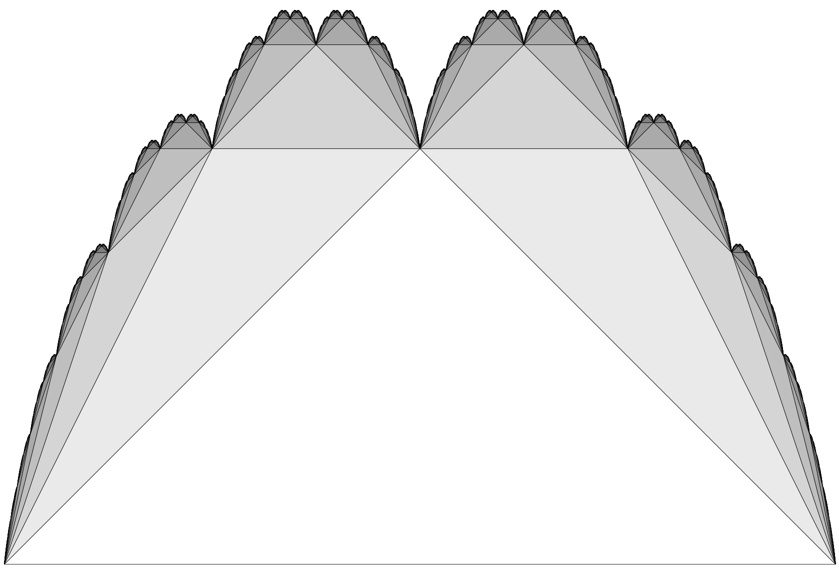
UNIVERSITÉ DE GENÈVE

Analyse 1

semestre d'automne

Y. Velenik
Yvan.Velenik@unige.ch



— Version du 16 novembre 2023 —

Dernière version téléchargeable à l'adresse
http://www.unige.ch/math/folks/velenik/cours.html

Remerciements

Lors de la rédaction de ces notes de cours (et des exercices inclus), je me suis fortement inspiré de celles de plusieurs collègues ; en particulier, H. Duminil-Copin, S. Friedli, T. Gallouët, A. Giroux, A. Knowles et P. Wittwer, ainsi que du livre de E. Hairer et G. Wanner. Un grand merci à eux !

Table des matières

Table des matières i

0 Notions de base **1**
- 0.1 Logique . . . 1
- 0.2 Théorie des ensembles . . . 4
- 0.3 Fonctions . . . 6
- 0.4 Exercices supplémentaires . . . 10

1 Axiomatique des nombres réels **13**
- 1.1 Les axiomes de l'arithmétique . . . 13
- 1.2 Les axiomes d'ordre . . . 15
- 1.3 L'axiome de la borne supérieure . . . 20
- 1.4 Les entiers naturels . . . 21
- 1.5 Puissances rationnelles . . . 25
- 1.6 Quelques classes importantes de fonctions . . . 27
- 1.7 Exercices supplémentaires . . . 28

2 Suites numériques **33**
- 2.1 Limite d'une suite numérique . . . 33
- 2.2 Convergence monotone . . . 39
- 2.3 Suites tendant vers l'infini et formes indéterminées . . . 42
- 2.4 Sous-suites et valeurs d'adhérence . . . 44
- 2.5 Suites de Cauchy . . . 47
- 2.6 Exercices supplémentaires . . . 48

3 Fonctions continues **53**
- 3.1 Limite d'une fonction en un point . . . 53
- 3.2 Convergence à l'infini et divergence vers l'infini . . . 56
- 3.3 Continuité . . . 57
- 3.4 Maximum et minimum d'une fonction continue . . . 60
- 3.5 Théorème des valeurs intermédiaires . . . 61
- 3.6 Continuité de la fonction réciproque . . . 65
- 3.7 Continuité uniforme . . . 66
- 3.8 Exercices supplémentaires . . . 67

4 Calcul différentiel **71**
4.1 La dérivée d'une fonction . . . 71
4.2 Propriétés des dérivées . . . 73
4.3 Accroissements et dérivées . . . 75
4.4 Dérivées d'ordres supérieurs . . . 79
4.5 Comparaison asymptotique . . . 81
4.6 Extrema locaux . . . 84
4.7 Exercices supplémentaires . . . 85

5 Calcul intégral **91**
5.1 Intégrabilité au sens de Riemann . . . 91
5.2 Propriétés de l'intégrale . . . 95
5.3 Primitives et théorème fondamental de l'analyse . . . 99
5.4 Propriétés supplémentaires . . . 101
5.5 Intégrales impropres . . . 103
5.6 Exercices supplémentaires . . . 106

6 Fonctions élémentaires **109**
6.1 Les fonctions trigonométriques . . . 109
6.2 Les fonctions logarithme et exponentielle . . . 114
6.3 Exercices supplémentaires . . . 120

7 Topologie de la droite réelle **125**
7.1 Ensembles ouverts . . . 125
7.2 Ensembles fermés . . . 126
7.3 Frontière, adhérence, intérieur et extérieur . . . 128
7.4 Ouverts et fermés relatifs . . . 130
7.5 Ensembles compacts . . . 131
7.6 L'ensemble de Cantor . . . 131
7.7 Exercices supplémentaires . . . 134

A Calcul de primitives **135**
A.1 Primitives de quelques fonctions usuelles . . . 135
A.2 Quelques remarques sur l'intégration par changement de variable . . . 136
A.3 Quelques remarques sur l'intégration par parties . . . 137
A.4 Intégration de fonctions rationnelles . . . 138

B Chapitres choisis **143**
B.1 La méthode de Newton . . . 143
B.2 La fonction de Takagi . . . 145
B.3 Il n'existe pas de fonction continue uniquement sur les rationnels . . . 148

C Solutions des quiz **149**

Index **151**

Informations

Ces notes présentent le contenu du cours d'Analyse I, premier semestre, donné à l'université de Genève aux étudiants de première année de bachelor en *mathématiques*, en *physique*, en *informatique* et en *mathématiques et sciences informatiques*. Il est probable qu'un certain nombre d'erreurs soient présentes. Le cas échéant, des corrections seront effectuées tout au long du semestre. Il est également possible que des informations manquantes soient ajoutées. Vous pourrez toujours télécharger la version la plus récente du polycopié depuis la page Moodle du cours. Merci de me communiquer toute erreur que vous trouveriez (si possible après avoir vérifié qu'elle est toujours présente dans la version la plus récente).

Conseils généraux au sujet du cours

Si vous souhaitez avoir une version papier du polycopié, vous pouvez imprimer le pdf vous-même ou le faire imprimer par la centrale de polycopie d'Uni Mail (je vous renvoie à leur site internet pour la procédure).

Il est fortement recommandé que vous annotiez le polycopié, très détaillé, plutôt que de prendre des notes. Cela vous permettra de suivre les explications données en cours (le rythme du cours sera probablement substantiellement plus rapide que ce à quoi l'enseignement secondaire vous a habitué). Il vous est également conseillé de relire le polycopié chez vous. Pour certaines personnes, le processus d'apprentissage est facilité par l'écriture : si c'est votre cas, recopiez chez vous les parties les plus importantes des notes, ou profitez-en pour préparer un résumé après chaque cours.

Lors de votre relecture, vous pouvez tester votre compréhension en répondant aux quiz (repérés par le symbole) ; ceux-ci ne seront discutés ni en cours ni durant les séances d'exercices, mais les réponses se trouvent dans l'Appendice C en page 149 (et les assistants ou moi-même sommes évidemment disponibles en cas de difficultés). Dans ces quiz, un certain nombre d'affirmations sont données, et vous devez cocher celles qui sont correctes. Notez que vous devriez être capable de défendre votre choix : si vous avez coché la case, vous devriez pouvoir démontrer l'affirmation (ou expliquer comment se ramener à un résultat démontré antérieurement) ; si vous ne l'avez pas cochée, vous devriez être en mesure de produire un contre-exemple.

Le but de ce cours (et de sa suite au second semestre) est de vous enseigner une approche rigoureuse de l'analyse réelle. Vous devriez déjà avoir rencontré la plupart des concepts abordés dans ce cours lors de vos études secondaires. Toutefois, le niveau de rigueur exigé ici est beaucoup plus élevé. En particulier, le but du cours n'est pas uniquement calculatoire (apprendre à calculer des limites, des dérivées, des intégrales, etc.), mais également d'apprendre à rédiger des démonstrations. Ainsi, s'il y aura évidemment des exercices calculatoires, il y aura également un nombre important d'exercices vous demandant d'établir certains faits. Pour la rédaction de vos démonstrations, vous êtes encouragé à vous inspirer des preuves faites en cours, ainsi que des corrections des exercices par les assistants.

Lorsque vous analysez une preuve, il y a plusieurs niveaux de lecture : une compréhension ligne-à-ligne (comprendre comment l'on passe d'une affirmation à la suivante), mais également une compréhension plus globale (déterminer les idées centrales de l'argument, ainsi que l'intuition qui sous-tend le résultat). De nombreuses méthodes de démonstration se retrouvent d'une preuve à l'autre, et il est important dans votre formation de les reconnaître et de vous les approprier. Ceci n'est évidemment pas spécifique à ce cours. Vous devriez aussi prendre l'habitude de repérer où les hypothèses apparaissant dans l'énoncé d'un résultat sont utilisées dans sa preuve.

Comme vous pouvez le voir, le polycopié contient de nombreux exercices. Un certain nombre d'entre eux, mais pas tous, seront regroupés sous forme de séries d'exercices, qui vous seront distribuées une fois par semaine et dont les solutions seront mises à votre disposition via Moodle la semaine suivante. De plus, certains problèmes seront discutés en détails par les assistants lors des séances d'exercices. Il est fortement recommandé que vous participiez à ces séances, en particulier si vous avez de la peine à résoudre les exercices par vous-même : une des tâches des assistants sera de vous donner des conseils sur la meilleure façon d'aborder certains types d'exercices et sur les réflexes à développer, ce qui vous sera très utile lors de l'examen.

Vous avez la possibilité de rendre vos solutions à certains des exercices de chaque série (ceux-ci indiqués sur ces dernières), qui seront alors corrigées. Notez que la qualité de la rédaction (en particulier lorsque l'on vous demande une démonstration) est très importante : votre argument doit être présenté de manière claire et structurée.

On ne vous recommandera jamais assez d'essayer de faire les exercices par vous-même. Il ne suffit en général pas de comprendre la solution qui vous est présentée : à l'examen, vous serez livré à vous-même. Évidemment, la difficulté des exercices est variable, et les plus difficiles ne sont pas représentatifs de ce qui vous sera demandé à l'examen.

Notations, conventions

Les notations employées dans ce polycopié sont pour la plupart standard, et seront introduites pendant le cours. Voici quelques exceptions : on notera $a \coloneqq b$ pour dire que l'expression a est définie par l'expression b; on écrira $a \equiv b$ pour dire que a et b sont deux notations équivalentes pour une certaine quantité.

Informations pratiques

Horaire et salle pour le cours : Mardi et mercredi, de 12h15 à 14h00, auditoire A300 à Sciences II.

Moodle. Les pages dédiées à vos cours se trouvent sur la plateforme Moodle de l'université, accessible à l'adresse `moodle.unige.ch`. Afin d'en profiter, vous devez vous inscrire en ligne pour chacun des cours qui vous intéressent. Cela vous donnera accès à divers documents et informations et permettra également à l'enseignant et aux assistants de communiquer avec vous. Pour le cours d'Analyse I (automne), cela vous donne accès au polycopié, aux séries d'exercices (énoncés et corrigés), aux vidéos du cours, etc. *N'oubliez donc pas de vous inscrire dès le début du semestre*, y compris pour les travaux pratiques pour ceux que cela concerne (voir plus bas).

Séances d'exercices. Les séances d'exercices ont lieu le vendredi de 10h15 à 13h00. Il y a 6 groupes en présentiel et 1 groupe en ligne. Chaque semaine, vous pouvez librement choisir de participer soit à la version en présentiel, soit à la version en ligne. Quel que soit votre choix, vous êtes prié de vous inscrire dans l'un des 6 groupes en présentiel. Notez que certaines des salles peuvent être indisponibles à certaines dates (ceci sera indiqué, à l'avance, sur moodle), auquel cas il vous faudra rejoindre une des autres salles.

Séances en présentiel

Groupe	Salle	Assistant	email
1	SCII A50a	Corentin Bodart	`Corentin.Bodart@unige.ch`
2	SCII A50b	Philippe Charron	`Philippe.Charron@unige.ch`
3	SCII 174	Gaëtan Simian	`Gaetan.Simian@unige.ch`
4	SCII 223	Yacine Aoun	`Yacine.Aoun@unige.ch`
5	SCII 229	Kamil Khettabi	`Kamil.Khettabi@unige.ch`
6	SM 107	Livio Ferretti	`Livio.Ferretti@unige.ch`
	En ligne	Valérian Montessuit	`Valerian.Montessuit@unige.ch`

La première semaine du semestre est la semaine $n = 1$.

▷ La série n est disponible sur moodle au plus tard le mardi de la semaine n.

▷ La série n est brièvement discutée pendant la séance d'exercices, le vendredi de la semaine n.

▷ Vous avez la possibilité de rendre une partie des exercices de la série n avant le mercredi de la semaine $n + 1$ à midi, selon les modalités précisées sur moodle. Dans ce cas, la correction de vos solutions vous sera rendue au plus tard le vendredi de la semaine $n + 1$.

▷ La série n est corrigée par les assistants le vendredi de la semaine $n+1$. Un corrigé sera également mis à votre disposition sur moodle à ce moment-là.

Examen. L'examen prendra la forme d'un écrit de 4 heures en présentiel. Des exemples d'anciens examens (et leur corrigé) seront mis à votre disposition sur moodle en cours de semestre. Seul ce qui aura été couvert en cours, ou ce que l'on vous demanderait explicitement de lire, fait partie du champ de l'examen. De même, seuls les exercices se trouvant sur les séries qui vous seront distribuées font partie du champ de l'examen. Ce dernier sera composé d'exercices du même type, ainsi que d'une question théorique basée sur le contenu du polycopié. Aucun document, ni calculatrice ne seront autorisés.

Travaux pratiques. Les étudiants qui prennent les deux cours Analyse I et Algèbre I et qui effectuent soit un cursus en *mathématiques* ou en *mathématiques, informatique et sciences numériques*, soit un master bi-disciplinaire doivent se présenter aux séances de travaux pratiques tous les jeudis après-midi pendant une heure (selon un horaire à convenir en début de semestre). Les autres étudiants ne sont pas concernés par les travaux pratiques.

▷ Les étudiants sont regroupés par groupes d'environ trois personnes et suivis durant tout le semestre par le même assistant.

▷ Les exigences ne sont pas comparables à celles de l'examen de fin de semestre ; le but est plutôt de vérifier que vous avez acquis les connaissances de base.

▷ Pour les étudiants concernés, *l'obtention du certificat pour les travaux pratiques est obligatoire pour l'inscription aux examens.*

Répétitoires. La possibilité est offerte aux étudiants en bachelor de *mathématiques* ou en bachelor de *mathématiques et sciences informatiques* de participer aux répétitoires à la section de mathématiques le mardi (salles 1-15 et 6-13) et le jeudi (salles 1-05 et 1-15) de 17h15 à 21h15. Durant ceux-ci, des étudiants plus avancés sont à votre disposition pour vous aider avec vos séries d'exercices. Permettez-moi d'insister à nouveau : il est important d'essayer de faire les exercices par vous-même et de ne pas vous contenter d'en comprendre la correction. Mieux vaut, par exemple, demander des indications si vous êtes bloqué que d'attendre que la solution vous soit présentée.

