1. Trouver les solutions de l'équation intégrale :

$$\phi(x) = x - \int_0^x (x-t)\phi(t)dt$$

par itérations successives, en partant de la fonction $\phi_0(x) \equiv 0$.

2. Soit $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire ayant pour matrice :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 10 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme $\|(x,y)\| = \sup\{|x|, |y|\}$. Montrer que A n'est pas contractante. Trouver N tel que A^N soit contractante.

3. Soient

$$f(x) = x^3 - x + \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

Montrer que $t(0) = 1/\sqrt{2}$ et $t(1/\sqrt{2}) = 0$. Appliquer l'exercice 2, série 3 à la fonction $g(x) = t(t(x))$, pour montrer l'existence d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ tel que, si on applique la méthode de Newton à $f(x)$, avec $t(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$ et un point de départ dans U, on obtienne une suite qui ne converge pas. Expliquer ce paradoxe : le deuxième itéré t^2 de t est contractant sur un voisinage de 0, mais 0 n'est pas point fixe de t.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Donner un exemple de courbe fermée Γ rectifiable dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ avec $n(\Gamma, z) = k$.

5. Soit f une fonction continue sur $\gamma([a,b])$, où $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est rectifiable. On suppose que :

$$|\int_\gamma f| = sup|f|.L(\gamma)$$

Montrer que $|f|$ est constante et trouver un exemple où f n'est pas constante.

6. Soient $0 < a < b$ et $s \in \mathbb{R} - \{1\}$. Calculer $\int_a^b x^s (\log x)^2 dx$ en différentiant $\int_a^b x^s dx$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \geqslant 0$, posons :

$$f(x,y) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{y} \\ -x + 2\sqrt{y} & \text{si } \sqrt{y} \leqslant x \leqslant 2\sqrt{y} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On prolonge f à $\mathbb{R}^2$ en posant $f(x,y) = -f(x,-y)$ pour $y < 0$. Comparer les expressions :

$$\frac{d}{dy}\left(\int_{-1}^1 f(x,y)dx\right)_{y=0} \quad \text{et} \quad \int_{-1}^1 \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$$