UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 23

27 mai 2003

---

1. Etudier la stabilité du point critique $(0,0)$ pour le champ de vecteurs :

$$\xi(x,y) = (-2xy^2 - x^3, -y + x^2 y)$$

2. Etudier les trajectoires de la famille de champs de vecteurs :

$$\xi_\varepsilon = (-y + x(\varepsilon - x^2 - y^2), x + y(\varepsilon - x^2 - y^2))$$

a) Etude à priori :
  - Montrer que la famille des trajectoires est invariante par rotation (indication: si R est une rotation, montrer d'abord que $\xi_\varepsilon(R(P)) = R(\xi_\varepsilon(P))$, $P \in \mathbb{R}^2$).
  - Etudier la nature du point critique $(0,0)$, par linéarisation si $\varepsilon \neq 0$, à l'aide de la méthode directe de Liapounov si $\varepsilon = 0$.
  - Montrer que si $\varepsilon > 0$, le cercle $x^2 + y^2 = \varepsilon$ est une trajectoire.

b) Par résolution explicite en passant en coordonnées polaires. On peut ensuite résoudre par séparation des variables.

3. Le système d'équations :

$$\begin{cases} x' = x(\varepsilon_1 - \sigma_1 x - \alpha_1 y) \\ y' = y(\varepsilon_2 - \alpha_2 x - \sigma_2 y) \end{cases} \quad , \quad \varepsilon_i, \alpha_i, \sigma_i > 0 \quad , \quad \sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 \neq 0$$

représente l'évolution de deux espèces en compétition. Trouver le point critique situé dans le premier cadran (strictement). Pour $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1, \sigma_1 = 2, \sigma_2 = 3, \alpha_1 = \alpha_2 = 1$, étudier la nature du point critique par linéarisation, et montrer que les deux espèces peuvent coexister (plus généralement, on peut montrer que si $\sigma_1\sigma_2 - \alpha_1\alpha_2 > 0$, alors les deux espèces peuvent coexister). On trouvera une résolution et des dessins de trajectoires, à l'aide de Maple, sur la page Web du cours.

4. (Formule de Taylor avec reste) Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant $\overline{D(0,R)}$. Pour $|z| < R$ et $n \in \mathbb{N}$, établir la formule suivante :

$$f(z) = f(0) + f'(0)z + ... + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} z^{n-1} + f_n(z) z^n$$

où $f_n(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{\zeta^n(\zeta - z)} d\zeta$ (*Indication : remplacer* $\dfrac{1}{\zeta - z}$ *par* $1 + \dfrac{z}{\zeta} + ... + \dfrac{z^{n-1}}{\zeta^{n-1}} + \dfrac{z^n}{\zeta^n(\zeta - z)}$ *dans la formule de Cauchy*).

5. Vérifier les formules suivantes :

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_1^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n-1)}{(n - \frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad \pi \tan \pi z = 2z \sum_1^{+\infty} \frac{1}{(n - \frac{1}{2})^2 - z^2}, \quad \cos \pi z = \prod_1^{+\infty} \left(1 - \frac{4z^2}{(2n-1)^2}\right).$$

6. Si $\psi(z) = \Gamma'(z)/\Gamma(z)$, montrer que $\psi(z+1) - \psi(z) = \dfrac{1}{z}$ et que $\psi(1-z) - \psi(z) = \dfrac{\pi}{\tan \pi z}$.