0 Notions de base

Dans ce chapitre préliminaire sont présentés, de façon plutôt informelle, quelques brefs rappels de logique et de théorie des ensembles, ainsi que quelques définitions concernant les fonctions. Nous nous permettrons d'utiliser ici sans les définir diverses quantités qui devraient avoir été vues lors des études secondaires, en particulier les divers ensembles de nombres ($\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, etc.) ou les fonctions usuelles ($\sin$, $\cos$, $\exp$, etc.). Ces objets seront précisément redéfinis à partir du Chapitre 1. Un développement plus approfondi de logique et de théorie des ensembles sera donné en parallèle dans le cours « Introduction à la logique et à la théorie des ensembles ».

0.1 Logique

0.1.1 Assertions et opérations logiques

Une **assertion mathématique** est un énoncé ayant une **valeur logique** vraie (**V**) ou fausse (**F**), mais jamais les deux à la fois. La valeur de vérité dépend du cadre axiomatique dans lequel est énoncée l'assertion. Par exemple, dans la théorie des entiers naturels,

- « $4 > 2$ » est une assertion vraie ;
- L'assertion « si $n > 3$, alors $n > 2$ », dans laquelle n représente un entier arbitraire, est également une assertion vraie ;
- « Tout nombre premier est impair » est une assertion fausse.

Remarque 0.1. *Tout énoncé n'est pas nécessairement une assertion admissible. Par exemple, l'assertion « cet énoncé est faux » n'est pas admissible, car on ne peut lui associer de valeur de vérité. En effet, si l'énoncé était vrai, alors on devrait en conclure qu'il est faux ; s'il était faux, on devrait en conclure qu'il est vrai.* ◇

En mathématiques, on part d'une collection d'assertions que l'on déclare vraies (par exemple, les axiomes d'Euclide en géométrie plane, que vous avez peut-être rencontrés lors de vos études secondaires, ou les axiomes des nombres réels qui seront introduits au Chapitre 1). On construit alors d'autres assertions, plus complexes, en combinant les axiomes à l'aide d'un certain nombres d'opérations logiques décrites plus bas, de la même façon qu'on crée des phrases en combinant des mots en respectant les règles de la grammaire, puis des textes plus complexes encore en combinant des phrases. Démontrer ces nouvelles assertions revient à montrer qu'il suit des axiomes qu'elles sont vraies. Les plus importantes des nouvelles assertions démontrées sont appelées théorème, proposition, lemme ou corollaire. La distinction entre ces différents termes est assez subjective : en général, on utilise théorème pour les résultats les plus importants et proposition pour des résultats secondaires. On utilise lemme pour des résultats de nature plus technique, en général utilisés dans la démonstration des théorèmes. Finalement, un corollaire est une conséquence, essentiellement directe, d'un autre résultat (le plus souvent d'un théorème).

Équivalence. Deux assertions A et B sont **équivalentes**, ce que l'on notera $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$, si elles sont soit toutes les deux simultanément vraies, soit toutes les deux simultanément fausses. En d'autres termes, A et B sont équivalentes si elles ont les mêmes valeurs de vérité. Ceci peut être visualisé à l'aide d'une **table de vérité** donnant la valeur de vérité de l'assertion $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$ correspondant à chaque paire possible de valeurs de vérité des assertions A et B :

A	B	A ⇔ B
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Lorsque $\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}$ est vraie, nous dirons « A si et seulement si B ». A est alors une **condition nécessaire et suffisante** pour B (et réciproquement).

Exemple 0.2. Si n représente un entier naturel, alors les assertions « $n^2 = n$ » et « $n = 0$ ou $n = 1$ » sont équivalentes. ◇

Négation. La **négation** d'une assertion A, que l'on notera $\neg\mathsf{A}$, est définie à travers la table de vérité

A	¬A
V	**F**
F	**V**

Exemple 0.3. (i) La négation de l'assertion « x est inférieur ou égal à y » est équivalente à l'assertion « x est strictement supérieur à y » ; en d'autres termes, $\neg(x \leqslant y) \Leftrightarrow (x > y)$.

(ii) La négation de l'assertion « la fonction f est identiquement nulle » est équivalente à l'assertion « la fonction f prend au moins une valeur non nulle ». ◇

Ainsi, la négation d'une assertion A est l'assertion énonçant le contraire de ce qu'affirme A.

Notons le résultat élémentaire suivant : $\mathsf{A} \Leftrightarrow \neg(\neg\mathsf{A})$. Ce dernier se vérifie immédiatement en comparant les valeurs de vérité de ces deux assertions.

Conjonction et disjonction. Étant donné deux assertions A et B, on définit deux nouvelles assertions : la **conjonction** $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}$ et la **disjonction** $\mathsf{A} \vee \mathsf{B}$ via les tables de vérité suivantes :

A	B	A ∧ B
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**F**
F	**F**	**F**

A	B	A ∨ B
V	**V**	**V**
V	**F**	**V**
F	**V**	**V**
F	**F**	**F**

La conjonction correspond au connecteur logique « et », la disjonction au connecteur logique « ou (inclusif) ».

Pour alléger l'écriture, on utilisera souvent « , » plutôt que « $\wedge$ ». Ainsi, on écrira « $x > 2, x \leqslant 4$ » pour signifier « $(x > 2) \wedge (x \leqslant 4)$ ».

Exercice 0.1

1. Soient A, B deux assertions. Montrer [1] les **lois de De Morgan** :

a) $\neg(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \vee (\neg\mathsf{B})$

b) $\neg(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \wedge (\neg\mathsf{B})$

2. Soient $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ trois assertions. Montrer que

a) $\mathsf{A} \wedge \mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{B} \wedge \mathsf{A}$

b) $\mathsf{A} \vee \mathsf{B} \Leftrightarrow \mathsf{B} \vee \mathsf{A}$

c) $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \wedge \mathsf{C} \Leftrightarrow \mathsf{A} \wedge (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$

d) $(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \vee \mathsf{C} \Leftrightarrow \mathsf{A} \vee (\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$

e) $(\mathsf{A} \wedge \mathsf{B}) \vee \mathsf{C} \Leftrightarrow (\mathsf{A} \vee \mathsf{C}) \wedge (\mathsf{B} \vee \mathsf{C})$

f) $(\mathsf{A} \vee \mathsf{B}) \wedge \mathsf{C} \Leftrightarrow (\mathsf{A} \wedge \mathsf{C}) \vee (\mathsf{B} \wedge \mathsf{C})$

Exemple 0.4. La négation de l'assertion « $x \geqslant 1$ et $y \leqslant 2$ » est l'assertion « $x < 1$ ou $y > 2$ » ; en d'autres termes : $\neg\big[(x \geqslant 1) \wedge (y \leqslant 2)\big] \Leftrightarrow \big[(x < 1) \vee (y > 2)\big]$. ◇

Implication. Étant donné deux assertions A et B, on définit l'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ via la table de vérité

A	B	$\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$
V	**V**	**V**
V	**F**	**F**
F	**V**	**V**
F	**F**	**V**

L'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ se lit « A implique B » ou « si A, alors B ».

Remarque 0.5.

- ▷ *Observons que l'assertion* $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ *est toujours vraie lorsque* A *est fausse. Cela peut paraître surprenant au premier abord. L'exemple suivant est une façon de se convaincre que ce choix est judicieux. On souhaite évidemment que l'assertion « si* $n < 10$*, alors* $n < 100$ *» soit vraie quel que soit le choix de l'entier* n*. Toutefois, si l'on prend, respectivement,* $n = 5$*,* $n = 50$ *et* $n = 500$*, l'assertion prend la forme «* **V** $\Rightarrow$ **V** *», «* **F** $\Rightarrow$ **V** *» et «* **F** $\Rightarrow$ **F** *».*
- ▷ *Le fait que l'assertion* $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ *soit vraie ne garantit pas que l'assertion* B *est vraie. Une façon de procéder pour montrer que* B *est vraie consiste à montrer que* A *est vraie et que l'implication* $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ *est vraie. En d'autres termes, on utilise le fait que l'assertion*

$$\big[\mathsf{A} \wedge (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B})\big] \Rightarrow \mathsf{B}$$

est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de A *et* B*. Cette forme de raisonnement logique est appelée le* ***modus ponens****.* ◇

Introduisons un peu de terminologie standard.

- ▷ Lorsque $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ est vraie, nous dirons « si A, alors B ». A est alors une **condition suffisante** pour B, et B une **condition nécessaire** pour A.
- ▷ On appelle **réciproque** de l'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ l'assertion $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$.
- ▷ On appelle **contraposée** l'assertion $(\neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A})$.

Exemple 0.6. Soient A et B les assertions « n est un multiple de 4 » et « n est pair ». Alors :

- ▷ L'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ (« si n est un multiple de 4, alors n est pair ») est vraie.

1. Lorsqu'on vous demande de montrer une assertion, on vous demande de prouver que c'est une tautologie, c'est-à-dire qu'elle est vraie quelles que soient les valeurs de vérité des assertions la composant.

- ▷ Sa contraposée correspond à l'assertion « si n n'est pas pair, alors n n'est pas un multiple de 4 », et lui est clairement équivalente.
- ▷ Par contre, sa réciproque, qui correspond à l'assertion « si n est pair, alors n est un multiple de 4 », est évidemment fausse. ◇

Exercice 0.2

Soient $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}$ trois assertions. Montrer que :

a) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\neg\mathsf{A}) \vee \mathsf{B}$

b) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow \big[(\neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A})\big]$

c) $(\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{C}) \Rightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{C})$

d) $(\mathsf{A} \Leftrightarrow \mathsf{B}) \Leftrightarrow (\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}) \wedge (\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A})$

0.1.2 Quelques formes de raisonnement

Preuve d'une implication. L'observation faite plus haut que $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ est toujours vraie lorsque A est fausse montre que pour établir que l'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ est vraie, il suffit de considérer le cas où A est vraie. C'est ce que l'on fera dans de nombreuses preuves du cours : on suppose l'**hypothèse** A vraie et on en déduit que la **conclusion** B est également vraie.

Raisonnement par double implication. Le point d) de l'Exercice 0.2 fournit une façon de montrer l'équivalence entre deux assertions A et B, il suffit de montrer séparément que chacune des deux implications $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ et $\mathsf{B} \Rightarrow \mathsf{A}$ est vraie. [2]

Raisonnement par contraposition. Il suit du point b) de l'Exercice 0.2 que montrer que l'assertion $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$ est vraie est équivalent à montrer que sa contraposée $(\neg\mathsf{B}) \Rightarrow (\neg\mathsf{A})$ est vraie.

Raisonnement par l'absurde. Finalement, dans le **raisonnement par l'absurde**, afin de démontrer une affirmation C, on suppose que $\neg\mathsf{C}$ est vraie et on en déduit une contradiction. Formellement, le raisonnement repose sur l'équivalence

$$\big[(\neg\mathsf{C}) \Rightarrow \mathbf{F}\big] \Leftrightarrow \neg(\neg\mathsf{C}) \Leftrightarrow \mathsf{C}.$$

En particulier, lorsque C est une implication $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$, cela revient à supposer que les assertions $\neg\mathsf{B}$ et A sont toutes deux vraies et à en dériver une contradiction, ce qui, bien que similaire, est distinct du raisonnement par contraposition.

Exemple 0.7. Représentons par A l'ensemble des axiomes habituels portant sur les entiers naturels $\mathbb{N}$ (discutés plus loin). Soit B l'assertion « $\mathbb{N}$ n'a pas de plus grand élément ». On désire établir l'implication $\mathsf{A} \Rightarrow \mathsf{B}$. On peut alors procéder ainsi : supposons $\mathsf{A} \wedge \neg\mathsf{B}$. On sait donc (de $\neg\mathsf{B}$) qu'il existe un entier m tel que $m \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Mais on sait également (de A) que si $n \in \mathbb{N}$, alors $n + 1 \in \mathbb{N}$. Par conséquent, $m + 1 \in \mathbb{N}$. Mais, ceci amène à une contradiction, puisque $m + 1 > m$. ◇

0.2 Théorie des ensembles

Dans ce cours, on se contentera de la notion intuitive suivante : un **ensemble** E est une collection non ordonnée d'objets distincts, appelés ses **éléments**. Insistons toutefois sur le fait qu'une approche aussi naïve ne permet pas de construire une théorie des ensembles cohérente. Ceci sera expliqué dans le cours « Introduction à la logique et à la théorie des ensembles ».

2. Dans le reste de ce polycopié, à chaque fois que l'on appliquera cette méthode de preuve, nous utiliserons les symboles $\boxed{\Rightarrow}$ et $\boxed{\Leftarrow}$ pour indiquer les deux parties de l'argument.

Si a est un élément de E, on dit que a **appartient à** E ou que E contient a, et on écrit $a \in E$. Si a n'est pas un élément de E, on écrit $a \notin E$. Si $a, b, \ldots$ forment l'ensemble E, on écrit $E = \{a, b, \ldots\}$. Un ensemble E peut avoir un nombre fini (y compris zéro) ou infini d'éléments.

Exemple 0.8.
- ▷ $\{1,2,3\} = \{1,3,2\} = \{1,1,3,2,1,2\}$. Observez que la répétition d'un élément entre les accolades ne modifie pas l'ensemble : un élément donné appartient ou n'appartient pas à l'ensemble ; il ne peut pas y exister en plusieurs exemplaires.
- ▷ $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4,\ldots\}$.
- ▷ $\mathbb{N}^* = \{1,2,3,4,\ldots\}$.

◇

Définition 0.9. *Soient E et F deux ensembles.*
- ▷ *E est **inclus dans** F (ou **est un sous-ensemble de** F, ou **est une partie de** F) si tout élément $x \in E$ appartient également à F. On écrit $E \subset F$.*
- ▷ *L'ensemble des parties de F est noté $\mathscr{P}(F)$.*
- ▷ *L'**ensemble vide**, qui ne contient aucun élément, est noté $\varnothing$.*
- ▷ *L'**union** de E et F, notée $E \cup F$, est l'ensemble de tous les éléments contenus dans E ou F.*
- ▷ *L'**intersection** de E et F, notée $E \cap F$, est l'ensemble de tous les éléments contenus dans E et F.*
- ▷ *Soit P_x une assertion dépendant de $x \in E$. Alors, la partie $\{x \in E \mid \mathsf{P}_x\}$ de E contient exactement les éléments de E pour lesquels P_x est vraie.*
- ▷ *Si $E \subset F$, le **complémentaire** de E dans F est l'ensemble $F \setminus E := \{x \in F \mid x \notin E\}$. Si F est évident à partir du contexte, on écrira plus simplement $F \setminus E \equiv E^{\mathrm{c}}$.*

Exemple 0.10.
- ▷ $\mathscr{P}(\{1,2\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\big\}$.
- ▷ $\{x \in \mathbb{N}^* \mid x \text{ divise } 15\} = \{1,3,5,15\}$. ◇

Définition 0.11. *Soit P_x une assertion dépendant des éléments x d'un ensemble E.*
- ▷ *Le **quantificateur universel** est noté $\forall$. L'assertion $\forall x \in E, \mathsf{P}_x$ est vraie si et seulement si l'assertion P_x est vraie pour chaque $x \in E$; elle se lit « pour tout $x \in E$, P_x ».*
- ▷ *Le **quantificateur existentiel** est noté $\exists$. L'assertion $\exists x \in E, \mathsf{P}_x$ est vraie si et seulement si il existe un élément $x \in E$ pour lequel l'assertion P_x est vraie ; elle se lit « il existe $x \in E$, P_x ».*
  On écrira $\exists! x \in E,\ \mathsf{P}_x$ pour dire qu'il existe un unique $x \in E$ pour lequel l'assertion P_x est vraie.

