On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ l'espace des applications linéaires de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$.

1. Soient $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$. Montrer que $\|B \circ A\| \leqslant \|B\| \cdot \|A\|$, où $B \circ A$ désigne la composition.

2. Soit $\phi(t) = (t^2, t^3)$. Montrer qu'il n'existe pas de $\xi \in [0, 1]$ tel que $\phi(1) - \phi(0) = \phi'(\xi)$.

3. Calculer la dérivée de f et dessiner les ensembles $\Sigma(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \text{rang}(df_x) \leqslant 1\}$ et $f(\Sigma(f))$ dans le cas suivants :

a) $f(x, y) = (x^2, y^2)$
b) $f(x, y) = (x^2 + y^3, x^3 + y^2)$
c) $f(x, y) = (x, y^3 - xy)$
d) $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$

4. Calculer la dérivée de l'application

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^p) \quad , \quad (A, B) \mapsto B \circ A$$

sans utiliser l'expression de A et B en termes de matrices. En déduire la dérivée des applications :

$$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad , \quad A \mapsto A \circ A \quad \text{et } A \mapsto A \circ A \circ A$$

5. Soit $f \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $g \in \mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$ telle que $\int_a^b |f - g| < \epsilon$. Pour tous $f, g \in \mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$, établir l'inégalité suivante:

$$(\|f - g\|_2)^2 \leqslant (\|f\|_\infty + \|g\|_\infty) \, \|f - g\|_1$$

Déduire de cette inégalité que $\mathcal{C}^0([a, b]; \mathbb{C})$ est dense dans $\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C})$ pour la norme $\| \|_2$ (*Remarque*: La suite de fonctions $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $f_n(x) = \sqrt{n}$ pour $x \in [0, 1/n]$ et $f_n(x) = 0$ ailleurs converge vers 0 dans $(\mathcal{R}([a, b]; \mathbb{C}), || - ||_1)$ mais n'est pas une suite de Cauchy pour $|| - ||_2$).

6. Pour $f(x) = (\pi - |x|)^2$, $x \in [-\pi, \pi]$, vérifier que:

$$f(x) \simeq \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} \cos(nx)$$

En déduire que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$$

7. Pour $0 < \delta < \pi$, montrer que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)}{n} = \frac{\pi - \delta}{2}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\delta)^2}{n^2 \delta} = \frac{\pi - \delta}{2}$$

en considérant la série de Fourier de la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $|x| < \delta$ et $f(x) = 0$ sinon.