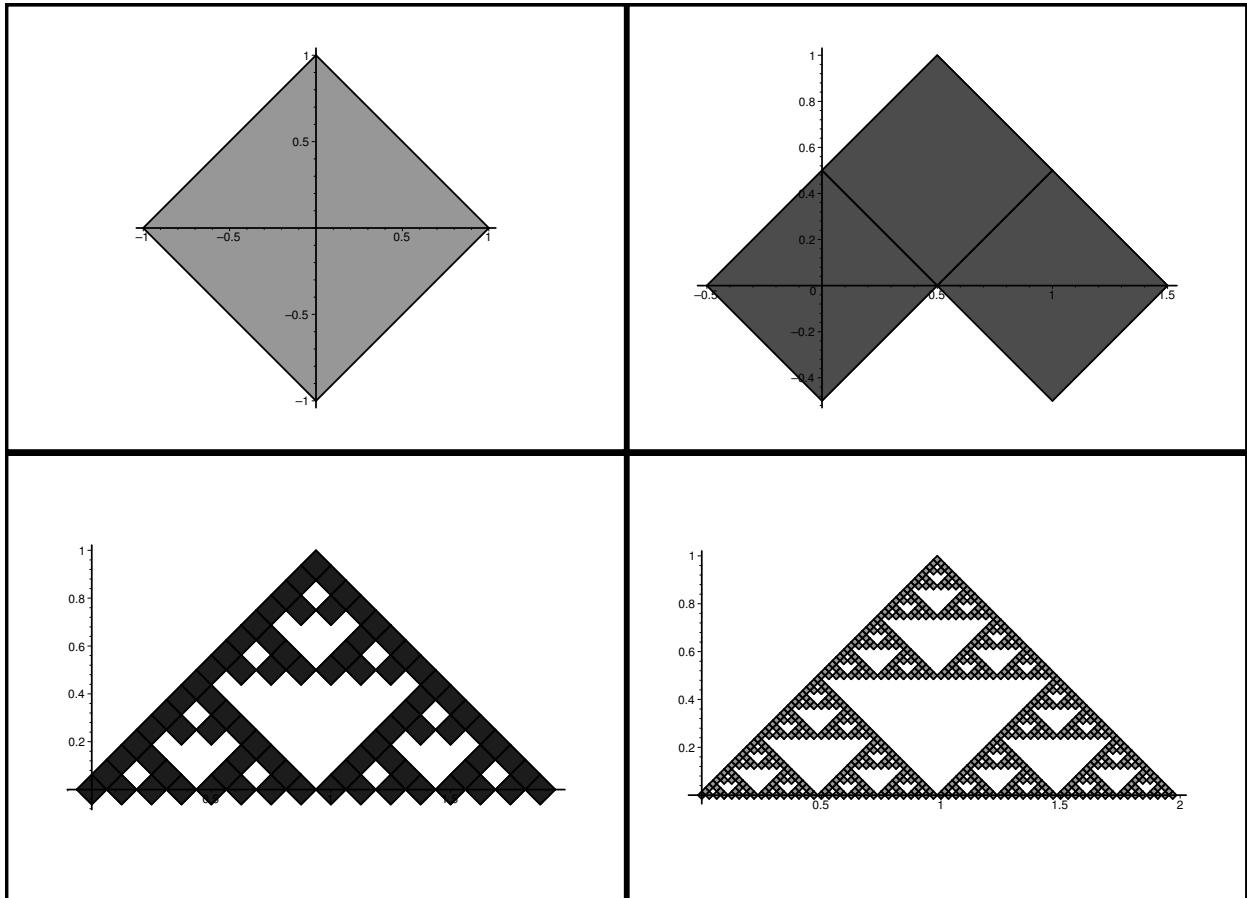
On dit que la famille des  $N$  applications  $w_1, \dots, w_N$  est un codage IFS du compact  $A$ .

La figure **I.13** montre l'effet de 0, 1, 4, puis 6 itérations de  $T = \mathcal{K}(w_1, w_2, w_3)$  sur le carré  $[0, 1] \times [0, 1]$ , où  $w_1, w_2, w_3$  sont les transformations qui codent le triangle de Sierinski obtenu en partant du triangle de sommets  $A = (0, 0)$ ,  $B = (2, 0)$ ,  $C = (1, 1)$  :  $w_1, w_2$  et  $w_3$  sont les homothéties de rapport  $1/2$  et de centre respectivement  $A, B$  et  $C$ .

La figure **I.14** montre les mêmes itérations en partant du carré de sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$ .



