UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 24

3 juin 2003

---

1. Soit $\alpha \in A^2(\mathbb{R}^{2n})$ définie par $\alpha = dx_1 \wedge dx_2 + \dots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}$. Calculer $\underbrace{\alpha \wedge \ldots \wedge \alpha}_{n fois}$.

2. Soient $\omega \in A^1(E)$, $\omega \neq 0$, et $\alpha \in A^r(E)$. Montrer que pour qu'il existe $\beta \in A^{r-1}(E)$ telle que $\alpha = \beta \wedge \omega$, il faut et il suffit que $\alpha \wedge \omega = 0$.

3.

a) Soit $f_1, \ldots, f_n$ une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ sa base duale. Montrer que

$$\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n = \pm dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$$

et que le signe détermine l'orientation de $f_1, \ldots, f_n$.

b) Montrer que l'isomorphisme :

$$\Lambda^1(\mathbb{R}^3) \to \Lambda^2(\mathbb{R}^3) \quad , \quad a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3 \mapsto a_1 dx_2 \wedge dx_3 + a_2 dx_3 \wedge dx_1 + a_3 dx_1 \wedge dx_2$$

ne dépend que de l'orientation et de la métrique de $\mathbb{R}^3$, c'est-à-dire que si au lieu de prendre la base naturelle de $\mathbb{R}^3$ et sa duale dx_1, dx_2, dx_3 on prend une autre base orthonormale, de même orientation, et sa duale, on obtient le même isomorphisme.

4. Démontrer la formule de Wallis :

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2 \times 2 \times ... \times (2n)^2}{1 \times 3 \times 3 \times ... \times (2n-1)^2 (2n+1)} = \prod_{1}^{+\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}$$

5. Pour $Re(u), Re(v) > 0$, on définit $\beta(u,v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1} dt$.

a) Montrer que $\beta(u,v) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta)^{2u-1}(\cos\theta)^{2v-1} d\theta$ et en déduire que $\beta(u,u) = 2^{1-2u}\beta(u, \frac{1}{2})$.

b) Vérifier la formule $\beta(u,v) = \dfrac{\Gamma(u)\Gamma(v)}{\Gamma(u+v)}$ et en déduire $\sqrt{\pi}\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})$.

c) Vérifier que $\beta(u,v) = \int_0^{+\infty} \dfrac{t^{u-1}}{(1+t)^{u+v}} dt$ et que $\int_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{e^{ax}}{e^x+1} dx = \dfrac{\pi}{\sin(\pi a)}$.