UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 21

13 mai 2003

---

1. Résoudre les équations $y' = A(y)$ en calculant l'exponentielle, dans les 2 cas suivants :

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \qquad \text{b) } A = \begin{pmatrix} \mu & -\alpha \\ \alpha & \mu \end{pmatrix}$$

Dans le cas b), écrire $A = \mu \cdot I + \alpha \cdot J$, où I est la matrice identité et J est la matrice :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Montrer que $J^2 = -I$ et calculer l'exponentielle de $(t - t_0) \cdot J$ à partir de la série qui la définit.

2. Soient $Asym(n) = \{A \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid A + A^t = 0\}$ l'espace des matrices antisymétriques. Montrer que l'application :

$$\varphi : Asym(n) \to M(n, n, \mathbb{R}) \quad , \quad \varphi(A) = e^A$$

est une paramétrisation locale du groupe orthogonal $\mathcal{O}(n) = \{R \in M(n, n, \mathbb{R}) \mid R^t R = I\}$ au voisinage de I =identité.

3. Dire quelle est la nature du point critique $(0, 0)$ à l'aide d'une fonction de Liapounov de la forme $x^2 + ay^2$:

$$\xi = (-2xy^2 - x^3, -y + x^2 y) \quad , \quad \xi = (2xy + x^3, -x^2 + y^3) \quad , \quad \xi = (x^3 + y^2, y^2 - y^3)$$

4. Décomposer en série de fractions simples la fonction $f = \dfrac{1}{e^z - 1}$.

5. Soit $f \in \mathcal{O}(\Omega - \{a\})$ où Ω est un ouvert contenant $\overline{D(0,1)}$ et $|a| = 1$. Si $\sum_n f_n z^n$ est la série de Taylor de f en 0, montrer que f_n tend vers $|Res(f, a)|$ et que f_n / f_{n+1} tend vers $|a|$ quand n tend vers l'infini.

6. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{logx}{x^2 - 1} dx$.