**Figure I.13** – Itérations convergeant vers le triangle de Sierpinski, en partant du carré  $[0, 1] \times [0, 1]$



**Figure I.14** – Itérations convergeant vers le triangle de Sirpinski, en partant du carré de sommets  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, -1)$

**5.11 Théorème.** Dans les hypothèses de 5.9, si  $L \subset \mathbb{R}^n$  est un compact tel que

$$d_H(L, \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)(L)) < \varepsilon \text{ où } \varepsilon > 0$$

alors, si  $A$  dénote l'unique point fixe de  $\mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)$ ,

$$d_H(L, A) < \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

*Preuve:*

$$d_H(L, A) \leq d_H(L, T(L)) + d_H(T(L), T(A)) < \varepsilon + s \cdot d_H(L, A) \Rightarrow d_H(L, A) < \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

*q.e.d.*

Ce dernier résultat est appelé "Collage Theorem" par Barnsley et Sloan. Il affirme que si l'on veut coder  $L$  et qu'on a trouvé des transformation  $w_1, \dots, w_N$  pour lesquelles  $L$  est un point fixe à  $\varepsilon$  près seulement, on a tout de même que l'image codée par les  $w_i$  est  $\frac{\varepsilon}{1-s}$ -proche de  $L$ .

**5.12 Exemples.**

On peut repenser les exemples du § 5.1 à la lumière du théorème précédent.

L'intervalle  $[0, 1] \subset \mathbb{R}$  est codé par les 2 transformations

$$w_1(x) = 1/2x \quad , \quad w_2(x) = 1/2x + 1/2$$

puisque  $w_1([0, 1]) = [0, 1/2]$ ,  $w_2([0, 1]) = [1/2, 1]$  et donc

$$[0, 1] = w_1([0, 1]) \cup w_2([0, 1])$$

L'ensemble de Cantor  $C \subset \mathbb{R}$  est codé par  $w_1$  et  $w_2$ , où cette fois

$$w_1(x) = 1/3x \quad , \quad w_2(x) = 1/3x + 2/3$$

Le triangle de Sierpinski construit à partir de 3 sommets  $A, B, C$  est codé par  $w_A^{1/2}$ ,  $w_B^{1/2}$  et  $w_C^{1/2}$ .

Pour reconstruire un ensemble  $A$  codé par des transformations  $w_1, \dots, w_N$ , on peut procéder ainsi. On choisit un point  $P \in A$ , on lui applique les  $N$  transformations et on obtient  $N$  points de  $A$ , auxquels on applique à nouveau les  $w_i$ , et ainsi de suite. D'après **5.10** :

$$A = \overline{\bigcup_{n \geq 1} \mathcal{K}(w_1, \dots, w_N)(P)}$$

et donc ce procédé permet d'approcher  $A$ . Il a le désavantage qu'à chaque étape il faut avoir en mémoire tous les points précédemment construits; à la  $k$ -ième étape il y en aura  $N^{k-1}$ .

Pour y remédier, Barnsley et Sloan ont proposé une autre méthode, que nous allons maintenant esquisser. On choisit judicieusement  $N$  nombres  $p_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ ,  $0 < p_i < 1$ ,  $p_1 + \dots + p_N = 1$  et on part d'un point  $P \in A$ . On choisit au hasard † l'une des  $N$  transformations  $w_i$ , avec probabilité  $p_i$  pour  $w_i$ ; on applique ce  $w_i$ , puis on recommence avec  $w_i(P)$ . Le choix des probabilités doit être équilibré : les transformations plus contractantes doivent être choisies moins souvent, la probabilité correspondante doit donc être plus petite. Par exemple, dans le cas de l'ensemble de Cantor, les deux transformations ont même constante de contraction; alors on doit prendre  $p_1 = p_2 = 1/2$ . De même, pour le triangle de Sierpinski, on prend  $p_1 = p_2 = p_3 = 1/3$ ; la figure **I.7** montre le dessin obtenu par ce procédé après 10000 itérations.

Par contre dans l'exemple de la feuille de fougère donné ci-dessous, il convient de donner une probabilité beaucoup plus petite à  $w_1$  qu'aux autres transformations, parce que c'est une application "très contractante": si on donne des probabilités égales, on dessine beaucoup de points près du bas de la tige (voir figure **I.15**).

On peut représenter une application affine  $w : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , c'est-à-dire une application du type  $(x, y) \mapsto A(x, y) + \tau$ , où  $A$  est linéaire, par la matrice  $2 \times 3$ :

