UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences — Analyse II — 14 janvier 2003
Section de mathématiques — Série 10

1. On dit que le point (x_0, y_0) de la courbe d'équation $y - g(x) = 0$, où g est de classe $\mathcal{C}^2$, est un point d'inflexion si $g''(x_0) = 0$. Plus généralement, soit (x_0, y_0) un point régulier de la courbe d'équation $f(x, y) = 0$, où f est de classe $\mathcal{C}^2$; soit $g :]x_0 - r_0, x_0 + r_0] \to]y_0 - R_0, y_0 + R_0[$ telle que $f(x, g(x)) = 0$, au cas où $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ (sinon il faut échanger les rôles de x et y). On dit que (x_0, y_0) est un point d'inflexion de $Z(f)$ si $g''(x_0) = 0$.

Montrer que les points d'inflexion de $Z(f)$ sont ceux qui satisfont l'équation :

$$f_{y,y} \cdot f_x^2 - 2f_{x,y} \cdot f_x \cdot f_y + f_{x,x} \cdot f_y^2 = 0$$

où h_x (resp. h_y) désigne la dérivée par rapport à x (resp. par rapport à y) de la fonction $h(x, y)$.
(Indication : on sait que $g'(x) = -f_x/f_y$; calculer à partir de là $g''(x)$ en fonction des dérivées de f).

Trouver les points d'inflexion des courbes suivantes et les esquisser:

$$y^2 - x^2(x - 1) = 0 \quad ; \quad x^3 + y^3 - 1 = 0$$

2. Trouver la distance minimale de la courbe plane $x^2 + 8xy + 7y^2 - 225 = 0$ à l'origine. Cette courbe est-elle compacte ?

3. Montrer que la courbe de l'espace d'équations $x^2 + (y - 1)^2 - 1 = 0$ et $y + 1/2z - 1 = 0$ est compacte. Trouver les distances minimales et maximales de ses points à l'origine.

4. (Phénomène de Gibbs)

a) Montrer la formule $\displaystyle\frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } -\pi < x < 0. \end{cases}$

b) Vérifier que $\displaystyle s_n(x) = \frac{4}{\pi}\sum_1^n \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1} = \frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin 2nt}{\sin t}dt$ en calculant s_n'.

c) Constater que s_n est maximale en $\pi/2n$ et montrer que $\lim_{n\to\infty} s_n(\pi/2n) = \displaystyle\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{sint}{t}dt > 1$.

5. (Riemann-Lebesgue pour intégrales impropres) Soit $f :]a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction telle que $f|_{[a',b']} \in \mathcal{R}$, pour tous $a < a' < b' < b$ et $\int -a^b |f| < \infty$. Montrer que :

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \to \infty \quad \text{quand} \quad \lambda \to \infty$$

En déduire que si f est 2π-périodique intégrable et satisfait, pour un $x \in \mathbb{R}$:

$$|f(x - t) - f(x)| \leqslant M|t|, \quad \text{pour} \quad |t| \text{ petit},$$

alors $s_n(f)(x) \to f(x)$ quand $n \to \infty$.

(Indication: Écrire $\displaystyle s_n(f)(x) - f(x) = \int_0^{2\pi} [f(x - t) - f(x)]D_n(t)df$)

6. Résoudre, en séparant les variables :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dans} \quad]0, \pi[\times]0, 5[,$$
$$u(x, 0) = x(\pi - x), \quad u(x, 5) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$
$$u(0, y) = u(\pi, y) = 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqslant y \leqslant 5.$$