UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 1

29 octobre 2002

---

1. On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ suivants :

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x+y \leqslant 1\} \qquad B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (x^2-1)(x^2-4) = 0\}$$
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x^2+y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0\} \qquad D = \{1/n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Lesquels sont fermés, ouverts, bornés, compacts ?

2. Soit $M(2,2,\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des 2×2-matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$. Pour tout $i = 0,1,2$, on considère les ensembles:

$$\Sigma^i = \{A \in M(2,2,\mathbb{R}) \mid \mathrm{rang}(A) = i\}$$

a) Dire si les ensembles Σ^i, $i = 0,1,2$, sont ouverts, fermés ou ni l'un, ni l'autre.
b) Trouver leurs adhérences.

3. Définissons :

$$f(x_1,x_2) = \begin{cases} x_2^2/x_1 & \text{si } x_1 \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour $\varepsilon > 0$, décrire l'ensemble $f^{-1}(]-\varepsilon,\varepsilon[)$ et en déduire que f n'est pas continue en $(0,0)$.

4. Soit (X,d) un espace métrique, $A \subset X$ et $x \in A$. La distance du point x au sous-ensemble A est définie par :

$$d(x,A) = \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}$$

Montrer que $x \in \overline{A} \quad \Leftrightarrow \quad d(x,A) = 0$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

5. Pour $a, c \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, montrer que $az\overline{z} + b\overline{z} + \overline{b}z + c = 0$ est l'équation d'un cercle dans $\mathbb{C}$. Discuter le cas $a = 0$.

6. On suppose $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ avec $z_1 z_2 \neq 0$. Vérifier que:

$$Log(z_1 z_2) = Log(z_1) + Log(z_2) + 2i\pi n(z_1,z_2)$$

où:

$$n(z_1,z_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } -2\pi < Argz_1 + Argz_2 \leqslant -\pi \\ 0 & \text{si } -\pi < Argz_1 + Argz_2 \leqslant \pi \\ -1 & \text{si } \pi < Argz_1 + Argz_2 \leqslant 2\pi \end{cases}$$

7. (De Moivre)
a) Pour $a \in \mathbb{C}$ et $\theta \in]-\pi,\pi]$, vérifier la formule:

$$(cos\theta + isin\theta)^a = cos(a\theta) + isin(a\theta)$$

b) Constater que la restriction sur θ est nécessaire.
c) Remarquer que la formule est vraie $\forall \theta \in \mathbb{R}$ si $a \in \mathbb{Z}$.