1. Soit $B_n^k(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$ le k-ième polynôme de Bernstein de degré n. Montrer que sa dérivée vérifie :

$$\left(B_n^k\right)'(x) = n\left(B_{n-1}^{k-1}(x) - B_{n-1}^k(x)\right)$$

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable dont la dérivée est continue. Soit (f_n) la suite de fonctions définie par $f_n(x) = \sum_{k=0}^n f(\frac{k}{n})\binom{n}{k} x^k(1-x)^{n-k}$. Déduire de la relation précédente que la suite des dérivées (f_n') converge uniformément vers f' sur $[0,1]$.

2. Considérons la suite de fonctions continues $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 0$, définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1/2 - 1/n \\ nx - n/2 + 1 & \text{si } 1/2 - 1/n \leqslant x \leqslant 1/2 \\ 1 & \text{si } 1/2 \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Esquisser le graphe de ces fonctions. Montrer que (f_n) est une suite de Cauchy dans $(\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big), \|\ \|_1)$. Montrer que si cette suite possède une limite f dans $(\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big), \|\ \|_1)$, alors $f(x) = 0$ si $0 \leqslant x < 1/2$ et $f(x) = 1$ si $1/2 \leqslant x \leqslant 1$. En déduire que $(\mathcal{C}\big([0,1],\mathbb{R}\big), \|\ \|_1)$ n'est pas complet.

3. On désigne par ℓ_1 l'espace vectoriel des suites de nombres réels absolûment convergentes :

$$\ell_1 = \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < \infty \right\}$$

On pose :

$$\|(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n|$$

Montrer que c'est une norme sur ℓ_1 et que ℓ_1 muni de cette norme est complet. (Indication : si la suite de suites $\{(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de $(\ell_1, \|\ \|_1)$, alors pour tout n fixé, $\{x_n^m\}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui converge donc vers un $a_n \in \mathbb{R}$. Reste à montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ et que la suite de suites $\{(x_n^m)_{n\in\mathbb{N}}\}_{m\in\mathbb{N}}$ tend vers la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$ au sens de la norme $\|\ \|_1$.)

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Est-elle à variation bornée? Même question pour la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = \sqrt{x}\sin(1/x)$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

5. On dit qu'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ satisfait une condition de Lipschitz d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe $M > 0$ tel que $\forall x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$; on note $f \in Lip_\alpha([a,b])$. Montrer les assertions suivantes:

$$(1)\ \alpha > 1 \Rightarrow Lip_\alpha([a,b]) = \mathbb{C}, \quad (2)\ Lip_1([a,b]) \subsetneq VB([a,b]), \quad (3)\ Lip_\alpha([a,b]) - VB([a,b]) \neq \emptyset$$

6. Pour tout $t \in [0, 2\pi]$, posons $\gamma_1(t) = e^{it}$, $\gamma_2(t) = e^{2it}$ et $\gamma_3(t) = e^{2i\pi t\sin(1/t)}$ si $t \neq 0$, $\gamma_3(0) = 1$. Montrer que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ont la même image, que γ_1 et γ_2 sont rectifiables mais pas γ_3.