1. Donner des conditions sur (x_0, y_0) qui assurent que le théorème des fonctions implicites s'applique au point (x_0, y_0) pour passer de l'équation $f(x,y) - f(x_0, y_0) = 0$ à une relation explicite de la forme $y = y(x)$ au voisinage de x_0, y_0 (ici x correspond aux variables x_i et y aux variables y_j) :

$$f(x_1, y_1, y_2) = (x_1^2 - y_1^2, x_1^3 + 3y_1^2 - y_2) \quad ; \quad f(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = (x_1^2 + x_2 y_1, y_1 y_2 - x_2^2, y_3^2 + x_1^2 + y_1^2)$$

2. Trouver en quels points on ne peut pas résoudre explicitement les équations suivantes, et esquisser les lieux décrits par ces équations (ici les variables jouent des rôles équivalents) :

$$y^2 + (x^2-1)x^2 = 0 \quad ; \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \\ (x - 1/2)^2 + y^2 - 1/4 = 0 \end{cases} \quad ; \quad y^2 - x^2(x-1) = 0$$

3. Esquisser la courbe d'équation $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (folium de Descartes) en étudiant les intersections avec les droites d'équation $x + y = c$, et en faisant varier c.

4. Pour tout $y \geqslant 0$, on pose:

$$F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xy} \sin x}{x} dx$$

Vérifier que F est continue sur $[0, +\infty[$, différentiable sur $]0, +\infty[$ et que $F'(y) = \frac{-1}{1+y^2}$. Montrer aussi que $\lim_{y \to +\infty} F(y) = 0$ et par suite que $F(y) = \pi/2 - \arctan(y)$. En déduire que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

5. Soit $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes convergeant vers s. Vérifier que $\sigma_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} s_k \longrightarrow s$ quand $n \longrightarrow \infty$.

6. Justifier les formules suivantes:

$$x = \pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \quad , \quad 0 < x < 2\pi$$

$$\frac{x^2}{2} = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad , \quad 0 \leqslant x \leqslant 2\pi$$

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} \quad , \quad 0 < x < \pi$$

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1} \quad , \quad 0 < x < \pi$$