UNIVERSITÉ DE GENÈVE
Faculté des sciences
Section de mathématiques

Analyse II
Série 6

3 décembre 2002

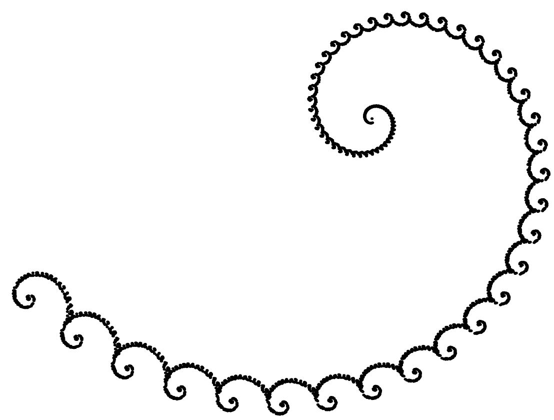
1. Trouver la limite des suites de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^2)$ suivantes :
i) $X_n = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{n}{n-1}x^2 + ny^2 = 1\right\}$, $n \geqslant 1$
ii) $X_n = \{(x, x^n)\, ,\, 0 \leqslant x \leqslant 1\}$

2. Soient $w_1(x) = x/3$, $w_2(x) = x/3 + 2/3$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Définissons la suite $\{x_n\}$ par récurrence :

$x_1 = w_1(x_0) \quad , \quad x_2 = w_2(x_1) \quad , \ldots ,$
$x_{2n+1} = w_1(x_{2n}) \quad , \quad x_{2n+2} = w_2(x_{2n+1}) \quad .$

Montrer que la suite x_n s'accumule vers l'ensemble $\{1/4, 3/4\}$.

3. Décrire 2 transformations affines w_1 et w_2 telle que $L = w_1(L) \cup w_2(L)$, où L est la limace ci-contre :



✠✠✠✠✠✠✠✠

4. Pour $x \neq y \in \mathbb{C}$ et $\epsilon > 0$, posons:

$$a_\epsilon^\pm = \frac{x+y}{2} \pm i\epsilon\frac{x-y}{2}, \qquad \gamma(t) = tx + (1-t)y$$

Montrer que, quand $\epsilon \to 0$:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z - a_\epsilon^+} - \int_\gamma \frac{dz}{z - a_\epsilon^-} \longrightarrow \pm 2i\pi$$

5. Calculer la série de Fourier de $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi, \pi]$ par rapport à $\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{ikx}\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$.

6. (Polynômes de Legendre) On définit des polynômes P_n par :

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

Vérifier que $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ forme un système orthogonal sur $[-1, 1]$, et que :

$$||P_n||^2 = \frac{2}{2n+1}$$