

1. Décrire les ensembles de nombres complexes définis par chacune des 5 conditions suivantes:

$$|z - i| = 1, \quad |z + 5| < 1, \quad z + \bar{z} = 1, \quad z - \bar{z} = -i, \quad z + \bar{z} = |z|^2.$$

2. Montrer l'identité de Lagrange

$$\left| \sum_{j=1}^n a_j b_j \right|^2 = \sum_{j=1}^n |a_j|^2 \sum_{j=1}^n |b_j|^2 - \sum_{1 \leq j < k \leq n} |a_j \bar{b}_k - a_k \bar{b}_j|^2,$$

pour $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{C}$. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans \mathbb{C}^n :

$$\left| \sum a_j \bar{b}_j \right| \leq \left(\sum |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum |b_j|^2 \right)^{1/2}.$$

3. La projection stéréographique $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + ix_2)/(1 - x_3) = z$, pour $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et $N = (0, 0, 1)$. Vérifier les formules:

$$|z|^2 = \frac{1 + x_3}{1 - x_3}; \quad x_1 = \frac{z + \bar{z}}{1 + |z|^2}, \quad x_2 = \frac{z - \bar{z}}{i(1 + |z|^2)}, \quad x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}.$$



4. Soit $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. Calculer $\|f_n\|_\infty, \|f_n\|_1, \|f_{n+k} - f_n\|_\infty, \|f_{n+k} - f_n\|_1$.

5. Soit la suite de fonctions :

$$f_n(x) = \begin{cases} \sqrt{n} - n\sqrt{n}x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/n, \\ 0 & \text{si } 1/n \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Calculer les normes $\| \cdot \|_\infty, \| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ de f_n . Etudier la convergence de cette suite de fonctions.

6.

a) Soit $f_n(x) = (x \cdot (1 - x))^n$. Calculer $\sup \{f_n(x), 0 \leq x \leq 1\}$ et en déduire que f_n tend uniformément vers 0, pour $x \in [0, 1]$.

b) Soit $P[0, 1]$ l'espace vectoriel des fonctions polynomiales sur $[0, 1]$, c'est-à-dire les fonctions de la forme $\sum_{h=0}^d a_h x^h$. Montrer que

$$\left\| \sum_{h=0}^d a_h x^h \right\|_* = \sup_{0 \leq h \leq d} |a_h|$$

définit une norme sur $P[0, 1]$.

Montrer que $\|f\|_\infty \leq \|f\|_*$, pour tout $f \in P[0, 1]$. Néanmoins, déduire de a) que ces deux normes ne sont pas équivalentes.

c) Montrer que si $f_n(x) = \sum_{h=0}^d a_h^n x^h$, $n = 1, \dots, \infty$ est une suite dans $P[0, 1]$ vérifiant $\deg(f_n) \leq d$, $\forall n \geq 1$, alors :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \{f_n(x), 0 \leq x \leq 1\} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_h^n = 0 \quad , \quad \forall h = 0, \dots, d.$$