Exemple 0.12.
- ▷ L'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^2 \geqslant n$ » est vraie.
- ▷ L'assertion « $\exists n \in \mathbb{N}$, $\forall k \in \mathbb{N}$, $k \leqslant n$ » est fausse (c'est l'assertion « il existe un plus grand entier »).
- ▷ L'assertion « $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $k > n$ » est vraie (c'est la négation de la précédente). ◇

Étant donné une assertion P_x dépendant de $x \in E$, les équivalences suivantes sont évidentes (voir également la Figure 0.1 pour une illustration) :

$$\neg(\forall x \in E,\ \mathsf{P}_x) \Leftrightarrow (\exists x \in E,\ \neg\mathsf{P}_x) \qquad \text{et} \qquad \neg(\exists x \in E,\ \mathsf{P}_x) \Leftrightarrow (\forall x \in E,\ \neg\mathsf{P}_x).$$

Définition 0.13. *Soient E un ensemble et E_i, $i \in I$, des parties de E indexées par les éléments d'un ensemble I.*
- ▷ *L'**union** des E_i est définie par $\bigcup_{i\in I} E_i := \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in E_i\}$.*
- ▷ *L'**intersection** des E_i est définie par $\bigcap_{i\in I} E_i := \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in E_i\}$.*

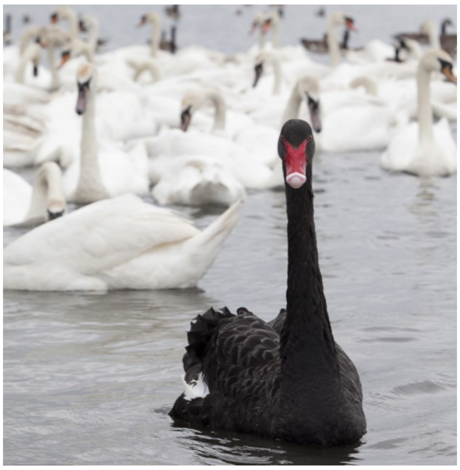


FIGURE 0.1: Illustration de l'équivalence $\neg(\forall x \in E, \mathsf{P}_x) \Leftrightarrow (\exists x \in E, \neg \mathsf{P}_x)$: il suffit d'observer un cygne noir pour invalider l'assertion « tous les cygnes sont blancs ».

Proposition 0.14. *[**Lois de De Morgan**] Soient E un ensemble et E_i, $i \in I$ des parties de E indexées par $i \in I$. On a*

$$\Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i\in I} E_i^{\mathrm{c}} \qquad \text{et} \qquad \Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{i\in I} E_i^{\mathrm{c}}.$$

Démonstration. (i) Pour tout $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in \Big(\bigcup_{i\in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}} &\Leftrightarrow \neg\Big(x \in \bigcup_{i\in I} E_i\Big) \Leftrightarrow \neg(\exists i \in I, x \in E_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I, x \notin E_i \Leftrightarrow \forall i \in I, x \in E_i^{\mathrm{c}} \Leftrightarrow x \in \bigcap_{i\in I} E_i^{\mathrm{c}}. \end{aligned}$$

(ii) On applique l'identité de la première partie aux ensembles E_i^{c} :

$$\bigcup_{i\in I} E_i^{\mathrm{c}} \overset{\text{(i)}}{=} \Big(\bigcap_{i\in I} (E_i^{\mathrm{c}})^{\mathrm{c}}\Big)^{\mathrm{c}} = \Big(\bigcap_{i\in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}}.$$

□

Définition 0.15. *Soient E et F deux ensembles. On utilise la notation (x, y) pour un **couple (ordonné)** avec $x \in E$ et $y \in F$. Par définition, $(x, y) = (a, b)$ si et seulement si $x = a$ et $y = b$. Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble*

$$E \times F := \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

0.3 Fonctions

Définition 0.16. *Une **fonction**, ou **application**, consiste de deux ensembles E et F et d'une règle f associant à chaque élément $x \in E$ un unique élément $y \in F$, noté $y = f(x)$. On écrira $f\colon \begin{array}{l} E \to F \\ x \mapsto y = f(x) \end{array}$.*

On notera F^E l'ensemble des fonctions de E vers F.

Exemple 0.17. ▷ Les fonctions usuelles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, telles que $x \mapsto x$, $x \mapsto |x|$, $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto \sin x$, $x \mapsto \exp x$ (qui seront toutes définies précisément plus tard).

▷ La fonction $x \mapsto \tan x$ de $\mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \dots\}$ dans $\mathbb{R}$.

- Étant donné $a \in E$, la **fonction de Kronecker** est définie par $\begin{aligned}\delta_a \colon E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x = a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}\end{aligned}$
- Étant donné $A \subset E$, la **fonction caractéristique de A** est définie par $\begin{aligned}\chi_A \colon E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}\end{aligned}$
- La fonction $\begin{aligned}\pi \colon \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \pi(n) \coloneqq \text{ nombre de nombres premiers inférieurs ou égaux à } n.\end{aligned}$
- L'**identité** sur E, définie par $\begin{aligned}\mathbb{I}_E \colon E &\to E. \\ x &\mapsto x\end{aligned}$
- Une fonction $\begin{aligned}u \colon \mathbb{N} &\to E \\ n &\mapsto u(n)\end{aligned}$ est appelée une **suite** ; on utilisera de préférence la notation $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
- $\begin{aligned}x \colon I &\to E \\ i &\mapsto x(i)\end{aligned}$ est une **famille indexée par I** ; on utilisera de préférence la notation $(x_i)_{i\in I}$.

$\diamond$

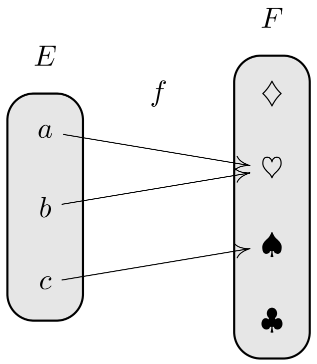
Introduisons à présent un peu de vocabulaire associé à une fonction $\begin{aligned}f \colon E &\to F \\ x &\mapsto y = f(x)\end{aligned}$:

- On appelle E le **domaine de définition** de f et F le **domaine d'arrivée**. On dit que x est un **antécédent** ou une **préimage** de y et que y est l'**image** de x.
- Soient $A \subset E$, $B \subset F$. L'**image** de A est le sous-ensemble de F défini par

  $$f(A) \coloneqq \{f(x) \mid x \in A\}\,.$$

  La **préimage** (ou **image réciproque**) de B est le sous-ensemble de E défini par

  $$f^{-1}(B) \coloneqq \{x \in E \mid f(x) \in B\}\,.$$



$$f(a) = f(b) = \heartsuit$$
$$f(c) = \spadesuit$$
$$f(\{b,c\}) = \{\heartsuit, \spadesuit\}$$
$$f^{-1}(\{\diamondsuit, \clubsuit\}) = \varnothing$$
$$f^{-1}(\{\diamondsuit, \heartsuit\}) = \{a,b\}$$

FIGURE 0.2: Une fonction $f : \{a,b,c\} \to \{\diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

- On appelle **graphe** de f l'ensemble $\{(x, f(x)) \mid x \in E\} \subset E \times F$.

Définition 0.18. *Soient E et F deux ensembles et $A \subset E$. Soit $f : E \to F$ une fonction. Alors, la fonction $\begin{aligned}g \colon A &\to F \\ x &\mapsto f(x)\end{aligned}$ est la **restriction** de f à A et est notée $g = f|_A$. Dans ce cas, f est un **prolongement** de g.*

Définition 0.19. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions. La **composée** de f par g est la fonction $g \circ f$ (« g rond f ») définie par*

$$\begin{aligned} g \circ f \colon E &\to G \\ x &\mapsto g\big(f(x)\big). \end{aligned}$$

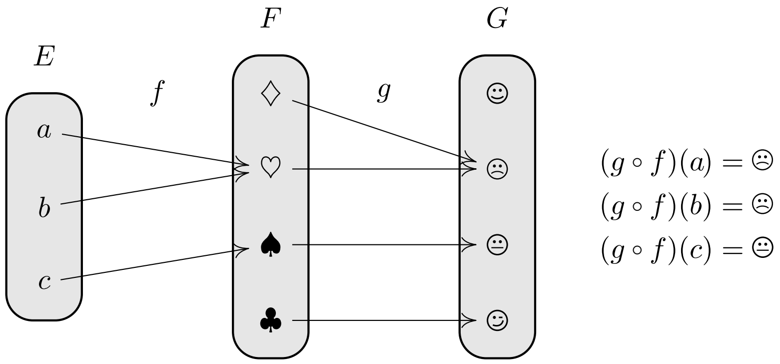


Figure 0.3: Composition de deux fonctions.

Proposition 0.20 (Associativité de la composition). *Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois fonctions. Alors,*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

Démonstration. Observons tout d'abord que $h \circ (g \circ f)$ et $(h \circ g) \circ f$ sont toutes deux des fonctions de E dans H. Pour tout $x \in E$,

$$\big(h \circ (g \circ f)\big)(x) = h\big((g \circ f)(x)\big) = h\big(g(f(x))\big) = (h \circ g)\big(f(x)\big) = \big((h \circ g) \circ f\big)(x). \qquad \square$$

On peut donc écrire $h \circ g \circ f$ sans introduire d'ambiguïté.

Définition 0.21. *Soit $f : E \to F$.*

- ▷ *f est **injective** si, pour tout $x, x' \in E$ tels que $x \neq x'$, on a $f(x) \neq f(x')$.*
- ▷ *f est **surjective** si, pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.*
- ▷ *f est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.*

En mots, l'injectivité est la propriété que chaque élément de F possède au plus une préimage. La surjectivité est la propriété que chaque élément de F possède au moins une préimage. La bijectivité est la propriété que chaque élément de F possède exactement une préimage.

Exemple 0.22. La fonction décrite sur la figure 0.2 n'est ni injective (♡ possède deux préimages), ni surjective (♢ et ♣ n'ont pas de préimage). ◇

Exemple 0.23.

- ▷ $\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ n'est ni injective, ni surjective.
- ▷ $\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est injective, mais pas surjective.
- ▷ $\begin{aligned} f \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est surjective, mais pas injective.
- ▷ $\begin{aligned} f \colon \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$ est bijective. ◇

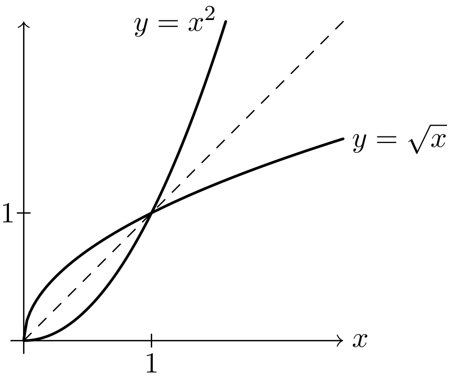


FIGURE 0.4: Graphes de la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^2$ et de sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$. Comme $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$, ces graphes peuvent être obtenus l'un à partir de l'autre par une réflexion d'axe $y = x$.

L'exemple précédant illustre le fait général qu'on peut rendre une fonction injective en restreignant son domaine de définition et la rendre surjective en restreignant son ensemble d'arrivée.

Exercice 0.3

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$. Démontrer les affirmations suivantes :

1. Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.

2. Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.

3. Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

Définition 0.24. *Soit $f : E \to F$ bijective. La **fonction inverse**, ou **fonction réciproque**, de f est la fonction*

$$\begin{aligned} f^{-1} \colon F &\to E \\ y &\mapsto \textit{l'unique } x \in E \textit{ tel que } y = f(x). \end{aligned}$$

⚠ Ne pas confondre $f^{-1}(y)$ et $f^{-1}(\{y\})$: la première expression représente l'unique préimage de y et n'est généralement définie que si f est bijective, la seconde représente l'ensemble des préimages de y et est toujours définie. Faire également attention à ne pas confondre $f^{-1}(x)$ et $f(x)^{-1} = 1/f(x)$.

Exemple 0.25.

- ▷ Soit $f = \mathbb{I}_E$. Alors $f^{-1} = f = \mathbb{I}_E$.
- ▷ Soit $f \colon \begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$. Alors, $f^{-1} \colon \begin{aligned} \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$.
- ▷ Soit $f \colon \begin{aligned} \mathscr{P}(E) &\to \mathscr{P}(E) \\ A &\mapsto A^c \end{aligned}$. Alors, $f^{-1} = f$. ◇

Exercice 0.4

Soit $f : E \to F$ une fonction bijective et f^{-1} sa réciproque. Démontrer les affirmations suivantes :

1. f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.

2. $f^{-1} \circ f = \mathbb{I}_E$ et $f \circ f^{-1} = \mathbb{I}_F$.

3. (**Unicité de l'inverse**) Si $g : F \to E$ est telle que $g \circ f = \mathbb{I}_E$ ou $f \circ g = \mathbb{I}_F$, alors $g = f^{-1}$.

4. (**Composition des inverses**) Si $g : F \to G$ est bijective, alors $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

0.4 Exercices supplémentaires

0.4.1 Logique

Exercice 0.5

1. Donner la contraposée et la négation des implications suivantes :

a) $x > 0 \Rightarrow f(x) \leqslant 0$

b) $ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

a) f ne s'annule qu'au plus une fois

b) f ne s'annule jamais

c) f ne peut s'annuler qu'en 0

d) f s'annule au moins une fois hors de 0

e) f s'annule en 0

i) $\exists x \neq 0, f(x) = 0$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \big[f(x) = f(y) = 0 \Rightarrow x = y\big]$

iii) $f(0) = 0$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \big[f(x) = 0 \Rightarrow x = 0\big]$

v) $\nexists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$

3. Soit $f : E \to F$. Associer chaque assertion à la description correspondante :

a) f est injective

b) f est surjective

c) f est bijective

i) $\forall y \in F, \exists! x \in E, f(x) = y$

ii) $\forall y \in F, \exists x \in E, f(x) = y$

iii) $\forall x, x' \in E, \big[f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'\big]$

4. Expliquer verbalement ce qu'affirment les assertions suivantes, puis écrire leur négation (ci-dessous, f dénote une fonction de E dans $\mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels) :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$

b) $\forall x, y \in \mathbb{Q}, [x < y \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Q}, x < z < y]$

c) $\forall N \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N}, n > N$

d) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \geqslant n, \forall r \in \mathbb{N}, \forall s \in \mathbb{N}, \big[p = rs \Rightarrow (r = 1) \vee (s = 1)\big]$

e) $\forall n \geqslant 0, u_n < u_{n+1}$

f) $\exists C \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = C$

g) $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) \leqslant M$

h) $\forall x, y \in E, xy = yx$

i) $\forall x \in E, \forall y \in E, xy = yx$

j) $\forall a, b \in E, \big[ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0)\big]$

k) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, \big[x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\big]$

l) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \big[n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon\big]$ (ici, $\ell \in \mathbb{R}$)

m) $\exists \ell \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \big[n \geqslant N \Rightarrow |u_n - \ell| < \epsilon\big]$

n) $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \big[|y - x| \leqslant \delta \Rightarrow f(y) \geqslant f(x)\big]$

o) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \big[|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| \leqslant \epsilon\big]$

p) $\forall E \subset \mathbb{N} \big[E \neq \varnothing \Rightarrow (\exists n \in E, \forall m \in E, m \geqslant n)\big]$

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Exprimer les assertions suivantes à l'aide de quantificateurs :

a) f s'annule

b) f est la fonction nulle

c) f n'est pas une fonction constante

d) f prend sa valeur maximale en 0

e) f admet un minimum

f) f prend des valeurs arbitrairement grandes

6. Soient E et F deux ensembles et $A(x, y)$ des assertions indexées par $(x, y) \in E \times F$. Il est clair (pensez-y un instant) que

$$\big[\forall x \in E, \forall y \in F, A(x, y)\big] \Leftrightarrow \big[\forall y \in F, \forall x \in E, A(x, y)\big],$$
$$\big[\exists x \in E, \exists y \in F, A(x, y)\big] \Leftrightarrow \big[\exists y \in F, \exists x \in E, A(x, y)\big].$$

Le but de cet exercice est de vérifier qu'il n'est cependant pas toujours possible d'interchanger des quantificateurs.

a) Montrer que $\big[\exists x \in E, \forall y \in F, A(x,y)\big] \;\Rightarrow\; \big[\forall y \in F, \exists x \in E, A(x,y)\big]$.
b) Montrer par un exemple que la réciproque de l'implication précédente est fausse en général.

