UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences | Analyse II | 22 avril 2003

Section de mathématiques | Série 18

---

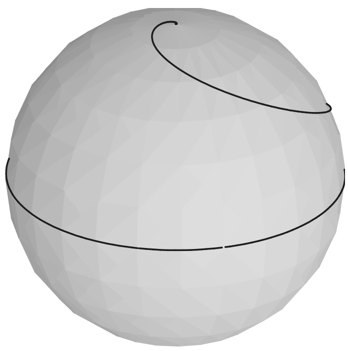
1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, $U \supset X$ un ouvert et $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs tangent à X, c'est-à-dire tel que :

$$y \in X \Longrightarrow \xi(y) \in TX_y$$

où TX_y désigne l'espace tangent à X au point y. Montrer que si $\varphi : I \to U$ est une trajectoire de ξ, et que $\varphi(t_0) \in X$ pour un $t_0 \in I$, alors $\varphi(t) \in X$ pour tout $t \in I$ (utiliser les équations locales de X). *On montrera plus tard que si X est compacte, les trajectoires maximales de ξ sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.*

2. Montrer que le champ $\xi(x, y, z) = (y, -x, 0)$ est tangent à la sphère S^2 définie comme l'ensemble $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0\}$. Trouver ses trajectoires.

3. Montrer que le champ $\xi = (-y + xz^2, x + yz^2, -z(x^2 + y^2))$ est tangent à la sphère. Esquisser ses trajectoires (On pourra utiliser la transformation $(\rho, \theta) \mapsto (\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta), \sqrt{1-\rho^2})$ pour se ramener à un champ dans le plan).



4. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega)$ une fonction holomorphe qui s'annule en $a_1, ..., a_n$. Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs $\alpha_1, ..., \alpha_n$ et une fonction $g \in \mathcal{O}(\Omega)$ ne s'annulant pas tels que :

$$f(z) = (z - a_1)^{\alpha_1} ... (z - a_n)^{\alpha_n} g(z), \quad \forall z \in \Omega$$

En déduire que $\frac{f'}{f}(z) = \frac{\alpha_1}{z - a_1} + ... + \frac{\alpha_n}{z - a_n} + \frac{g'}{g}(z)$ et que $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'}{f}(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k n(\gamma, a_k)$ si γ est un lacet homologue à 0 dans Ω qui évite $a_1, ..., a_n$.

5. Classer les singularités des fonctions $\frac{\sin z}{z}$, $\frac{1}{\cos z}$, $\frac{\log(1+z)}{z^2}$, $z^n \sin(\frac{1}{z})$.

6. Donner les développements de Laurent de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans les couronnes :

$$C_1 = \left\{z \in \mathbb{C}, \frac{1}{2} < |z| < 1\right\} \quad , \quad C_2 = \{z \in \mathbb{C}, 1 < |z| < 2\} \quad , \quad C_3 = \{z \in \mathbb{C}, 2 < |z|\}$$