1. Trouver les extrêmales de :
(a)

$$\int_0^1 \big(\varphi'(x)^2 + 12x\varphi(x)\big)dx \quad , \text{ avec } \varphi(0) = 2,\ \varphi(1) = 3$$

(b)

$$\int_1^2 \varphi'(x)\big(1 + x^2\varphi'(x)\big)dx \quad , \text{ avec } \varphi(1) = 3,\ \varphi(2) = 2$$

2. Trouver $\varphi_0 : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \in [a,b]$, $\varphi_0(a) = A$, $\varphi_0(b) = B$, qui minimise la fonctionnelle :

$$\int_a^b \frac{\sqrt{1+\varphi'(x)^2}}{\varphi(x)}dx$$

(Cette intégrale représente la longueur de la courbe $x \mapsto (x, \varphi(x))$ dans le demi-plan $\big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\big\}$ muni de la métrique hyperbolique.)

3. Décrire les géodésiques du cylindre de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

4. Soit $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ un système orthonormé complet de $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. Si f, g appartiennent à $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$, et si c_n, d_n sont les coefficients de Fourier de f, g, montrer l'égalité :

$$< f, g >= \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\overline{d_n}$$

Indication: $4 < f,g >= \|f+g\|^2 - \|f-g\|^2 + i\,\|f+ig\|^2 - i\,\|f-ig\|^2$.

Corriger l'énoncé pour un système orthogonal complet.

5. Vérifier que la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ appartient à l'espace $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

6. Soit $G : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$G(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}e^{-ixt}dx$$

Montrer que G vérifie l'équation différentielle $2G'(t) + tG(t) = 0$ et en conclure que $G(t) = \sqrt{\pi}e^{-t^2/4}$. En déduire la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = e^{-a^2x^2}$ si $a \in \mathbb{R}$.