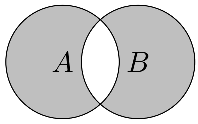
0.4.2 Théorie des ensembles

Exercice 0.6

1. Soient E, F et G trois ensembles. Montrer que $(E \subset F) \wedge (F \subset G) \;\Rightarrow\; E \subset G$.

2. Soient A et B deux ensembles. Démontrer les assertions suivantes.
a) $A = B \quad \Leftrightarrow \quad (A \cap B = A \cup B)$ b) $A = B \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{P}(A) = \mathscr{P}(B)$

3. Soit E un ensemble. L'opération **différence symétrique** associe à chaque paire de sous-ensembles $A, B \subset E$ l'ensemble $A \triangle B := (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)$. Démontrer les affirmations suivantes :
a) $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ b) $A \triangle B = \varnothing \;\Leftrightarrow\; A = B$



4. Dire si les assertions suivantes sont vraies ou fausses :
a) $\mathbb{N} \in \mathbb{Z}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ c) $\varnothing \in \mathbb{N}$
d) $\varnothing \subset \mathbb{N}$ e) $\{1,2\} \in \mathscr{P}(\{1,2,3\})$ f) $\{1,2\} \subset \mathscr{P}(\{1,2,3\})$
g) $\{\{1\}\} \subset \mathscr{P}(\{1,2,3\})$

5. Trouver une collection infinie $A_1, A_2, \ldots$ de sous-ensembles de $\mathbb{N}$ telle que (i) chaque A_i contienne une infinité d'éléments et (ii) chaque entier appartienne à exactement un des ensembles A_i.

0.4.3 Fonctions

Exercice 0.7

1. Soit $f : E \to F$ une fonction.
a) Soit $B \subset F$. Dans le cas où f est bijective, montrer que l'image réciproque $f^{-1}(B)$ de B est égale à l'image directe de B par la fonction inverse f^{-1}.
b) Montrer que, pour tout $A, B \subset F$,
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \quad \text{et} \quad f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B).$$
c) Montrer que, pour tout $A, B \subset E$,
$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad \text{et} \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B).$$
d) Montrer qu'en général l'assertion $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ est fausse, mais qu'elle est toujours vraie lorsque f est injective.

2. Soit $f : E \to F$. Montrer que $E = \displaystyle\bigcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$

3. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$.
a) Supposons $g \circ f$ injective. f est-elle injective ? g est-elle injective ?
b) Supposons $g \circ f$ surjective. f est-elle surjective ? g est-elle surjective ?
c) Supposons $g \circ f$ bijective. f est-elle bijective ? g est-elle bijective ?

À chaque fois, prouver le résultat si la réponse est affirmative, sinon donner un contre-exemple.

4. Les fonctions suivantes sont-elles bien définies ? Lorsque c'est le cas, dire si la fonction est injective, surjective, bijective.

a) $f_1 \colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array}$

b) $f_2 \colon \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto 2x \end{array}$

c) $f_3 \colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \{-1,1\} \\ n \mapsto (-1)^n \end{array}$

d) $f_4 \colon \begin{array}{l} [-1,0] \to [-1,0] \\ x \mapsto x^2 \end{array}$

e) $f_5 \colon \begin{array}{l} \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x} \end{array}$

f) $f_6 \colon \begin{array}{l} \mathbb{N} \setminus \{0,1\} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto \text{le plus petit nombre premier divisant } n \end{array}$

g) $f_7 \colon \begin{array}{l} \mathscr{P}(E) \to \{0,1\}^E \\ A \mapsto \chi_A \end{array}$, où E est un ensemble et χ_A est la fonction caractéristique de A

5. Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des suites $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de nombres réels. On considère la fonction $f : E \to E$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

a) La fonction f est-elle surjective ? Est-elle injective ?

b) Soient $A := \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; u_0 \in [0,1], u_1 \leqslant 0\right\}$ et $B := \left\{u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; \exists k \in \mathbb{N}, u_k \geqslant 0\right\}$. Déterminer les images directes $f(A)$ et $f(B)$, ainsi que les images réciproques $f^{-1}(A)$ et $f^{-1}(B)$.

1 Axiomatique des nombres réels

Dans ce cours, nous supposerons donné un ensemble $\mathbb{R}$ sur lequel sont définies deux opérations binaires, l'addition $(x, y) \mapsto x + y$ et la multiplication $(x, y) \mapsto x \cdot y \equiv xy$, ainsi qu'une relation d'ordre $x < y$ satisfaisant les axiomes **(A)**, **(M)**, **(D)**, **(O)** et **(C)** ci-dessous.

1.1 Les axiomes de l'arithmétique

La première série d'axiomes décrit les propriétés de l'addition. Ces axiomes affirment que $(\mathbb{R}, +)$ est un **groupe abélien**.[1]

(A) (**Addition**) $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$

(A.1) (**Associativité**) Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,

$$(x + y) + z = x + (y + z).$$

(A.2) (**Élément neutre**) Il existe $0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x + 0 = x.$$

(A.3) (**Inverse additif**) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un élément $-x \in \mathbb{R}$ tel que

$$x + (-x) = 0.$$

(A.4) (**Commutativité**) Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$x + y = y + x.$$

Les axiomes **(A.1)** et **(A.4)** permettent d'écrire $x + y + z$ la somme de trois nombres réels x, y et z sans qu'il y ait d'ambiguïté et, pour la même raison, d'utiliser la notation Σ pour représenter la somme de n nombres réels $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k := x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$$

1. La structure de groupe est omniprésente et sera discutée dans divers cours, en particulier en algèbre. Dans ces cours, les notions d'élément neutre et d'inverse seront probablement formulées différemment. À savoir, 0 est habituellement défini comme étant un élément neutre si $x + 0 = 0 + x = x$; de même, $-x$ est l'inverse de x si $x + (-x) = (-x) + x = 0$. Que ces définitions coïncident avec celles données ici est une conséquence de l'axiome **(A.4)**.

Plus généralement, si I est un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels indexée par les éléments de I, la somme de tous ces nombres est notée

$$\sum_{i\in I} x_i.$$

Exercice 1.1

Déduire les propriétés suivantes des axiomes **(A.1)**–**(A.4)**.

1. L'élément neutre introduit dans l'axiome **(A.2)** est unique.

2. L'inverse additif $-x$ d'un nombre $x \in \mathbb{R}$ est unique.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-(-x) = x$.

4. 0 est son propre inverse additif : $-0 = 0$.

On définit la **soustraction** $- : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x - y$ par

$$x - y \coloneqq x + (-y).$$

En particulier, $-y = 0 - y$.

La deuxième série d'axiomes décrit les propriétés de la multiplication. Ces axiomes impliquent que $(\mathbb{R}\setminus\{0\}, \cdot)$ est un **groupe abélien**.

(M) **(Multiplication)** $\cdot : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x\cdot y \equiv xy$

(M.1) **(Associativité)** Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,

$$(x\cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z).$$

(M.2) **(Élément neutre)** Il existe $1 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x \cdot 1 = x.$$

(M.3) **(Inverse multiplicatif)** Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, il existe un élément $x^{-1} \in \mathbb{R}$ tel que

$$x\cdot x^{-1} = 1.$$

(M.4) **(Commutativité)** Pour tout x et y dans $\mathbb{R}$,

$$x\cdot y = y\cdot x.$$

Les axiomes **(M.1)** et **(M.4)** permettent d'écrire xyz le produit de trois nombres réels x, y et z sans qu'il y ait d'ambiguïté et, pour la même raison, d'utiliser la notation Π pour représenter le produit de n nombres réels $x_1, \ldots, x_n$:

$$\prod_{k=1}^{n} x_k \coloneqq x_1 x_2 \cdots x_n.$$

Plus généralement, si I est un ensemble fini, et $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de nombres réels indexée par les éléments de I, le produit de tous ces nombres est noté

$$\prod_{i\in I} x_i.$$

Exercice 1.2

Déduire les propriétés suivantes des axiomes **(M.1)**–**(M.4)**.

1. L'élément neutre introduit dans l'axiome **(M.2)** est unique.
2. L'inverse multiplicatif x^{-1} d'un nombre $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ est unique.
3. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x^{-1})^{-1} = x$.
4. 1 est son propre inverse multiplicatif : $1^{-1} = 1$.

On définit la **division** $\div : \mathbb{R} \times \big(\mathbb{R} \setminus \{0\}\big) \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x \div y \equiv x/y \equiv \frac{x}{y}$ par

$$\frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}.$$

En particulier, $y^{-1} = \frac{1}{y}$.

L'axiome suivant décrit l'interaction entre l'addition et la multiplication. Combiné aux axiomes **(A)** et **(M)**, il affirme que $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ est un **corps commutatif**.

(D) (**Distributivité**) Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z.$$

Exercice 1.3

Déduire les propriétés suivantes des axiomes **(A)**, **(M)** et **(D)**.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 \cdot x = 0$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $x^{-1} \neq 0$.
3. 0 ne possède pas d'inverse multiplicatif.
4. Si $x \cdot y = 0$, alors $x = 0$ ou $y = 0$.
5. Pour tout $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$.
6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-x = (-1) \cdot x$.
7. $(-1) \cdot (-1) = 1$.
8. Pour tout $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$.

Les 4 opérations arithmétiques peuvent être étendues de façon naturelle aux fonctions à valeur dans $\mathbb{R}$: étant donné $E, F \subset \mathbb{R}$ et deux fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : F \to \mathbb{R}$, les fonctions $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ et f/g sont définies par

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \quad (f-g)(x) := f(x) - g(x), \quad (f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x), \quad \frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Les domaines de définition des trois premières fonctions est $E \cap F$ et celui de la dernière fonction est $E \cap \{x \in F \,|\, g(x) \neq 0\}$.

1.2 Les axiomes d'ordre

Les axiomes suivants décrivent les propriétés de la relation d'ordre strict $x > y$ (« x est plus grand que y »). Par définition, $x > y$ est équivalent à $y < x$ (« y est plus petit que x »). L'abréviation $x \geqslant y$

(« x est plus grand ou égal à y ») correspond, par définition, à $(x > y) \vee (x = y)$. À nouveau, $y \leqslant x$ (« y est plus petit ou égal à x ») est équivalent, par définition, à $x \geqslant y$.

> **(O)** (**Ordre strict**) $>$ est une relation telle que
>
> **(O.1)** (**Trichotomie**) Quels que soient x et y dans $\mathbb{R}$, une et une seule des trois assertions suivantes est vraie : $x < y$, $x = y$, $x > y$.
>
> **(O.2)** (**Transitivité**) Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,
> $$\big[(x > y) \wedge (y > z)\big] \;\Rightarrow\; x > z.$$
>
> **(O.3)** Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,
> $$x > y \;\Rightarrow\; x + z > y + z.$$
>
> **(O.4)** Pour tout x, y et z dans $\mathbb{R}$,
> $$\big[(x > y) \wedge (z > 0)\big] \;\Rightarrow\; x \cdot z > y \cdot z.$$

Les axiomes **(O.1)** et **(O.2)** disent que $>$ définit un **ordre strict total** sur $\mathbb{R}$. Les axiomes **(O.3)** et **(O.4)** décrivent l'interaction entre cet ordre total et les opérations d'addition et de multiplication.

Exercice 1.4

Déduire les propriétés suivantes des axiomes **(A)**, **(M)**, **(D)** et **(O)**.

1. $x > y$ est équivalent à $x - y > 0$.

2. $\big[(x > 0) \wedge (y > 0)\big] \;\Rightarrow\; x \cdot y > 0$, $\quad \big[(x > 0) \wedge (y < 0)\big] \;\Rightarrow\; x \cdot y < 0$,
$\big[(x < 0) \wedge (y < 0)\big] \;\Rightarrow\; x \cdot y > 0$.

3. $\big[(x > y) \wedge (z < 0)\big] \;\Rightarrow\; x \cdot z < y \cdot z$.

4. $\big[(x > y) \wedge (a \geqslant b)\big] \;\Rightarrow\; x + a > y + b$.

5. $\big[(x > y > 0) \wedge (a > b > 0)\big] \;\Rightarrow\; ax > by$.

6. $1 > 0$.

7. $x > 0$ implique que $-x < 0$ et que $x^{-1} > 0$.

8. $x > y > 0$ implique $y^{-1} > x^{-1} > 0$.

Les nombres réels sont souvent représentés géométriquement par les points d'une droite horizontale, le point correspondant à x se trouvant à droite du point correspondant à y si et seulement $x > y$.

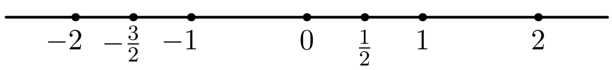


FIGURE 1.1: Une portion de la droite réelle.

Les affirmations $x > 0$, $x \geqslant 0$, $x < 0$ et $x \leqslant 0$, se lisent respectivement « x est strictement positif », « x est positif », « x est strictement négatif », « x est négatif ».[2] Les notations suivantes sont souvent utilisées :

$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 0\}\,, \qquad \mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \geqslant 0\}\,, \qquad \mathbb{R}_+^* := \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}\,.$$

2. Il peut être utile dans vos études de savoir que la terminologie est différente en anglais. Dans cette langue, $x > 0$, $x \geqslant 0$, $x < 0$ et $x \leqslant 0$ se lisent respectivement « x is positive », « x is non-negative », « x is negative » and « x is non-positive ».

1.2.1 Les ensembles $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$

En notation décimale, on définit $2 := 1+1$, $3 := 2+1$, $4 := 3+1$, $5 := 4+1$, $6 := 5+1$, $7 := 6+1$, $8 := 7+1$, $9 := 8+1$, $10 := 9+1$, $11 := 10+1$, etc. On peut alors facilement démontrer des affirmations telles que $2+2=4$ ou $6 = 3 \cdot 2$ (par exemple, $4 = 3+1 = 2+1+1 = 2+2$), et on les prendra donc pour acquises.

L'ensemble des **entiers naturels**

$$\mathbb{N} := \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

est clos sous les opérations d'addition et de multiplication (c'est-à-dire, la somme et le produit de deux entiers naturels sont des entiers naturels). On notera

$$\mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

l'ensemble des **entiers strictement positifs**. L'ensemble des **entiers relatifs**

$$\mathbb{Z} := \{n \in \mathbb{R} \,|\, (n \in \mathbb{N}) \vee (-n \in \mathbb{N})\} = \{0, -1, 1, -2, 2, -3, 3, \dots\}$$

est de plus clos pour la soustraction. On utilisera parfois la notation

$$[\![m, n]\!] := \{k \in \mathbb{Z} \,|\, m \leqslant k \leqslant n\}\,.$$

Finalement, on vérifie aisément que l'ensemble des **nombres rationnels**

$$\mathbb{Q} := \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$$

est clos sous les 4 opérations ($+$, $-$, $\cdot$, $\div$) et vérifie tous les axiomes précédents (**(A)**, **(M)**, **(D)** et **(O)**). Un nombre rationnel admet clairement une infinité de représentations comme rapport de deux entiers. Nous dirons qu'une fraction $\frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$ est une **fraction irréductible** si, pour tout $p' \in \mathbb{Z}$ et $q' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\frac{p'}{q'} = \frac{p}{q}$, on a $q' \geqslant q$. Manifestement, il existe une unique représentation d'un rationnel comme fraction irréductible.

1.2.2 Puissances entières, fonctions polynomiales et rationnelles

Étant donné $x \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $0^n := 0$ et

$$x^n := \underbrace{x \cdot x \cdots x}_{n \text{ facteurs}}, \qquad x^0 := 1, \qquad x^{-n} := \underbrace{x^{-1} \cdot x^{-1} \cdots x^{-1}}_{n \text{ facteurs}}.$$

x^n se lit « x puissance n ».

> ⚠ Insistons sur le fait que 0^0 n'est pas défini. Ceci ne devrait guère être surprenant : après tout, les identités $x^0 = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $0^n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ ne peuvent être simultanément étendues à $x = n = 0$. Néanmoins, dans certains contextes (comme expliqué un peu plus bas), il peut être utile d'adopter la *convention* que $0^0 = 1$, cela permettant d'alléger certaines notations. Il faut toutefois garder à l'esprit que 0^0 reste indéterminé hors de ces contextes particuliers.

