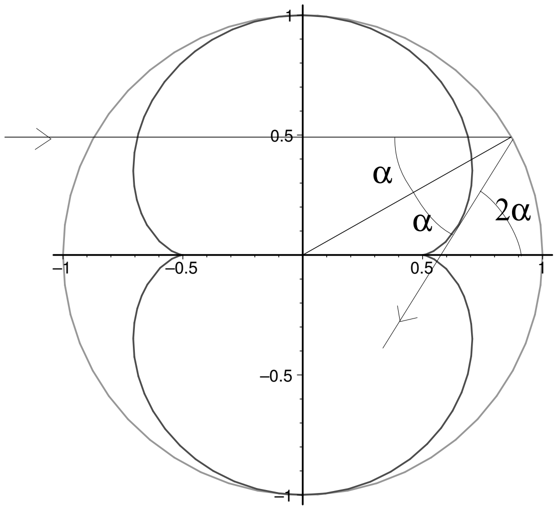
UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 15

25 mars 2003

---

1. Une source lumineuse se trouve à $-\infty$ sur l'axe OX, dans le plan OXY. Trouver l'enveloppe des rayons réléchis par le demi-cercle $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\,,\, x \geqslant 0\}$.



Indications : pour simplifier les calculs (?), identifier le plan aux nombres complexes. Montrer que la familles des rayons réfléchis est paramétrée par :

$$\varphi(\alpha, s) = e^{i\alpha} + se^{2i\alpha}$$

en faisant correspondre à α le rayon par $e^{i\alpha}$. Montrer ensuite que si $f(x, y) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$, le déterminant de son jacobien s'écrit $c \cdot (f_x \cdot \overline{f}_y - f_x \cdot \overline{f}_y)$, où c est une constante universelle et $\overline{f}_x$ est le conjugué de la dérivée de f par rapport à x, etc. Cela permet de calculer facilement le déterminant du jacobien de $\varphi(\alpha, s)$, et de là on déduit une paramétrisation de l'enveloppe, qui est en faite la néphroïde de la figure ci-contre.

2. Résoudre l'équation $y' = y^2 \cos(t)$ et esquisser la famille des solutions.

3. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = & x - y \\ y' = & x + y \end{cases}$$

en passant en coordonnées polaires et esquisser les trajectoires.

4. Soit f une fonction holomorphe sur le disque $D(0, 1)$, continue sur $\overline{D(0, 1)}$. Pour tout $z_0 \in D(0, 1)$, montrer la formule :

$$\left(1 - |z_0|^2\right) f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} f(z) \left(\frac{1 - z\overline{z_0}}{z - z_0}\right) dz$$

5. Soit $f = \sum a_n(z - z_0)^n$ une série convergente pour $|z - z_0| < R$. Montrer l'égalité de Parseval :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

pour tout $r < R$, et en déduire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant \sup_{|z-z_0|=r} |f(z)|^2$$

6. Donner les rayons de convergence des séries $\sum n^p z^n$, $\sum \frac{2^n}{n!} z^n$, $\sum \frac{n^3}{3^n} z^n$ et de la série de Taylor en 0 de $f(z) = \dfrac{z}{e^z - 1}$.