UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 13

11 mars 2003

---

1. Montrer que si $f :]-a, a[\to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f(0) = f'(0) = 0$ et $f''(0) > 0$, alors il existe un difféomorphisme local h au voisinage de $0 \in]-a, a[$ tel que $h(0) = 0$, et $f(h^{-1}(x)) = x^2$.

2. Pour quelles valeurs de r et R le système d'équations :

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$
$$x^2 + z^2 - R^2 = 0$$

définit-il une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Esquisser le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ ainsi défini.

3. Soit $M(n, n, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels et $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ les sous-espace des matrices symétriques. Définissons $\varphi : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ par $\varphi(A) = A \cdot A^t - I$, où A^t désigne la transposée et I la matrice identité. Montrer que si $\varphi(A) = 0$, alors la dérivée $d\varphi_A : M(n, n, \mathbb{R}) \to \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ est surjective. En déduire que le groupe orthogonal $O(n)$ est une sous-variété de $M(n, n, \mathbb{R})$. Calculer sa dimension (Utiliser l'exercice 1, série 8.)

4. Vérifier que :

a) $z \mapsto Log z$ est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C} - \{z \in \mathbb{R}, z \leqslant 0\}$,

b) $z \mapsto \sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

Sur quel sous-ensemble de $\mathbb{C}$ la fonction $z \mapsto tg(z) = \dfrac{\sin z}{\cos z}$ est-elle $\mathbb{C}$-différentiable?

5. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}$-différentiable et Γ une courbe rectifiable fermée dans Ω. Montrer que :

$$\int_\Gamma F'(z)dz = 0$$

Appliquer ce résultat à $\displaystyle\int_\Gamma \frac{1}{(z-a)^n} dz$, où $n \neq 1$ et Γ ne passe pas par a.

6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continûment $\mathbb{C}$-différentiable; on pose $f = u + iv$. Vérifier les assertions suivantes :

a) $u =$ constante $\quad\Rightarrow\quad f$ est localement constante,

b) $u^2 + v^2 =$ constante $\quad\Rightarrow\quad f$ est localement constante,

c) $g(z) = \overline{f(\overline{z})}$ définit une fonction $\mathbb{C}$-différentiable sur $\widetilde{\Omega} = \{z \in \mathbb{C}, \overline{z} \in \Omega\}$.