Exercice 1.5

1. Montrer que les règles suivantes sont vérifiées : pour tout $x, y \in \mathbb{R}^*$ et tout $m, n \in \mathbb{Z}$,

$$(x \cdot y)^m = x^m \cdot y^m, \qquad x^{m+n} = x^m \cdot x^n, \qquad x^{mn} = (x^m)^n.$$

2. Montrer que $x^2 > 0$ pour tout $x \neq 0$.

3. Soit $x > 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n > x^{n-1}$.

4. Soit $0 < x < 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n < x^{n-1}$.

5. Soit $0 \leqslant x < y$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x^n < y^n$.

Une **fonction monomiale** est une fonction de la forme $x \mapsto ax^n$ avec $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. L'exposant n est appelé le **degré** de la fonction.

Une **fonction polynomiale** est une fonction de la forme $P(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k x^k$, où les coefficients $a_0, \dots, a_n$ sont des nombres réels tels que $a_n \neq 0$. n est alors appelé le **degré** de P. Notons que lorsque l'on travaille avec de telles fonctions, il est d'usage d'utiliser la *convention* que $0^0 = 1$, de sorte à pouvoir écrire plus simplement $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, cette expression restant alors non ambiguë même lorsque $x = 0$.

Une **fonction rationnelle** est une fonction de la forme $x \mapsto R(x) := P(x)/Q(x)$, où P et Q sont deux fonctions polynomiales. La fonction R n'est pas définie aux points x tels que $Q(x) = 0$; ceux-ci sont donc exclus de son domaine de définition.

1.2.3 Fonctions monotones

Définition 1.1. *Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to F$.*

- ▷ *f est **croissante** si $x < y \;\Rightarrow\; f(x) \leqslant f(y)$ pour tout $x, y \in E$.*
- ▷ *f est **strictement croissante** si $x < y \;\Rightarrow\; f(x) < f(y)$ pour tout $x, y \in E$.*
- ▷ *f est **décroissante** si $x < y \;\Rightarrow\; f(x) \geqslant f(y)$ pour tout $x, y \in E$.*
- ▷ *f est **strictement décroissante** si $x < y \;\Rightarrow\; f(x) > f(y)$ pour tout $x, y \in E$.*
- ▷ *f est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.*
- ▷ *f est **strictement monotone** si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.*

Exemple 1.2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il suit du point **5.** de l'Exercice 1.5 que la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto x^n$ est strictement croissante. ◇

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

- ☐ Si f est strictement monotone, alors f est injective.
- ☐ Si f est injective, alors f est strictement monotone.
- ☐ Si f est surjective, alors f ne peut pas être monotone.
- ☐ f est croissante si et seulement si $-f$ est décroissante.

1.2.4 Valeur absolue, inégalité triangulaire, inégalité de Cauchy–Schwarz

Définition 1.3. *La **valeur absolue** de $x \in \mathbb{R}$ est définie par*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

La valeur absolue possède les propriétés suivantes.

Proposition 1.4.
1. *$|x| \geqslant 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*
2. *$|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$.*
3. *$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.*
4. *(**Inégalité triangulaire**) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, avec égalité si et seulement si $xy \geqslant 0$.*
5. *$|x + y| \geqslant \big||x| - |y|\big|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.*

Démonstration. Les trois premiers points sont laissés en exercice.

4. On a les équivalences suivantes :
$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \quad \Leftrightarrow \quad (x+y)^2 \leqslant (|x|+|y|)^2 \quad \Leftrightarrow \quad xy \leqslant |xy|.$$
La dernière inégalité étant trivialement vraie, la première l'est donc également. De plus, l'égalité aura lieu si et seulement si $xy = |xy|$, ce qui est équivalent à $xy \geqslant 0$.
5. Observons tout d'abord que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,
$$a \geqslant |b| \quad \Leftrightarrow \quad \big[(a \geqslant b) \wedge (a \geqslant -b)\big]. \tag{1.1}$$
En appliquant l'inégalité triangulaire à $x' \coloneqq -x$ et $y' \coloneqq x+y$, on obtient
$$|y| = |x'+y'| \leqslant |x'|+|y'| = |x|+|x+y|,$$
ce qui donne $|x+y| \geqslant |y|-|x|$. En échangeant les rôles de x et y, on obtient $|x+y| \geqslant |x|-|y|$. La conclusion suit donc de (1.1). □

On peut utiliser la valeur absolue pour mesurer la distance entre deux nombres réels x et y, en définissant $d(x,y) \coloneqq |y-x|$. L'inégalité triangulaire s'écrit alors $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$, pour tout $x,y,z \in \mathbb{R}$. On utilisera régulièrement les équivalences élémentaires suivantes : pour tout $x, a \in \mathbb{R}$ et tout $\epsilon \in \mathbb{R}_+$,
$$d(x,a) \leqslant \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad |x-a| \leqslant \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad a-\epsilon \leqslant x \leqslant a+\epsilon.$$

Remarque 1.5. *Soit E un ensemble. Une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ telle que (i) $d(x,y) = d(y,x)$ pour tout $x,y \in E$, (ii) $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$ et (iii) $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$ pour tout $x,y,z \in E$ est appelée une **distance sur E**. Un ensemble E muni d'une distance est appelé un **espace métrique**. En particulier, la fonction $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$, définie par $d(x,y) \coloneqq |y-x|$ est bien une distance sur $\mathbb{R}$.* ◇

Si $x, y \in \mathbb{R}$ satisfont $|x| < |y|$, alors nécessairement
☐ $x < y$ ☐ $x^2 < y^2$ ☐ $y^2 > 0$ ☐ $|x+y| \leqslant 2|y|$

Les inégalités, dont l'inégalité triangulaire ci-dessus fournit un exemple simple, font partie des outils indispensables à l'analyste. Parmi celles-ci, l'**inégalité de Cauchy–Schwarz**, dont la proposition suivante fournit un cas particulier, joue un rôle particulièrement important en analyse et dans de nombreux autres domaines des mathématiques.

Proposition 1.6 (Inégalité de Cauchy–Schwarz). *Soient $a_1, \dots, a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels arbitraires. Alors,*
$$\Big(\sum_{k=1}^n a_k b_k\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{k=1}^n a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^n b_k^2\Big),$$
avec égalité si et seulement si $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_k = \lambda b_k$ pour tout $k \in [\![1,n]\!]$.

Démonstration. L'affirmation est triviale si tous les a_k sont nuls. Il suffit donc de traiter le cas où au moins l'un des a_k est non nul. Notons
$$A \coloneqq \sum_{k=1}^n a_k^2, \qquad B \coloneqq \sum_{k=1}^n b_k^2, \qquad C \coloneqq \sum_{k=1}^n a_k b_k.$$
Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$Ax^2+2Cx+B = \sum_{k=1}^n \big(a_k^2 x^2 + 2a_k b_k x + b_k^2\big) = \sum_{k=1}^n \underbrace{\big(a_k x + b_k\big)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

En particulier, en choisissant $x = -C/A$ (notons que $A > 0$ par hypothèse), on obtient

$$\frac{C^2}{A} - 2\frac{C^2}{A} + B \geqslant 0,$$

ce qui est équivalent à $AB \geqslant C^2$. C'est précisément l'inégalité désirée. Notons finalement que le cas d'égalité requière que $a_k x + b_k = 0$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, ce qui est équivalent à la condition donnée dans l'énoncé. □

1.3 L'axiome de la borne supérieure

Définition 1.7. *Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $M \in \mathbb{R}$.*

- ▷ *M est un **majorant** de E si $x \leqslant M$ pour tout $x \in E$.*
- ▷ *M est le **supremum** (ou la **borne supérieure**) de E si M est un majorant de E et si tout autre majorant M' de E satisfait $M' \geqslant M$. On écrit $M = \sup E$.*
- ▷ *M est le **maximum** de E si $M = \sup E$ et $M \in E$. On écrit $M = \max E$.*
- ▷ *M est un **minorant** de E si $x \geqslant M$ pour tout $x \in E$.*
- ▷ *M est l'**infimum** (ou la **borne inférieure**) de E si M est un minorant de E et si tout autre minorant M' de E satisfait $M' \leqslant M$. On écrit $M = \inf E$.*
- ▷ *M est le **minimum** de E si $M = \inf E$ et $M \in E$. On écrit $M = \min E$.*
- ▷ *Si E possède un majorant (minorant), on dit que E est **majoré** (**minoré**). Si E est à la fois majoré et minoré, on dit que E est **borné**.*

Remarque 1.8.
- ▷ $\sup E$, $\max E$, $\inf E$ *et* $\min E$ *n'existent pas toujours. Mais, lorsqu'ils existent, ils sont nécessairement uniques.*
- ▷ *Si un majorant M de E satisfait $M \in E$, alors $M = \sup E = \max E$. En effet, tout majorant M' de E satisfait alors, par définition, $M' \geqslant M$ (puisque $M \in E$).* ◇

Si M n'est pas un majorant de $E \subset \mathbb{R}$, alors nécessairement

- ☐ M minore E
- ☐ $\forall x \in E, M > x$
- ☐ $\nexists x \in E, x = M$
- ☐ $\exists x \in E, x > M$
- ☐ E n'est pas majoré
- ☐ $M \neq \max E$
- ☐ $M \neq \sup E$

Nous sommes à présent en mesure d'énoncer le dernier axiome :

(C) (**Complétude**) Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ possède un supremum.

Remarque 1.9. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $-E := \{-x \mid x \in E\}$. M est un majorant de $-E$ si et seulement si $-M$ est un minorant de E. En particulier, E est minoré si et seulement si $-E$ est majoré. Il suit donc de l'axiome (C) qu'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ non vide et minoré possède un infimum. De plus,* $\inf E = -\sup(-E)$. ◇

Exemple 1.10.

1. Soient $x_1 < x_2 < \cdots < x_N$ des nombres réels et $E := \{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$. Alors,

$$\sup E = \max E = x_N \qquad \text{et} \qquad \inf E = \min E = x_1.$$

2. L'ensemble $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré (voir le Théorème 1.13 ci-dessous) et ne possède donc pas de supremum. Par contre, $\inf \mathbb{N} = \min \mathbb{N} = 0$.
3. Considérons l'ensemble $E := \left\{ \frac{2x}{1+x^2} \;\middle|\; x \in \mathbb{R} \right\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2x \leqslant 1 + x^2$ (en effet, on a $1 + x^2 - 2x = (1-x)^2 \geqslant 0$). Par conséquent, 1 est un majorant de E. Étant donné que $1 \in E$ (prendre $x = 1$), on conclut que $\sup E = \max E = 1$. ◇

Exemple 1.11. On appelle **intervalle** de $\mathbb{R}$ un ensemble de la forme suivante : pour $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$,

$$\begin{aligned}
[a,b] &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}, & (a,b) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}, \\
[a,b) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}, & (a,b] &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}, \\
[a,+\infty) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x\}, & (a,+\infty) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}, \\
(-\infty,b] &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant b\}, & (-\infty,b) &\coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}, \\
(-\infty,+\infty) &\coloneqq \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Notons que $[a,a] = \{a\}$ et que $(a,a) = (a,a] = [a,a) = \varnothing$. La **longueur** des intervalles (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ et $[a,b]$ est égale à $b-a$. Les intervalles $[a,b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty,b]$ et $(-\infty,+\infty)$ sont dits **fermés** ; les intervalles (a,b), $(a,+\infty)$, $(-\infty,b)$ et $(-\infty,+\infty)$ sont dits **ouverts**. Les intervalles $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$ et $(a,b]$ sont dits **bornés**. On vérifie facilement que, lorsque $a < b$,

$$\sup[a,b] = \sup(a,b) = \sup[a,b) = \sup(a,b] = \sup(-\infty,b) = \sup(-\infty,b] = b.$$

De plus, $\max[a,b] = \max(a,b] = \max(-\infty,b] = b$, alors que (a,b), $[a,b)$ et $(-\infty,b)$ n'admettent pas de maximum. Les ensembles $[a,+\infty)$, $(a,+\infty)$ et $(-\infty,+\infty)$ ne sont eux même pas majorés.

Pour montrer, par exemple, que $b = \max[a,b]$, il suffit d'observer que b est un majorant de $[a,b]$ et $b \in [a,b]$.

Vérifions encore que $b = \sup(a,b)$. Évidemment b est un majorant de (a,b). Soit $c < b$. Si $c \leqslant a$, alors $(a+b)/2 > c$ appartient à (a,b) et c n'est donc pas un majorant de (a,b). Si $c > a$, alors $(b+c)/2 > c$ appartient à (a,b) et c n'est pas un majorant de (a,b). ◇

Notation. Les intervalles (a,b), $(a,b]$, $[a,+\infty)$, etc., sont parfois notés $]a,b[$, $]a,b]$, $[a,+\infty[$, etc.

Le résultat suivant sera utilisé à plusieurs reprises dans ce cours.

Lemme 1.12. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ non vide et majoré. Alors,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in E \text{ tel que } x > \sup E - \epsilon.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, $x \leqslant \sup E - \epsilon$. Cela implique que $\sup E - \epsilon$ est un majorant de E et donc que $\sup E - \epsilon \geqslant \sup E$, ce qui est contradictoire. □

- ☐ Un intervalle est toujours borné.
- ☐ Un intervalle possède toujours un supremum.
- ☐ Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ fini est toujours borné.
- ☐ Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ fini possède toujours un maximum.
- ☐ Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ contenant une infinité d'éléments n'est jamais borné.
- ☐ Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ borné possède toujours un maximum.

1.4 Les entiers naturels

1.4.1 Principe d'Archimède

Théorème 1.13 (Principe d'Archimède). $\mathbb{N}$ *n'est pas majoré :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } x < n.$$

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons $\mathbb{N}$ majoré et notons $b := \sup \mathbb{N}$. Puisque $b-1 < b$, il doit exister $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > b-1$ (sinon $b-1$ serait un majorant). Or, ceci est équivalent à $n+1 > b$. Comme $n+1 \in \mathbb{N}$, ceci contredit le fait que $b = \sup \mathbb{N}$. □

La variante donnée dans l'exercice suivant est souvent utilisée.

Exercice 1.6

Démontrer l'affirmation suivante : $\forall \epsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $0 < 1/n < \epsilon$.

1.4.2 Raisonnement pas récurrence

Soit P_n une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}^*$. Pour chaque n, celle-ci peut être vraie ou fausse. Pour montrer que P_n est vraie pour tout n, on peut procéder de la façon suivante :

- ▷ **Initialisation :** on vérifie que P_1 est vraie ;
- ▷ **Étape d'induction :** on vérifie que l'implication $\mathsf{P}_{n-1} \Rightarrow \mathsf{P}_n$ est vraie.

Ainsi, la validité de P_1 entraîne celle de P_2 qui entraîne à son tour celle de P_3, etc. La justification d'un tel raisonnement repose sur le théorème suivant, appliqué à l'ensemble

$$E := \{n \in \mathbb{N}^* \mid \mathsf{P}_n \text{ est vraie}\}.$$

Théorème 1.14 (Principe d'induction). *Soit $E \subset \mathbb{N}^*$ un ensemble satisfaisant les deux conditions : (i) $1 \in E$ et (ii) $n-1 \in E \Rightarrow n \in E$. Alors, $E = \mathbb{N}^*$.*

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que $F := \mathbb{N}^* \setminus E \neq \varnothing$. Soit $m \in F$. Considérons l'ensemble fini $[\![1, m]\!] \cap F$ et notons n son plus petit élément. Alors, $n > 1$, $n \in F$ et $n-1 \notin F$. On a donc $n-1 \in E$, d'où l'on déduit que $n \in E$, ce qui est contradictoire. □

Nous allons voir à présent deux applications de ce type de raisonnement.

