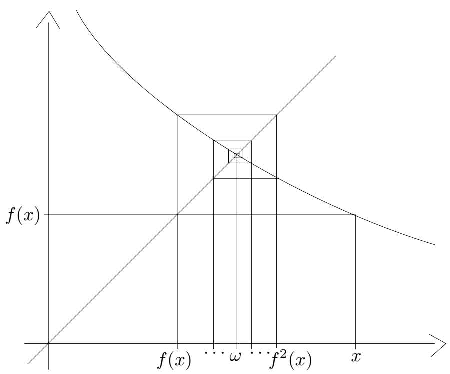
UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences — Analyse II — 12 novembre 2002
Section de mathématiques — Série 3

---

1. Soit $f(x) = x^3 - 2x - 5$. Il possède une racine près de $x_0 = 2$. Calculez-la à l'aide de la méthode de Newton, avec $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x_0)}$, à 2 décimales près (Indication: vérifiez que l'on peut prendre $x_0 = 2$, $r = \frac{1}{4}$, $q = \frac{3}{5}$).

2. Soit $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ une application continue, admettant une dérivée continue. Supposons que $f(\omega) = \omega$ et $|f'(\omega)| < 1$, pour un $\omega \in]a,b[$. Utiliser le théorème des accroissements finis pour en déduire l'existence d'un $r > 0$ tel que $[\omega - r, \omega + r] \subset]a,b[$ et tel que le théorème du point fixe s'applique à $f|_{[\omega - r, \omega + r]}$. Montrer que si $|f'(x_0)| > 1$ un tel r n'existe pas.

3. Soit $f(x) = \frac{1}{2}(x - x^2)$. Trouver les points fixes de f. Pour chaque point fixe ω dire, à l'aide de l'exercice 2, s'il existe un voisinage V tel que si $x \in V$, les itérés de $f^n(x)$ convergent vers ω. Représenter graphiquement ces itérés, comme sur le dessin ci-dessous.



Même question pour $f(x) = 2x(1-x)$.

4. Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue. Montrer que f possède au moins un point fixe (Indication: considérer la fonction $g(x) = f(x) - x$.)

---

5. Soit $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction à variation bornée. Montrer que:

$$V_{[a,b]}(\alpha) = \int_a^b |d\alpha|$$

Appliquer cette formule pour calculer la longueur de la courbe paramétrée par $\gamma(t) = \exp(\frac{-1+i}{t})$ si $t \in]0,1]$ et $\gamma(0) = 0$.

6. Si $\gamma_r(t) = re^{it}$, pour $r > 0$ et $t \in [0, \pi]$, vérifier que:

$$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

7. Utiliser la formule d'intégration par parties pour l'intégrale de Stieltjes pour montrer, quand $s \in \mathbb{C}$:

$$a)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^s} = \frac{1}{n^{s-1}} + s \int_0^n \frac{[x]}{x^{s+1}} dx \quad , \quad b)\ \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k}{k^s} = s \int_0^{2n} \frac{2[x/2] - [x]}{x^{s+1}} dx$$