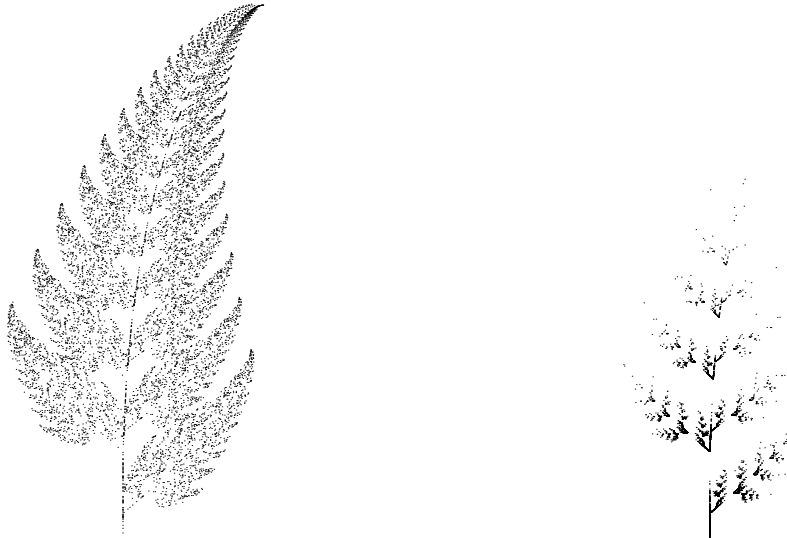
$$\begin{pmatrix} a & b & \tau_1 \\ c & d & \tau_2 \end{pmatrix} \quad \text{où } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } \tau = (\tau_1, \tau_2)$$

et on peut alors calculer  $w(x, y)$  par le produit matriciel:

$$w(x, y) = \begin{pmatrix} a & b & \tau_1 \\ c & d & \tau_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} .$$

† Concrètement, on choisit au hasard  $t \in ]0, 1]$ , et on prendra la transformation  $w_i$  si  $\sum_{j=1}^{i-1} p_j < t \leq \sum_{j=1}^i p_j$  (on pose  $\sum_{j=1}^0 = 0$ .)





**Figure I.15** – La fougère avec un bon et un mauvais choix de probabilités :  
à gauche  $p_1 = 0.01, p_2 = 0.07, p_3 = 0.07, p_4 = 0.85$ , à droite  $p_i = 0.25, i = 1, \dots, 4$

L'homothétie de rapport  $\lambda$  et centre  $P = (c_1, c_2)$  s'écrit :

$$x \mapsto \lambda(x - P) + P = \lambda x + (1 - \lambda)P$$

et sa représentation matricielle s'écrit donc :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 1 - \lambda c_1 \\ 0 & \lambda & 1 - \lambda c_2 \end{pmatrix} .$$

Ainsi, le triangle de Sierpinski de sommets  $(0, 0), (2, 0), (1, 1)$  est codé par les matrices

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} .$$

Considérons les 4 transformations affines suivantes:

$$\begin{aligned} w_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.16 & 0 \end{pmatrix} , & w_2 &= \begin{pmatrix} 0.2 & -0.26 & 0 \\ 0.23 & 0.22 & 1.6 \end{pmatrix} \\ w_3 &= \begin{pmatrix} -0.15 & 0.28 & 0 \\ 0.26 & 0.24 & 0.44 \end{pmatrix} , & w_4 &= \begin{pmatrix} 0.85 & 0.04 & 0 \\ -0.04 & 0.85 & 1.6 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

La figure **I.15** montre le résultat que l'on obtient après 5'000 itérations en partant du point  $(0, 0)$ , avec un bon choix de  $p_1, \dots, p_4$  et avec un mauvais choix.

Pour comprendre à quoi correspondent les 4 transformations, il faut voir la feuille de fougère comme réunion de quatre de ses parties (voir figure **I.16**) :

$w_1$  – la petite tige allant du bas jusqu'à la deuxième branche depuis le bas

$w_2$  – la première branche en bas à droite

$w_3$  – la première branche en bas à gauche

$w_4$  – la feuille privée de tout ce qui est en dessous de la première branche en bas à gauche.

La transformation  $w_1$  projette la fougère sur un axe vertical, puis fait subir à cette projection une homothétie de rapport 0.16, centrée au bas de la tige; les autres transformations se devinent aisément. On voit que  $w_1$  est très contractante,  $w_4$  l'est très peu,  $w_2$  et  $w_3$  sont un peu moins contractantes que  $w_1$ , mais bien plus que  $w_4$ ; les probabilités sont choisies en conséquence : les transformations les plus contractantes tirent très fort vers leur propre point fixe, on doit donc les choisir moins souvent, ce qui veut dire qu'on doit leur assigner une probabilité plus petite.