Lemme 1.15 (Inégalité de Bernoulli). *Pour tout $x \geqslant -1$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.*

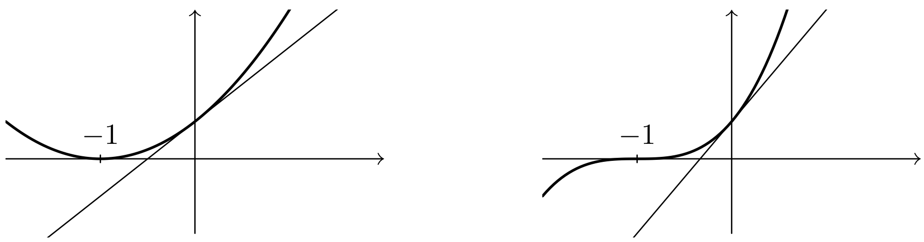


FIGURE 1.2: Illustrations de l'inégalité de Bernoulli. **Gauche :** $n = 2$. **Droite :** $n = 3$.

Démonstration. Soit $x \geqslant -1$. Notons P_n l'assertion $(1+x)^n \geqslant 1 + nx$.

P_1 est vraie puisque $(1+x)^1 = 1 + x$. Soit $n \geqslant 2$ et supposons P_{n-1} vraie. On a alors

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} \overset{\mathsf{P}_{n-1}}{\geqslant} (1+x)\big(1+(n-1)x\big) = 1 + nx + (n-1)x^2 \geqslant 1 + nx,$$

ce qui établit P_n et conclut la démonstration. □

Étant donné $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la **factorielle** de n par

$$n! := 1 \cdot 2 \cdots (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k.$$

On pose également $0! := 1$. On définit les **coefficients binomiaux** par

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!} \qquad \forall k, n \in \mathbb{N} \text{ tels que } k \leqslant n.$$

Proposition 1.16 (Formule du binôme de Newton)**.** *Quels que soient* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* $a, b \in \mathbb{R}$*,*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

⚠ Souvenez-vous que l'on a adopté la convention que $0^0 = 1$ dans des expressions polynomiales telles celle apparaissant dans la somme ci-dessus. Sans cela, nous serions obligés de mettre à part les termes $k = 0$ et $k = n$ dans la somme, ce qui rendrait l'énoncé bien plus lourd.

Démonstration. On procède par récurrence. L'affirmation lorsque $n = 1$ est triviale. Supposons donc que

$$(a+b)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^n &= (a+b)(a+b)^{n-1} \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a^n + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-1}{k} a^{k+1} b^{n-1-k} + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a^k b^{n-k} + b^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k} a^k b^{n-k} \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \right\} a^k b^{n-k} + b^n \\
&= a^n + \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + b^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k},
\end{aligned}$$

où l'avant-dernière égalité suit de l'identité

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \Bigl(\overbrace{\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}}^{=\frac{n}{k(n-k)}} \Bigr) = \binom{n}{k}. \tag{1.2}$$

□

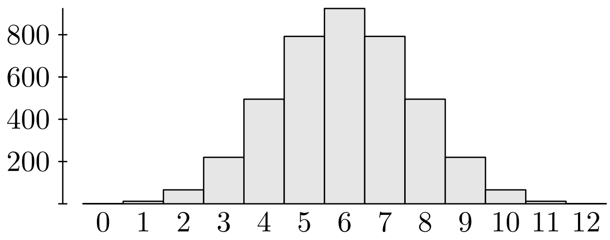


FIGURE 1.3: Valeurs des coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour $n = 12$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.

Remarque 1.17. *Le **triangle de Pascal**[3] est une collection de nombres entiers $a_{n,k}$, avec $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, caractérisée par les propriétés suivantes :*

- ▷ $a_{n,0} = a_{n,n} = 1$, *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *;*
- ▷ $a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + a_{n-1,k}$ *pour tout* $n \geqslant 2$ *et tout* $k \in [\![1, n-1]\!]$.

Ils sont souvent représentés comme sur la Figure 1.4. Observons que les coefficients binomiaux satisfont exactement les mêmes relations :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \textit{et} \qquad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \quad \forall n \geqslant 2, k \in [\![1, n-1]\!].$$

En effet, la première propriété suit directement de leur définition, alors que la seconde est exactement (1.2). En particulier, les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ peuvent être lus le long de la ligne n du triangle de Pascal. Notons au passage que cela montre également que $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$. ◇

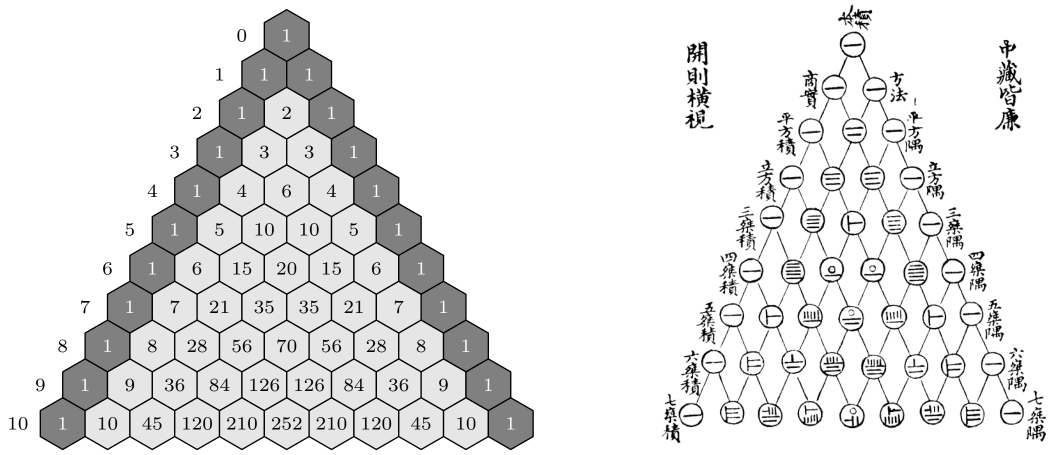


FIGURE 1.4: Gauche : Les lignes 0 à 10 du triangle de Pascal. Le nombre indiqué dans chacune des cases internes (représentées en gris clair) est la somme des deux nombres placés immédiatement au-dessus. La ligne nº n contient les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ pour k allant de 0 à n. On voit, par exemple, que $\binom{9}{6} = 84$, en consultant la 7ème case de la ligne nº 9. Droite : Les premières lignes du triangle de Yang Hui, comme publié en 1303 par Zhu Shijie.

Mentionnons un corollaire de la formule du binôme de Newton qui nous sera utile plus tard.

Corollaire 1.18. *Pour tout $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $(1 + x)^n \leqslant 1 + 2^n x$.*

3. Celui-ci est également connu sous de nombreux autres noms : par exemple, triangle de Khayyam en Iran, triangle de Yang Hui en Chine ou triangle de Tartaglia en Italie. Cet objet mathématique a en effet été redécouvert de très nombreuses fois dans l'histoire, sa découverte initiale remontant au moins au xᵉ siècle avec les travaux du mathématicien perse al-Karaji. La relation de récurrence (1.2) était, quant à elle, déjà connue du mathématicien indien Pingala au IIᵉ siècle avant notre ère.

Démonstration. Par la formule du binôme,

$$(1+x)^n = 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k \leqslant 1 + x \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \leqslant 1 + 2^n x,$$

où l'on a utilisé le fait que $x^k \leqslant x$ pour $x \in [0,1]$ et l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n. \qquad \square$$

1.5 Puissances rationnelles

Dans cette section, nous montrons comment définir x^r pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$. La construction est basée sur le théorème suivant.

Théorème 1.19. *Soient $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe un unique $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $y^n = x$.*

Démonstration. L'unicité découle immédiatement de l'implication $0 < y_1 < y_2 \Rightarrow 0 < y_1^n < y_2^n$ (point **5.** de l'Exercice 1.5).

Il reste à démontrer l'existence d'un tel y. Pour ce faire, considérons l'ensemble

$$E := \left\{ z \in \mathbb{R}_+^* \,\middle|\, z^n < x \right\}.$$

Cet ensemble n'est pas vide. En effet, l'Exercice 1.6 montre qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $1/k < x$. Comme $0 < (1/k)^n \leqslant 1/k < x$, il suit que $1/k \in E$. L'ensemble E est également majoré : si $z \in E$, alors

$$z^n < x < 1 + x \leqslant (1+x)^n,$$

et donc $z < (1+x)$. Étant non vide et majoré, E possède donc un supremum ; on peut donc définir

$$y := \sup E. \tag{1.3}$$

Nous allons montrer (en raisonnant par l'absurde) que $y^n = x$, ce qui conclura la preuve.

Supposons tout d'abord que $y^n < x$ et fixons $N > 2^n y^n/(x - y^n)$. Il suit du Corollaire 1.18 que

$$\left(y + \frac{y}{N}\right)^n = y^n \left(1 + \frac{1}{N}\right)^n \leqslant y^n \left(1 + \frac{2^n}{N}\right) < y^n \left(1 + \frac{x - y^n}{y^n}\right) = x.$$

Or, ceci implique que $y + \frac{y}{N} \in E$, ce qui contredit l'hypothèse que y est le supremum de E.

Supposons donc que $y^n > x$ et fixons $N \geqslant n y^n/(y^n - x)$. Comme $y - \frac{y}{N}$ n'est pas un majorant de E, il doit exister $z \in E$ tel que $z > y - \frac{y}{N}$. Il suit donc de l'inégalité de Bernoulli (Lemme 1.15) que

$$x > z^n > \left(y - \frac{y}{N}\right)^n = y^n \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n \geqslant y^n \left(1 - \frac{n}{N}\right) \geqslant y^n \left(1 - \frac{y^n - x}{y^n}\right) = x,$$

ce qui est également impossible. On a donc bien $y^n = x$, comme désiré. $\square$

Le nombre y apparaissant dans l'énoncé du Théorème 1.19 est la **racine $n^{\text{ème}}$ de x** et est noté [4]

$$y = x^{1/n} \equiv \sqrt[n]{x}.$$

Clairement, $\sqrt[n]{x} > 0$ pour tout $x > 0$. On définit également $\sqrt[n]{0} := 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$, on définit

$$x^{m/n} := (x^{1/n})^m \qquad \text{et} \qquad x^{-m/n} := (x^{-1})^{m/n}.$$

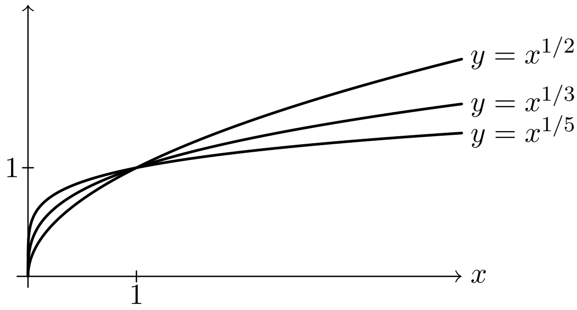


FIGURE 1.5: Graphes des fonctions $x \mapsto x^{1/2}$, $x \mapsto x^{1/3}$ et $x \mapsto x^{1/5}$.

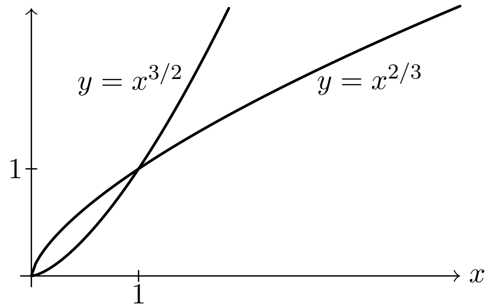


FIGURE 1.6: Graphes des fonctions $x \mapsto x^{3/2}$ et $x \mapsto x^{2/3}$.

Exercice 1.7

Montrer que les règles suivantes sont vérifiées : pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $p, q \in \mathbb{Q}$,

$$(xy)^p = x^p y^p, \qquad x^{p+q} = x^p x^q, \qquad x^{pq} = (x^p)^q.$$

Il est usuel de partitionner $\mathbb{Z}$ en deux parties : $\mathbb{Z}_{\text{pair}} := \{2n \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{0, -2, 2, -4, 4, \dots\}$, les **nombres pairs**, et $\mathbb{Z}_{\text{impair}} := \{2n+1 \,|\, n \in \mathbb{Z}\} = \{-1, 1, -3, 3, \dots\}$, les **nombres impairs**.

Le théorème suivant montre que le Théorème 1.19 n'est pas vrai pour $\mathbb{Q}$. Le pas de la preuve qui ne fonctionne pas pour $\mathbb{Q}$ est (1.3) ; c'est précisément celui où l'on utilise l'axiome **(C)**. On voit donc que c'est cet axiome qui permet de distinguer $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$. Les nombres appartenant à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont appelés les nombres **irrationnels**.[5]

Proposition 1.20. *Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. Alors, $\sqrt[n]{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Démonstration. On procède par l'absurde. Supposons que $\sqrt[n]{2}$ soit rationnel et notons $\sqrt[n]{2} = p/q$ la fraction irréductible correspondante. Par hypothèse, $2 = (p/q)^n$ et donc $p^n = 2q^n$, ce qui implique que p^n est pair, et donc que p est pair (puisque le produit de nombres impairs est toujours impair) ; on a donc $p = 2k$. Par conséquent, $q^n = p^n/2 = 2^{n-1}k^n$ est également pair, donc q est pair, ce qui contredit l'hypothèse que $\frac{p}{q}$ était irréductible. □

Ainsi, l'introduction des irrationnels permet de «boucher les trous » présents dans $\mathbb{Q}$.

Définition 1.21. *Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}$ est **dense** dans $\mathbb{R}$ si, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$, on peut trouver $a \in A$ tel que $x < a < y$.*

4. Lorsque $n = 2$, on utilise habituellement l'écriture simplifiée $\sqrt{x} \equiv \sqrt[2]{x}$.
5. La première preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$ est parfois attribuée à Hippase de Métaponte, au VIe siècle avant notre ère. La légende dit également que, pour avoir divulgué cette découverte, il aurait été jeté à la mer par ses condisciples furieux de l'école pythagoricienne.

En particulier, si A est dense dans $\mathbb{R}$, on peut trouver des points de A arbitrairement près de n'importe quel point de $\mathbb{R}$.

Théorème 1.22. *$\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.*

Dans la preuve de ce résultat, nous utiliserons la fonction **partie entière** définie par :

$$\begin{aligned} \lfloor \cdot \rfloor : \mathbb{R} &\to \mathbb{Z} \\ x &\mapsto \lfloor x \rfloor \coloneqq \max\{n \in \mathbb{Z} \,|\, n \leqslant x\}. \end{aligned}$$

Notons qu'il suit de cette définition que $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.

Démonstration. Par l'Exercice 1.6, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < \frac{1}{n} < y - x$. Il suffit de montrer que $q \coloneqq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \in (x, y)$, puisque $q \in \mathbb{Q}$. Pour montrer que $q \in (x, y)$, on peut observer que

$$x = \frac{nx}{n} < \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \leqslant \frac{nx + 1}{n} = x + \frac{1}{n} < x + (y - x) = y.$$

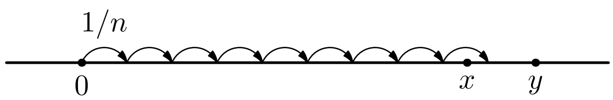


FIGURE 1.7: Construction du rationnel $q \coloneqq \frac{\lfloor nx \rfloor + 1}{n} \in (x, y)$.

