UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 20

6 mai 2003

---

1. Calculer l'exponentielle des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Résoudre $y' = Ay$ en calculant e^{tA} dans les cas suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Soit $A \in M(2,2,\mathbb{C})$. Si $Tr((a_{i,j})) = a_{1,1} + a_{2,2}$, montrer que :

$$\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$$

Indication: traiter d'abord le cas où A est diagonalisable, puis se ramener au cas général par passage à la limite.

4. Soit $f = \sum_{n=0}^{+\infty} z^{2^n}$. Vérifier que cette série converge pour $|z| < 1$ et que f satisfait la relation $f(z) = z + f(z^2)$. En déduire que f n'admet pas de prolongement holomorphe au voisinage de 1, ni au voisinage de -1, i, $-i$. Donc f ne s'étend à aucun ouvert contenant strictement $D(0,1)$.

5. Soit f holomorphe sur un voisinage du disque $\overline{D(0,1)}$ telle que $|f(z)| < 1$ si $|z| = 1$. Montrer que f admet un unique point fixe dans $D(0,1)$.

6. Par la méthode des résidus, montrer :

$a)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha}{(1+x)^n} dx = \frac{\pi\alpha(\alpha+1)...(\alpha+m-2)}{(m-1)!\sin(\pi\alpha)} \quad , \quad m \geqslant 2 \quad , \quad 1-m < \alpha < 1.$

$b)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{logx}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{log^2(a) - log^2(b)}{2(a-b)} \quad , \quad a \neq b > 0.$

$c)$ $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^b} = \frac{\pi}{b\sin(\frac{\pi}{b})} \quad , \quad b > 1.$