UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 22

20 mai 2003

---

1. Etudier la stabilité en $(0,0)$ des équations suivantes, soit par linéarisation, soit à l'aide d'une fonction de Liapounov de la forme $x^2 + ay^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = -xy^2 - 2y \\ \dot{y} = x - x^2 y \end{cases} , \quad \begin{cases} \dot{x} = y - \sin(x)^3 \\ \dot{y} = -4x - \sin(y)^3 \end{cases} , \quad \begin{cases} \dot{x} = e^y - 1 \\ \dot{y} = -\sin(x) - y \end{cases}$$

2. L'équation du mouvement du pendule s'écrit :

$$\ddot{x} + k\sin(x) = 0$$

où x représente l'angle du bras du pendule avec la verticale et k est une constante positive. En posant $y = \dot{x}$ cette équation est équivalente au système d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k\sin(x) \end{cases}$$

Etudier les points critiques de ce système et leur stabilité. (Indication: en $(0,0)$, on peut utiliser la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle, qui est constante sur les trajectoires; en $(\pm\pi, 0)$, on peut regarder la partie linéaire de l'équation).

3. L'équation du mouvement du pendule avec friction s'écrit :

$$\ddot{x} + c\dot{x} + k\sin(x) = 0$$

où c est une nouvelle constante positive. Ramener, en posant $y = \dot{x}$, à un système de deux équations d'ordre 1. Etudier la nature des points critiques par linéarisation. En déduire que l'équation étudiée sous 2) n'est pas structurellement stable.

4. Soit λ un nombre réel > 1. Montrer que l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$ a exactement une solution dans le demi-plan $\{z \in \mathbb{C},\ Re(z) > 0\}$. Vérifier que cette solution est réelle.

5. (Méthode de Cauchy) Soit $f \in \mathcal{M}(\mathbb{C})$ une fonction méromorphe ayant des pôles simples aux points $a_1, a_2, \ldots$ et soit $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tendant vers l'infini tels que $R_k \neq a_n$ pour tous k, n. On suppose que $a_n \neq 0$ pour tout n, et qu'il existe une constante $M > 0$ telle que $\sup_{|z|=R_k} |f(z)| \leqslant M$ pour tout k. Montrer que :

$$f(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} Res(f, a_n) \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} \right)$$

(*Indication: Le théorème des résidus nous donne* $f(z) = \sum_{|a_n|<R_k} \frac{Res(f,a_n)}{z-a_n} + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R_k} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$. *Poser* $z = 0$ *et faire la différence*). En déduire que :

$$\frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z^2 - n^2}$$

6. Etudier la convergence de $\displaystyle\prod_{n=2}^{+\infty} \frac{n^2-4}{n^2-1}$, $\displaystyle\prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$, $\displaystyle\prod_{n=0}^{+\infty} (1 + z^{2^n})$.