Pour montrer que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, soit $q \in \mathbb{Q} \cap (x, y)$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{m} < \frac{y-q}{\sqrt{2}}$. Alors, $z \coloneqq q + \frac{\sqrt{2}}{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (sinon $\sqrt{2} = m(z - q)$ serait rationnel) et $x < z < y$. $\square$

1.6 Quelques classes importantes de fonctions

Définition 1.23. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble symétrique par rapport à l'origine, c'est-à-dire pour lequel $x \in E \Rightarrow -x \in E$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est **paire** si $f(x) = f(-x)$ pour tout $x \in E$; elle est **impaire** si $f(x) = -f(-x)$ pour tout $x \in E$.*

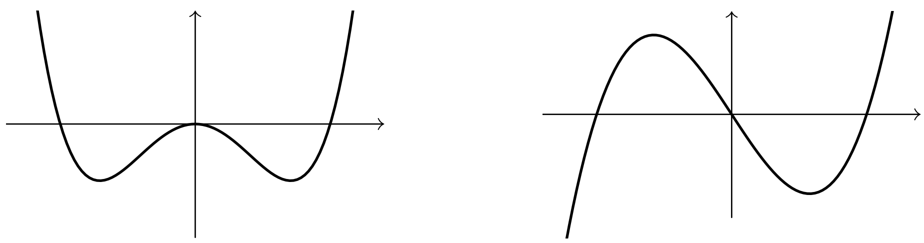


FIGURE 1.8: **Gauche :** la fonction $x \mapsto x^4 - x^2$ est paire. **Droite :** la fonction $x \mapsto x^3 - x$ est impaire.

Définition 1.24. *Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction de $f : E \to \mathbb{R}$ est **t-périodique** si, pour tout $x \in E$, on a $x + t \in E$ et $f(x + t) = f(x)$. Le plus petit $t > 0$ avec cette propriété, s'il existe, est appelé la **période** de f.*

Remarque 1.25. *Observons qu'une fonction peut être périodique sans que sa période soit définie : par exemple, la fonction constante $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto c$, pour un $c \in \mathbb{R}$ fixé, est périodique, mais l'ensemble $\{t > 0 \,|\, f(x + t) = f(x)\}$ ne possède pas de minimum.* $\diamond$

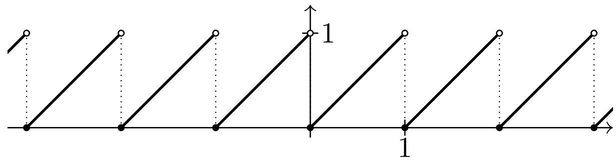


FIGURE 1.9: La fonction $x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$ est périodique, de période 1.

Définition 1.26. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **convexe** si, pour tout $x, y \in I$ et tout $\alpha \in [0, 1]$,*

$$f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big) \leqslant \alpha f(x) + (1-\alpha)f(y).$$

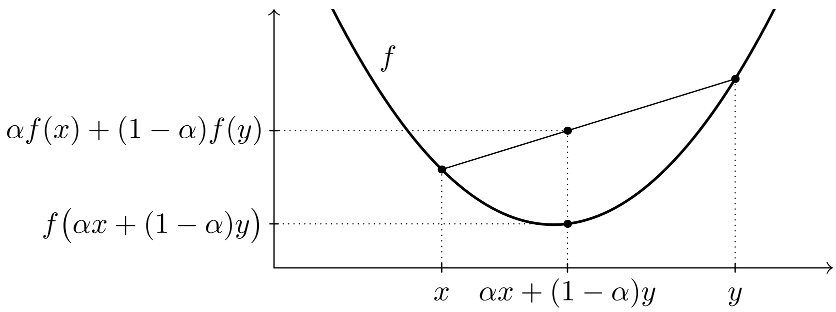


FIGURE 1.10: Une fonction est convexe si la corde entre deux points quelconques du graphe de f se trouve au-dessus du graphe.

1.7 Exercices supplémentaires

Pour les exercices ci-dessous, vos solutions ne doivent reposer que sur les axiomes ou sur des propriétés déjà établies.

1.7.1 Arithmétique

Exercice 1.8

1. Démontrer les assertions suivantes, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

2. Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\max\{x, y\} = \frac{x+y}{2} + \frac{|x-y|}{2}, \qquad \min\{x, y\} = \frac{x+y}{2} - \frac{|x-y|}{2}.$$

3. Soient $a < b$. Montrer que $|x-a| < |x-b| \Leftrightarrow x < (a+b)/2$.

4. Montrer les propriétés suivantes de la fonction partie entière :

a) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, \lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$ b) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leqslant n-1$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor -x \rfloor = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$ d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n, m \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{\lfloor x/m \rfloor}{n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{nm} \right\rfloor$

e) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x+y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

5. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer les implications suivantes :

a) $\left[\forall \epsilon > 0, |a| < \epsilon\right] \Rightarrow a = 0$

b) $\left[\forall \epsilon > 0, a < b + \epsilon\right] \Rightarrow a \leqslant b$

c) $\left[\forall \epsilon > 0, |a - b| < \epsilon\right] \Rightarrow a = b$

6. Pour chacun des ensembles C ci-dessous, donner un exemple explicite de bijection $f : (0, 1) \to C$:

a) $C = (0, b)$, où $b > 0$

b) $C = (a, b)$, où $a < b$

c) $C = (0, +\infty)$

d) $C = (-\infty, +\infty)$

e) $C = [0, 1]$

7. Un nombre rationnel q est **dyadique** si $q = \frac{m}{2^k}$ avec $m \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$. Montrer que les nombres dyadiques sont denses dans $\mathbb{R}$.

8. Trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1}$ et en déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}.$$

1.7.2 Fonctions

Exercice 1.9

1. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$, $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$. Déterminer si la fonction composée $g \circ f$ est croissante ou décroissante sous les conditions suivantes :

a) f et g sont croissantes

b) f et g sont décroissantes

c) f est croissante et g est décroissante

d) f est décroissante et g est croissante

2. Soient $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que $(f + g) \circ h = (f \circ h) + (g \circ h)$.

b) Est-ce que $f \circ (g + h) = (f \circ g) + (f \circ h)$?

3. Soit $E, F \subset \mathbb{R}$ et soit $f : E \to F$ une fonction croissante et bijective. La réciproque f^{-1} est-elle croissante ?

4. Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ peut se décomposer comme $f = g + h$, où les fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont respectivement paire et impaire.

5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction t-périodique. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x + nt) = f(x)$.

6. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que la fonction $x \mapsto f(ax)$ est périodique et déterminer sa période.

7. Soient $T, T' \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $T/T' \in \mathbb{Q}$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction périodique de période T'. Montrer que $f + g$ est périodique. La période de $f + g$ est-elle toujours bien définie ?

8. Donner un exemple de fonction périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ non constante et pour laquelle la période n'est pas définie.

9. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est convexe.

1.7.3 Supremum, infimum, maximum, etc.

Exercice 1.10

1. Soit $E \coloneqq [-3, 3] \cup (6, 7)$. Déterminer $\sup E$ et $\inf E$; $\max E$ et $\min E$ existent-ils ?

2. Pour les ensembles $E \subset \mathbb{R}$ suivants, montrer que E est borné, déterminer $\sup E$ et $\inf E$ et dire si E possède un maximum et/ou un minimum.

a) $E \coloneqq \{1/n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

b) $E \coloneqq \{x^2 \mid x \in [-1, 4)\}$

c) $E \coloneqq \{(-1)^n + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$

d) $E \coloneqq \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x < 2\}$

3. Soient $E \subset F \subset \mathbb{R}$ non vides et bornés. Montrer que $\inf F \leqslant \inf E \leqslant \sup E \leqslant \sup F$.

4. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ non vides tels que $\forall x \in E, \forall y \in F, x \leqslant y$. Montrer que E est majoré, que F est minoré et que $\sup E \leqslant \inf F$.

5. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ non vides et majorés. Montrer que l'ensemble $E \cup F$ est également majoré et que $\sup(E \cup F) = \max\{\sup E, \sup F\}$.

6. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ non vides et majorés. Montrer que l'ensemble $E \cap F$ est également majoré. Est-il vrai que $\sup(E \cap F) = \min\{\sup E, \sup F\}$? (Justifier votre réponse.)

7. Soient $E, F \subset \mathbb{R}$ non vides et majorés. Soit $E + F \coloneqq \{x + y \mid x \in E, y \in F\}$. Montrer que $E + F$ est également majoré et que $\sup(E + F) = \sup E + \sup F$.

8. Montrer que, pour tout $E, F \subset \mathbb{R}$ et toute famille $(a_{i,j})_{i \in E, j \in F}$ de nombres réels,

$$\sup_{i \in A} \sup_{j \in B} a_{i,j} = \sup_{j \in B} \sup_{i \in A} a_{i,j}.$$

9. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on se donne un intervalle fermé $I_n = [a_n, b_n]$. On suppose ces intervalles emboîtés : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} \subset I_n$.

a) Montrer que $\bigcap_{n \geqslant 1} I_n \neq \varnothing$.

b) Donner une suite d'intervalles emboîtés *ouverts* telle que $\bigcap_{n \geqslant 1} I_n = \varnothing$.

1.7.4 Argument par récurrence

Exercice 1.11

1. Démontrer les identités suivantes pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k^2 = \frac{n(n+1)}{2}$

2. Pour tout $a \neq 1$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}.$$

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \leqslant 2^n$.

4. On définit, pour $n \in \mathbb{N}$, le **nombre de Fermat** $F_n \coloneqq 2^{2^n} + 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$F_n = 2 + \prod_{k=0}^{n-1} F_k.$$

5. Démontrer l'**inégalité arithmético-géométrique** : pour toute collection $a_1, \dots, a_n$ de nombres réels positifs,

$$\Big(\prod_{k=1}^{n} a_k\Big)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

6. Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction strictement croissante. Montrer que $\varphi(n) \geqslant n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
7. Soit P_n une assertion dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}^*$. On veut montrer que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Dans le **raisonnement par récurrence forte**, on procède comme suit :
   - ▷ **Initialisation :** on vérifie que P_1 est vraie ;
   - ▷ **Étape d'induction :** on vérifie que $(\mathsf{P}_1 \wedge \mathsf{P}_2 \wedge \cdots \wedge \mathsf{P}_{n-1}) \Rightarrow \mathsf{P}_n$ est vraie.

   Montrer que le raisonnement par récurrence forte est équivalent au raisonnement par récurrence.
8. Un nombre entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, est **premier** s'il n'existe pas $a, b \in [\![2, n-1]\!]$ tels que $n = ab$. Montrer que tout nombre $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$, peut être décomposé comme produit de nombres premiers ($\exists p_1, \ldots, p_k$ premiers tels que $n = p_1 \cdots p_k$) et que cette décomposition est unique.
9. La **suite de Fibonacci** est définie par $u_0 \coloneqq 0$, $u_1 \coloneqq 1$ et, de façon récursive, par $u_n \coloneqq u_{n-2} + u_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$.
   a) Démontrer la **formule de Binet** : pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$
   b) Montrer que $u_0^2 + u_1^2 + \cdots + u_n^2 = u_n u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.
10. Démontrer l'**inégalité de Jensen** : soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe, $x_1, \ldots, x_n \in I$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in [0,1]$ tels que $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$. Alors,
    $$f\Big(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i).$$

1.7.5 Puissances rationnelles

Exercice 1.12

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. Soit $E \coloneqq \{y \in \mathbb{R} \mid y^n = x\}$. Montrer que
   $$E = \begin{cases} \{-\sqrt[n]{x},\ \sqrt[n]{x}\} & \text{si } x > 0 \text{ et } n \text{ est pair,} \\ \{\sqrt[n]{x}\} & \text{si } x > 0 \text{ et } n \text{ est impair,} \\ \{0\} & \text{si } x = 0, \\ \{-\sqrt[n]{-x}\} & \text{si } x < 0 \text{ et } n \text{ est impair,} \\ \varnothing & \text{si } x < 0 \text{ et } n \text{ est pair.} \end{cases}$$
2. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère l'ensemble
   $$E \coloneqq \left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, ax^2 + bx + c = 0\right\}$$
   des **racines** de l'**équation quadratique** $ax^2 + bx + c = 0$. Soit $\Delta \coloneqq b^2 - 4ac$ le **discriminant** de cette équation. Montrer que
   $$E = \begin{cases} \{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\} & \text{si } \Delta > 0, \\ \{\frac{-b}{2a}\} & \text{si } \Delta = 0, \\ \varnothing & \text{si } \Delta < 0. \end{cases}$$
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $x \mapsto x^{1/n}$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est bijective et strictement croissante.
4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < x < 1$ implique $x^{1/n} > x$, alors que $x > 1$ implique $x^{1/n} < x$.
5. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et que $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

6. Montrer qu'il n'y a pas de nombre rationnel r tel que $2^r = 3$.

7. Démontrer l'inégalité suivante : pour tout $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_+$ et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{b_k} \geqslant \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{a_k}\right)^2}{\sum_{k=1}^{n} b_k}.$$

(Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.) En déduire que, pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geqslant \frac{x+y+z}{2}.$$

2 Suites numériques

Dans ce chapitre, nous allons introduire les suites numériques et étudier la notion de limite d'une telle suite. Ces concepts sont absolument centraux dans ce cours : en particulier, les notions de série, de continuité, de dérivée et d'intégrale de Riemann reposent toutes de façon essentielle sur la notion de limite. Une des caractéristiques de l'analyse est d'approximer divers objets ou quantités d'intérêt par d'autres plus simples, puis d'effectuer un « passage à la limite » afin d'obtenir des informations sur l'objet de départ. Une telle approche remonte à l'Antiquité : c'est déjà de cette façon qu'Archimède a déterminé l'aire d'un disque, le volume d'une boule, etc., plus de 200 ans avant notre ère. C'est également l'approche utilisée par Newton et Leibniz dans leur développement du calcul différentiel au XVI[e] siècle. Il a pourtant fallu attendre le XIX[e] siècle et les travaux de mathématiciens tels Cauchy et Weierstrass pour qu'une approche réellement rigoureuse du concept de limite soit développée.

2.1 Limite d'une suite numérique

Une **suite numérique** est une fonction $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, habituellement dénotée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et que l'on abrègera souvent (u_n). On considèrera également des suites indexées par les entiers strictement positifs, dénotées $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ou $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exemple 2.1. ▷ $u_n := (1+\frac{1}{n})^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

▷ La **suite de Fibonacci** est définie par la relation de récurrence (d'ordre 2) suivante :

- $u_0 := 0$, $u_1 := 1$;
- $u_n := u_{n-1} + u_{n-2}$, lorsque $n \geqslant 2$.

Ses premiers termes sont donc : $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ ◇

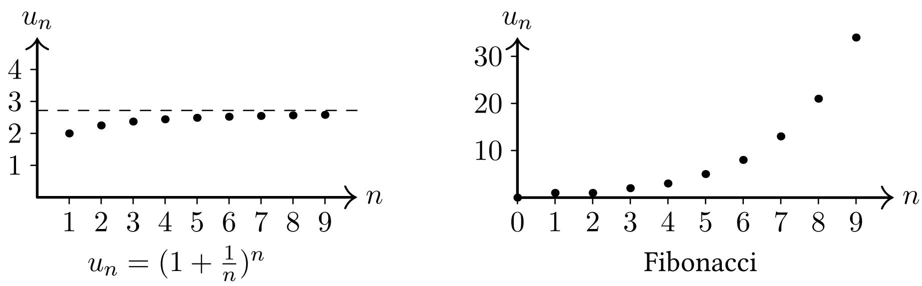


FIGURE 2.1: Les deux suites de l'Exemple 2.1.

Comme on peut le voir dans la figure 2.1, les deux suites de l'Exemple 2.1 présentent des comportements apparemment fort différents : la première semble se stabiliser rapidement vers une valeur de l'ordre de $2,7$, alors que la seconde semble croître rapidement et sans limite (la question **9.** de l'Exercice 1.11 précise cela). L'étude du comportement asymptotique des suites numériques (c'est-à-dire, lorsque le paramètre n devient très grand) est le sujet principal de ce chapitre.

Intuitivement, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si u_n s'approche de ℓ lorsque n devient grand. Plus précisément, on veut pouvoir garantir que u_n est arbitrairement proche de ℓ en prenant n suffisamment grand.

Définition 2.2. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. La suite (u_n) **converge vers** (ou **tend vers**) ℓ si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon.$$

*Dans ce cas, ℓ est appelé la **limite** de la suite (u_n) et est noté $\ell = \lim_{n\to\infty} u_n$.*

En d'autres termes, ℓ est la limite de la suite (u_n) si, pour tout $\epsilon > 0$, le nombre de valeurs de n pour lesquelles $u_n \notin (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ est fini.

