UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 19

29 avril 2003

---

1. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, $U \supset X$ un ouvert et $\xi : U \to \mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs tangent à X, c'est-à-dire tel que :

$$y \in X \Longrightarrow \xi(y) \in TX_y$$

où TX_y désigne l'espace tangent à X au point y. Montrer que si X est compacte, alors les trajectoires maximales de ξ sont définies pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. On cherche une fonction holomorphe $w(z)$ satisfaisant l'équation différentielle :

$$w'(z) = \frac{1}{2w(z)}$$

Montrer qu'il existe une infinité de solutions maximales avec condition initiale $w(1) = 1$.

3. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad b(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t+1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $\begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ e^t \end{pmatrix}$ forment un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = A(y)$. En déduire une solution particulière de l'équation inhomogène $y' = A(y) + b(t)$.

4. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un disque épointé $D(a,r)^*$ telle que :

$$\int\int_{D(a,r)^*} |f(x,y)|^2 dxdy < +\infty$$

alors f se prolonge holomorphiquement à $D(a,r)$.

5. Soit $\{a_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ une suite de $D(0,r)^*$ qui tend vers 0 et f une fonction holomorphe sur $D(0,r)^*$ sauf aux points a_j où elle a des pôles. Montrer que pour tout c dans $\mathbb{C}$, il existe une suite $\{z_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $f(z_j)$ tende vers c.

6. Par la méthode des résidus, calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx \quad , \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}dx \quad , \quad \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{1 - 2acos\theta + a^2}d\theta$$

où a est un nombre réel tel que $a^2 < 1$