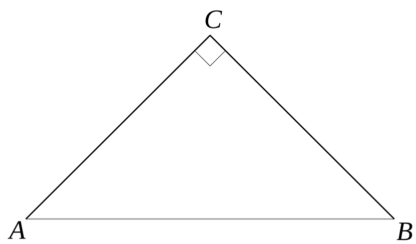
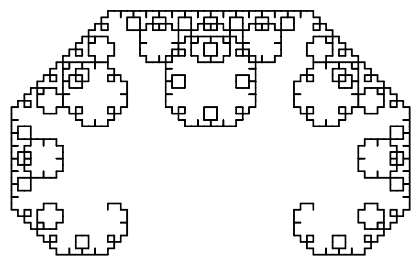
UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Faculté des sciences	Analyse II	26 novembre 2002
Section de mathématiques	Série 5	

1. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le fractal défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un segment $\overline{AB}$ dans le plan, et on construit le triangle isocèle $\Delta(ABC)$ ayant $\overline{AB}$ pour base et un angle droit au sommet C; puis on recommence avec $\overline{AC}$ et $\overline{CB}$, et ainsi de suite (voir figure ci-desous).



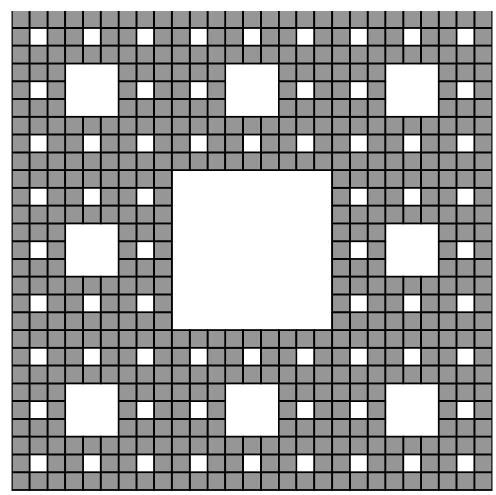
après 10 étapes :



Trouver 2 transformations affines contractantes w_1 et w_2 telles que $D = w_1(D) \cup w_2(D)$. Calculez la dimension de Hausdorff de D.

2. Soit $TS \subset \mathbb{R}^2$ défini en répétant indéfiniment le procédé suivant : on part d'un carré de sommets A, B, C, D dans le plan. On le partage en 9 carrés égaux, de coté égal au tiers du côté du carré de départ, on enlève le carré du milieu. Puis on recommence avec les 8 carrés restants, et ainsi de suite. La figure ci-contre montre le résultat après 3 étapes (on appelle ce fractal le "tapis de Sierpinski").

Trouver des transformations affines contractantes w_i, $i = 1, \ldots, N$ telles que $TS = w_1(TS) \cup \ldots \cup w_N(TS)$. Calculez la dimension de Hausdorff de TS.



Des expériences en Maple sur la méthode de Newton et les fractals vous sont proposées sur la page Web :

`http://www.unige.ch/math/folks/ronga/lyse_II/2002-2003/`

3. Trouver la distance de Hausdorff entre A et B:

i) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 = 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y+3)^2 = 9\}$

ii) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sup\{|x|, |y|\} = 1\}$

iii) $A = [0,1] \subset \mathbb{R}$, $B =$ ensemble de Cantor

iv) $A = [-1,+1] \times \{0\} \subset \mathbb{R}^2$, $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$, où $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

✠✠✠✠✠✠✠✠✠

4. On suppose que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est à variation bornée sur $[0, b]$ pour tout $b > 0$, et que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe. Montrer que :

$$\lim_{y\to 0^+} y \left(\int_0^\infty e^{-xy} f(x) dx \right) = \lim_{x\to\infty} f(x)$$

Indication: Intégrer par parties.

5. Etablir la formule suivante pour tout $p > -1$:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^p dx = \int_0^\infty e^x x^p dx$$

Indication: Donner des hypothèses convenables pour avoir $\lim_{n\to\infty} \int_a^{b_n} f = \int_a^b f$, où $b_n \to b$.

6. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, posons:

$$g(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} e^{-x^2} dx$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et satisfait l'équation $2g'(y) + yg(y) = 0$. En déduire que :

$$g(y) = \sqrt{\pi} e^{\frac{-y^2}{4}}$$

grâce à la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$