UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 17

8 avril 2003

---

1. Décrire l'allure des solutions des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x} = -3x - 4y \\ \dot{y} = 4x + 3y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x - 2y \\ \dot{y} = 4x - 5y \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x + 4y \\ \dot{y} = -2x + 3y \end{cases}$$

2. (Problème aux limites) Soit $f : [a,b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et A, B deux nombres réels. On cherche une fonction $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ qui satisfait les conditions :

$$y'' = f(t,y) \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

Montrer que ce problème se ramène à résoudre l'équation intégrale :

$$y(t) = \frac{b-t}{b-a}A + \frac{t-a}{b-a}B + \int_a^b G(t,s) f(s, y(s)) ds$$

où :

$$G(s,t) = \begin{cases} \frac{(b-s)(a-t)}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant s \leqslant b \\ \frac{(b-t)(a-s)}{b-a} & \text{si} a \leqslant s \leqslant t \leqslant b \end{cases}$$

A l'aide du théorème du point fixe, montrer que si f satisfait la condition de Lipschitz :

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| \leqslant L\,|y_1 - y_2| \quad , \quad \forall\, t \in [a,b]\,, y_1\,, y_2 \in \mathbb{R}$$

avec $L(b-a)^2 < 8$, alors le problème possède une et une seule solution.

3. Pour quelles valeurs de a et b le problème aux limites suivant possède-t-il une et une seule solution :

$$y'' + y = 0 \quad , \quad y(a) = A \quad , \quad y(b) = B$$

4. En intégrant la fonction $f(z)/(z-a)(z-b)$ sur des cercles de grand rayon, donner une démonstration du théorème de Liouville lorsque f est holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$.

5. Intégrer la fonction $f(z) = e^{-z^2/2}$ sur le rectangle de sommets $a, a+iy, -a+iy, -a$ et faire tendre a vers l'infini. En déduire la valeur de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ity} e^{-z^2/2} dt$.

6. (Principe du minimum) Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $f \in \mathcal{O}(\Omega)$. Montrer que si f admet un minimum non nul sur Ω, alors f est constante. Corollaire : Si $f \in \mathcal{O}(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ est non constante et si Ω est borné, alors soit f s'annule en un point de Ω, soit $\min_\Omega |f| = \min_{\partial\Omega} |f|$.