UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 16

1er avril 2003

4. Trouver les solutions de l'équation différentielle $y't^3 - 2y = 0$. Montrer que pour toute condition initiale (t_0, y_0), avec $t_0 \neq 0$, il existe une infinité de solutions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x' = & -x + x^2 - y^2 \\ y' = & -y + 2xy \end{cases}$$

et décrire les trajectoires.
(*Indication* : il s'agit en fait de l'équation associée au champ de vecteurs qui s'ecrit sous la forme $\xi = z(z-1)$, où $z = x + iy$. Utiliser la transformation $h(z) = \frac{z}{z-1}$ pour se ramener à l'équation associée au champ $\eta(x, y) = (x, y)$).

3. Résoudre les systèmes d'équations suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y \\ \dot{y} = 4x + 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

4. (Lemme de Schwarz)
Soit $f \in \mathcal{O}(D(0,1))$ telle que $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in D(0,1)$ et $f(0) = 0$. Appliquer le principe du maximum à la fonction $g(z) = f(z)/z$ dans $D(0, r)$, $r < 1$. En déduire que $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D(0,1)$ et que $|f'(0)| \leqslant 1$. Montrer de plus que s'il existe $z_0 \in D(0,1) - \{0\}$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$, alors il existe un nombre complexe c de module 1 tel que $f(z) = cz$ pour tout z.

Corriger l'énoncé pour $f \in \mathcal{O}(D(0, R))$, $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D(0, R)$ et $f(0) = 0$.

5. Déterminer le rayon du plus grand disque centré en 0 sur lequel la fonction $f(z) = z^2 + z$ est injective.

6. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Comparer les assertions suivantes :

a) $\widehat{\mathbb{C}} - \Omega$ est connexe,

b) $n(\gamma, w) = 0$ pour tout chemin fermé γ dans Ω et tout point $w \in \mathbb{C} - \Omega$.