1. Soit $M(n)$ l'espace des $n \times n$-matrices à coefficients réels. Si $A \in M(n)$, on désigne par A^t sa transposée. Soit $Sym(n)$ l'espace des $n \times n$-matrices symétriques à coefficients réels, c'est-à-dire :

$$Sym(n) = \left\{A \in M(n) \mid A = A^t\right\}$$

Considérons l'application :

$$\varphi : M(n) \to Sym(n) \quad , \quad A \mapsto A \cdot A^t$$

et soit $\mathbb{I}_n \in M(n)$ la matrice de l'identité. Calculer la dérivée de φ. Montrer que si $\varphi(A) = \mathbb{I}_n$ (i.e. A est orthogonale), alors $d\varphi_A$ est surjective.

2. Esquisser le graphe et trouver la classe de dérivabilité de la fonction :

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^n & \text{si } x \leqslant -1 \\ 0 & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ (x-1)^n & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

3. Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}^p$, $g : \Omega' \to \mathbb{R}^p$, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ et $\Omega' \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts, $a \in \Omega$, $f(a) \in \Omega'$, f et g de classe $\mathcal{C}^2$. Exprimer les dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 (g \circ f)}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ en fonction des dérivées de f et g.

4. Pour $x \in [0, 1]$, montrer que:

$$x - x^2 = \frac{8}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3} = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^2} = \frac{2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\pi x}{n^2}$$

5. (Equation de la chaleur) Si $\mathcal{K} \in \mathbb{R}$, si $u \in \mathcal{C}^2([-L, L] \times]0, +\infty[)$ satisfait :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{K} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x} \quad , \quad u(-L, t) = u(L, t) \quad \text{et} \quad \frac{\partial u}{\partial x}(-L, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) \quad \forall t \in]0, +\infty[$$

et si $u(x, t)$ converge uniformément vers $u_0 \in \mathcal{C}^0([-L, L])$ quand t tend vers 0, montrer que :

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\mathcal{K} \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{L} x + b_n \sin \frac{n\pi}{L} x\right)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u_0(x) \cos \frac{n\pi}{L} x dx \quad , \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} u_0(x) \sin \frac{n\pi}{L} x dx$$

6. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ périodique de période 2π, vérifier les assertions suivantes :

a) $f \in \mathcal{C}^1$ et $\int_0^{2\pi} f = 0 \quad \Rightarrow \quad \|f\|_2 \leqslant \|f'\|_2$ et $\|f\|_\infty \leqslant \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{12}} \|f'\|_2$

b) $f \in \mathcal{C}^m \quad \Rightarrow \quad \sum k^{2m} |c_k(f)|^2 < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum |k|^{m-1} |c_k(f)| < +\infty \quad \Rightarrow \quad f \in \mathcal{C}^{m-1}$

c) $f \in \mathcal{C}^m \quad \Rightarrow \quad \exists C > 0, \quad \forall n > 0, \quad \|s_n(f) - f\|_\infty \leqslant \frac{C}{n^{m-\frac{1}{2}}}$