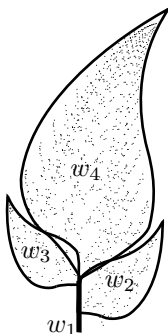


Figure I.16 – Esquisse des transformations qui codent la feuille de fougère

### 5.5 EXEMPLES DE PROGRAMMES

Voici le programme postscript utilisé pour dessiner le triangle de Sierpinski de la figure III.2 :

```

%!
/Ax 10 def
/Ay 100 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/Cx 300 def
/Cy 250 def
/lambda 0.5 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add}def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add}def
/wBy{By sub lambda mul By add}def
/wCx{Cx sub lambda mul Cx add}def
/wCy{Cy sub lambda mul Cy add}def
/a Ax def
/b Ay def
0.5 setlinewidth
/montre{a b 0.5 0 360 arc fill}def
/Times-Roman findfont 10 scalefont setfont
Ax 10 sub Ay 10 sub moveto (A) show
Bx 10 add By 10 sub moveto (B) show
Cx Cy 10 add moveto (C) show
Ax Bx add 2 div Ay By add 2 div 20 sub moveto (C') show
Ax Cx add 2 div 10 sub Ay Cy add 2 div 10 add moveto (B') show
Cx Bx add 2 div 10 add Cy By add 2 div 10 add moveto (A') show
a b moveto
10000{
/p rand 300 mod def
p 100 lt {/a a wAx def /b b wAy def}
{p 200 lt {/a a wBx def /b b wBy def}{/a a wCx def /b b wCy def} ifelse} ifelse
montre}
repeat
showpage

```

Et voici le programme Matlab utilisé pour dessiner la courbe de von Koch. Les deux fonctions "rota" et "homot" doivent être mises chacune dans son fichier, nommé "rota.m" et "homot.m" respectivement.

```
function Y=rota(a,c,X)
```

```

%rotation de centre c, angle a appliquee au vecteur X
R=[cos(a) -sin(a);sin(a) cos(a)];
Y=R*(X-c)+c;

function H=homot(lambda,c,X)
%homotetie de centre c et rapport lambda appliquee a X
H=lambda*(X-c)+c;

% le programme lui-meme
X=[0;0];
for i=1:10000
    p=rand;
    if p<0.25
        X=homot(1/3,[0;0],X);
    elseif p<0.5
        X=homot(1/3,[1;0],X);
    elseif p<0.75
        X=rota(pi/3,[0;0],homot(1/3,[0;0],X))+[1/3;0];
    else
        X=rota(-pi/3,[1;0],homot(1/3,[1;0],X))+[-1/3;0];
    end
    plot(X(1),X(2),'markersize',5,'color','k');
    hold on;
end
axis equal;
axis off;
hold off;

```

Il est à noter qu'il est indispensable de choisir les diverses transformations par un procédé pseudo-aléatoire. Voici 2 programmes en postscript qui dessinent des points de l'ensemble de Cantor, le premier par un procédé pseudo-aléatoire, avec probabilités égale pour chacune des 2 transformations, le deuxième en les choisissant alternativement :

```

% !
% ensemble de Cantor avec procédé aléatoire
/Ax 20 def
/Ay 10 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/lambda 0.3333 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add} def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add} def
/wBy{By sub lambda mul By add} def
1 setlinewidth
/a Ax def
/b Ay def
/montre{a b 0.5 0 360 arc fill}def
10000{
/p rand 200 mod def
p 100 lt{
/a a wAx def /b b wAy def}{
/a a wBx def /b b wBy def}ifelse montre

```

```

}
repeat
showpage
}

% !
% ensemble de Cantor avec choix alterné des transformations
/Ax 20 def
/Ay 10 def
/Bx 400 def
/By 10 def
/lambda 0.3333 def
/wAx{Ax sub lambda mul Ax add}def
/wAy{Ay sub lambda mul Ay add} def
/wBx{Bx sub lambda mul Bx add} def
/wBy{By sub lambda mul By add} def
1 setlinewidth
/a Ax def
/b Ay def
/montre{a b a b 0.5 0 360 arc fill}def
5000{
/a a wAx def /b b wAy def montre
/a a wBx def /b b wBy def montre
}
repeat
showpage

```

Voici le résultat :



Figure I.17 – Un bon Cantor



Figure I.18 – Un mauvais Cantor

Et voici l'explication : Si, dans l'itération, on alterne le choix des deux transformations  $w_1(x) = 1/3x$  et  $w_2(x) = 1/3x + 2/3$ , cela revient à dessiner les itérés des composées :

$$w_{(1,2)}(x) = w_1(w_2(x)) = 1/9x + 2/3 \quad \text{et} \quad w_{(2,1)}(x) = w_2(w_1(x)) = 1/9x + 2/9 \quad .$$

Or  $w_{(1,2)}(x)$  a pour unique point fixe  $x = 3/4$  et  $w_{(2,1)}(x)$  a pour unique point fixe  $x = 1/4$ . Les points que l'on dessine s'accroissent donc vers l'ensemble  $\{1/4, 3/4\}$ .

### Références

- [H.-W.] E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by its history*, Springer Verlag, Berlin, 1997.  
[M] B. Mandelbrot, *Les objets fractals : forme, hasard et dimension*, Flammarion, Paris, 1975.