UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 18 mars 2003

Section de mathématiques | Série 14

---

1. L'équation du tore obtenu par rotation autour de l'axe OZ du cercle dans le plan OYZ d'équation $(y-R)^2+z^2-r^2=0$, est $f(x,y,z)=(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2+z^2-r^2=0$. Montrer que cette équation est de rang maximum sur le tore, pourvu que $R>r>0$.

2. Trouver l'enveloppe de la famille d'ellipses :

$$x^2+y^2\lambda^2-\lambda=0$$

3. Soit $\alpha: I\to\mathbb{R}^2$, $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle, un courbe régulière. Montrer que l'enveloppe des droites normales à la courbe est le lieu des centres des cercles osculateurs. (Indication : le centre du cercle osculateur à la courbe par $\alpha(t)$ est $\alpha(t)+\mu\nu(t)$, où $\nu(t)=(-\alpha_2'(t),\alpha_1'(t))$ est le vecteur normal à la courbe en $\alpha(t)$ et $\mu=\frac{1}{\langle\nu(t),\alpha''(t)\rangle}$, où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire).

4. Calculer $\displaystyle\int_\gamma\left(\frac{z}{z-1}\right)^n dz$ pour $n\in\mathbb{N}$ et $\gamma(t)=1+e^{it}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$.

5. Soit $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}-[0,1]$, montrer que f est entière, c'est-à-dire $\mathbb{C}$-différentiable sur $\mathbb{C}$.

6. En calculant $\displaystyle\int\frac{dz}{z}$ sur deux contours, montrer la formule :

$$\int_0^{2\pi}\frac{dt}{a^2\cos^2(t)+b^2\sin^2(t)}=\frac{2\pi}{ab}$$