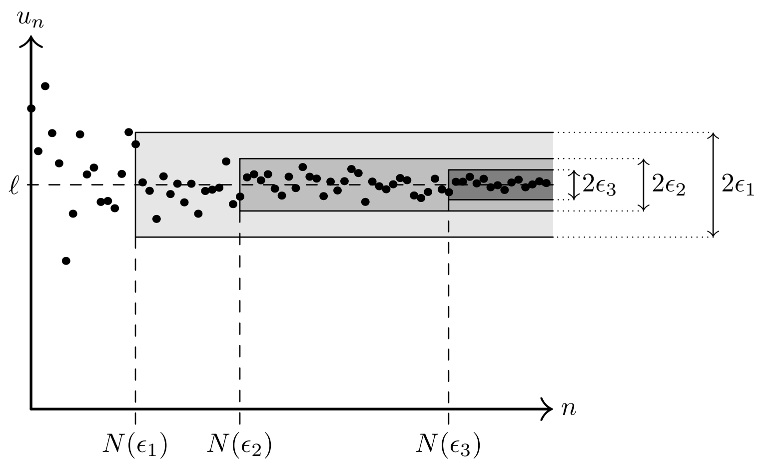


FIGURE 2.2: ℓ est la limite de la suite (u_n) si, pour tout $\epsilon > 0$, il est possible de trouver N tel que $|u_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

Remarque 2.3.

- ▷ *Lorsqu'une suite (u_n) converge vers une limite ℓ, on dit qu'elle est **convergente**. Sinon, elle est **divergente**.*
- ▷ *Au lieu de $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$, on écrira aussi $\lim_n u_n = \ell$, $u_n \xrightarrow{n\to\infty} \ell$ ou $u_n \to \ell$.*
- ▷ *La limite ℓ, lorsqu'elle existe, est toujours unique. En effet, supposons que ℓ_1 soit une limite de (u_n) et considérons $\ell_2 \neq \ell_1$. Montrons que ℓ_2 ne peut pas être une limite de (u_n). Fixons $\epsilon := |\ell_1 - \ell_2|/2$. On peut alors trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que*

$$\forall n \geqslant N, |u_n - \ell_1| < \epsilon.$$

Par conséquent, l'inégalité triangulaire implique que, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - \ell_2| = |u_n - \ell_1 + \ell_1 - \ell_2| \geqslant |\ell_1 - \ell_2| - |u_n - \ell_1| \geqslant 2\epsilon - \epsilon = \epsilon,$$

ce qui implique bien que (u_n) ne tend pas vers ℓ_2.

- ▷ *L'existence et la valeur de la limite sont des notions **asymptotiques**, dans le sens qu'elles ne dépendent pas des valeurs prises par les $n+1$ premiers termes de la suite, $u_0, u_1, \ldots, u_n$, et ce quel que soit $n \in \mathbb{N}$.* ◇

- ☐ Si $\lim_n u_n = \ell$ et $n_1 > n_2$, alors $|u_{n_1} - \ell| \leqslant |u_{n_2} - \ell|$.
- ☐ Si $\lim_n u_n = 0$, alors $\forall \epsilon > 0$, $|u_n| \leqslant \epsilon$.
- ☐ Si $\lim_n |u_n| = 0$, alors $\lim_n u_n = 0$.
- ☐ Si $\lim_n u_n = 0$, alors $\lim_n |u_n| = 0$.
- ☐ Si $\lim_n |u_n| = \ell$, alors $\lim_n u_n = \ell$ ou $\lim_n u_n = -\ell$.
- ☐ Si (u_n) est une suite telle que $u_n > 0$ et $\lim_n u_n = \ell$, alors $\ell > 0$.
- ☐ Si (u_n) est une suite telle que $u_n > 0$ et $\lim_n u_n = \ell$, alors $\ell \geqslant 0$.

Lorsque l'on a un candidat ℓ pour la limite d'une suite u_n, démontrer qu'il s'agit bien de la limite se fait en général de la façon suivante : on fixe $\epsilon > 0$, puis on établit la validité, lorsque n est suffisamment grand, des deux inégalités

$$\ell - \epsilon < u_n < \ell + \epsilon.$$

Voyons cela sur quelques exemples.

Exemple 2.4. Montrons que la suite $u_n := \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0. Pour ce faire, fixons $\epsilon > 0$. Clairement, $u_n = \frac{1}{n} > 0 > -\epsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Il reste donc à montrer que $\frac{1}{n} < \epsilon$ lorsque n est assez grand. Par l'Exercice 1.6, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \epsilon$. On a donc, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \epsilon. \qquad \diamond$$

Exemple 2.5. Soit $q \in (-1, 1)$. Montrons que la suite $u_n := q^n$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 0. Évidemment, si $q = 0$, il n'y a rien à démontrer. Supposons donc $q \neq 0$. Fixons $\epsilon > 0$. Il nous faut montrer que $|q^n| < \epsilon$ pour tout n grand. Soit $\lambda := \frac{1}{|q|} - 1 > 0$. Il suit alors de l'inégalité de Bernoulli (Lemme 1.15) que

$$|q^n| = |q|^n = \frac{1}{(1+\lambda)^n} \leqslant \frac{1}{1+n\lambda} < \epsilon,$$

dès que $1 + n\lambda > 1/\epsilon$, c'est-à-dire pour tout $n > (1-\epsilon)/\epsilon\lambda$. $\diamond$

Exemple 2.6. Montrons que la suite $u_n := \sqrt[n]{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, converge vers 1. Comme avant, on fixe $\epsilon > 0$. Manifestement, $\sqrt[n]{n} \geqslant 1 > 1 - \epsilon$ pour tout $n \geqslant 1$. Il reste donc à vérifier que $\sqrt[n]{n} < 1 + \epsilon$ pour tout n grand. Or, cette dernière inégalité peut s'écrire $(1+\epsilon)^n > n$. Par la formule du binôme de Newton,

$$(1+\epsilon)^n = \underbrace{1 + n\epsilon}_{\geqslant 0} + \frac{n(n-1)}{2}\epsilon^2 + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} \epsilon^k}_{\geqslant 0} \geqslant \frac{(n-1)\epsilon^2}{2} n > n,$$

dès que $(n-1)\epsilon^2/2 > 1$, c'est-à-dire pour tout $n > 1 + 2\epsilon^{-2}$. $\diamond$

Définition 2.7. *Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $u_n < K$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire si l'ensemble $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est majoré. La suite est **minorée** si $(-u_n)$ est majorée. Elle est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée.*

Proposition 2.8. *Toute suite convergente est bornée.*

⚠ Le contraire n'est pas vrai en général : une suite bornée n'est pas nécessairement convergente (voir l'Exemple 2.10 ci-dessous).

Démonstration. Soit ℓ la limite de la suite. Par définition de la convergence (avec $\epsilon = 1$), il doit exister $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < 1$. En particulier,

$$\forall n \geqslant N, \quad |u_n| = |u_n - \ell + \ell| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell| \leqslant 1 + |\ell|.$$

Par conséquent, $|u_k| \leqslant \max\{|u_0|, |u_1|, \dots, |u_{N-1}|, 1 + |\ell|\}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

La proposition précédente fournit une première approche pour montrer qu'une suite est divergente : montrer qu'elle n'est pas bornée.

Exemple 2.9. Soit $q > 1$. Nous allons montrer que la suite $u_n = q^n$ diverge. En effet, il suit de l'Exemple 2.6 que $n^{1/n} < q$ pour tout n suffisamment grand. Or, ceci est équivalent à $q^n > n$ pour tout n suffisamment grand. Il suit que la suite (u_n) n'est pas bornée et donc, par la Proposition 2.8, qu'elle n'est pas convergente. ◇

Plus généralement, pour montrer qu'une suite (u_n) est divergente, il faut montrer que

$$\forall \ell \in \mathbb{R}, \exists \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - \ell| \geqslant \epsilon.$$

Illustrons cela sur un exemple simple.

Exemple 2.10. Montrons que la suite $u_n := (-1)^n$ est divergente. Soit $\ell \in \mathbb{R}$ et $\epsilon := 1$. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a $|u_N - u_{N+1}| = 2$. Par conséquent, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_N - \ell| + |u_{N+1} - \ell| \geqslant |u_{N+1} - \ell + \ell - u_N| = |u_{N+1} - u_N| = 2.$$

Il suit que $\max\{|u_N - \ell|, |u_{N+1} - \ell|\} \geqslant 1 = \epsilon$. On a donc trouvé $n \geqslant N$ tel que $|u_n - \ell| \geqslant \epsilon$, comme souhaité (il suffit de prendre soit $n = N$, soit $n = N + 1$). ◇

- ☐ Une suite non bornée ne peut être convergente.
- ☐ Une suite ne prenant qu'un nombre fini de fois une valeur non nulle converge vers 0.
- ☐ Toute suite divergente est non bornée.

L'exercice suivant se révèle utile pour simplifier la rédaction de certaines preuves :

Exercice 2.1

Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| < \epsilon$

(ii) $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant \epsilon$

(iii) $\exists M > 0, \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, |u_n - \ell| \leqslant M\epsilon$

Étudions à présent le comportement des opérations arithmétiques et de la relation d'ordre, lorsque celles-ci sont appliquées à des suites convergentes.

Proposition 2.11. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes.*

(i) La suite $(u_n + v_n)$ est convergente et $\lim_n (u_n + v_n) = \lim_n u_n + \lim_n v_n$.

(ii) La suite $(u_n \cdot v_n)$ est convergente et $\lim_n (u_n \cdot v_n) = \lim_n u_n \cdot \lim_n v_n$.

(iii) Si $v_n \neq 0$ pour tout n et $\lim_n v_n \neq 0$, la suite (u_n / v_n) est convergente et

$$\lim_n \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_n u_n}{\lim_n v_n}.$$

(iv) Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n suffisamment grand, alors $\lim_n u_n \leqslant \lim_n v_n$.

Notez qu'il suit en particulier de (ii) que $\lim(c \cdot u_n) = c \cdot \lim u_n$ pour tout $c \in \mathbb{R}$.

⚠ La convergence des suites (u_n) et (v_n) est essentielle : il est par exemple possible que $\lim_n(u_n + v_n)$ existe alors que les suites (u_n) et (v_n) ne convergent pas, rendant impossible l'écriture de la limite de la somme comme somme des limites : prendre, par exemple, $u_n := (-1)^n$ et $v_n := (-1)^{n+1}$.

⚠ Si l'on a $u_n < v_n$ pour tout n, on n'a pas nécessairement $\lim_n u_n < \lim_n v_n$ (mais on a évidemment toujours $\lim_n u_n \leqslant \lim_n v_n$) : prendre, par exemple, $u_n := 0$ et $v_n := \frac{1}{n}$.

Démonstration. Soient $u := \lim_n u_n$, $v := \lim_n v_n$ et $\epsilon > 0$. En particulier,

$$\exists N_1, \forall n \geqslant N_1, |u_n - u| < \epsilon \qquad \text{et} \qquad \exists N_2, \forall n \geqslant N_2, |v_n - v| < \epsilon.$$

Posons $N := \max\{N_1, N_2\}$.

(i) Par l'inégalité triangulaire, on a, pour tout $n \geqslant N$,

$$|(u_n + v_n) - (u + v)| = |(u_n - u) + (v_n - v)| \leqslant |u_n - u| + |v_n - v| \leqslant 2\epsilon.$$

(ii) On peut supposer que $\epsilon \leqslant 1$. On a, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n v_n - uv| = |(u_n - u)v_n + u(v_n - v)| \leqslant |u_n - u||v_n| + |u||v_n - v| < (|v_n| + |u|)\epsilon \leqslant (1 + |v| + |u|)\epsilon,$$

puisque $|v_n| = |v_n - v + v| \leqslant |v_n - v| + |v| < \epsilon + |v| \leqslant 1 + |v|$.

(iii) Il suffit de traiter le cas $u_n = u = 1$ pour tout n, car le résultat général suit alors du point (ii). On peut également supposer, sans perte de généralité, que $\epsilon < \frac{|v|}{2}$. On a donc, pour tout $n \geqslant N_2$,

$$|v_n| = |v_n - v + v| \geqslant |v| - |v_n - v| > |v| - \epsilon \geqslant \frac{|v|}{2},$$

et, par conséquent,

$$\left|\frac{1}{v_n} - \frac{1}{v}\right| = \left|\frac{v_n - v}{v_n v}\right| \leqslant \frac{2}{|v|^2}|v_n - v| \leqslant \frac{2}{|v|^2}\epsilon.$$

(iv) Prouvons la contraposée. Supposons que $v < u$. Alors, en prenant $\epsilon := \frac{u-v}{2}$, on obtient, pour tout $n \geqslant N$,

$$v_n < v + \epsilon = u - \epsilon < u_n. \qquad \square$$

Exemple 2.12. Considérons la suite

$$u_n := \frac{3n^4 - 7n^3 + 5}{2n^4 + 6n^2 + 3n} = \frac{3 - 7n^{-1} + 5n^{-4}}{2 + 6n^{-2} + 3n^{-3}}.$$

Les suites (n^{-1}), (n^{-2}), (n^{-3}) et (n^{-4}) tendent toutes vers 0, puisque $\frac{1}{n} \to 0$. Par conséquent, le numérateur tend vers 3 et le dénominateur vers 2. Il suit que $u_n \to \frac{3}{2}$. ◇

Exemple 2.13 (Série géométrique). Nous allons considérer la convergence de la **série géométrique** ; cette dernière apparait très fréquemment. Soit $r \in (-1, 1)$; on considère la suite

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} r^k.$$

Observons à présent que [1]

$$(1-r)u_n = (1-r)\sum_{k=0}^{n} r^k = \sum_{k=0}^{n}(r^k - r^{k+1}) = 1 - r^{n+1},$$

et, par conséquent, $u_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$. On conclut de l'Exemple 2.5 que

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \frac{1}{1-r}.$$ ◇

Remarque 2.14. *La notation usuelle pour la limite des sommes partielles apparaissant dans l'exemple précédent, est $\sum_{k=0}^{\infty} r^k := \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} r^k$. On parle alors de **série numérique**. L'étude systématique de ces objets sera abordée au second semestre.* ◇

Théorème 2.15 (Théorème des gendarmes). *Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites telles que*

- ▷ $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ *pour tout n suffisamment grand et*
- ▷ $\lim_n u_n = \lim_n w_n = \ell$.

Alors, (v_n) est convergente et $\lim_n v_n = \ell$.

Démonstration. Soit N_0 tel que $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ pour tout $n \geqslant N_0$. Fixons $\epsilon > 0$. Soient N_1 et N_2 tels que $|u_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N_1$ et $|w_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N_2$. Posons $N := \max\{N_0, N_1, N_2\}$. Alors, pour tout $n \geqslant N$,

$$\ell - \epsilon < u_n \leqslant v_n \leqslant w_n < \ell + \epsilon,$$

c'est-à-dire $|v_n - \ell| < \epsilon$. □

⚠ Dans la preuve précédente, on ne peut pas se contenter d'appliquer deux fois le point (iv) de la Proposition 2.11, car pour cela il faudrait savoir que la suite (v_n) converge, ce qui ne fait pas partie des hypothèses.

Corollaire 2.16. *Soient (u_n) une suite bornée et (v_n) une suite convergeant vers 0. Alors, la suite $(u_n v_n)$ converge vers 0.*

Démonstration. Soit C tel que $|u_n| \leqslant C$ pour tout n. On peut donc écrire

$$-C|v_n| \leqslant -|u_n||v_n| = -|u_n v_n| \leqslant u_n v_n \leqslant |u_n v_n| = |u_n||v_n| \leqslant C|v_n|.$$

Comme $v_n \to 0$, on a $-C|v_n| \to 0$ et $C|v_n| \to 0$. Par le théorème des gendarmes, $u_n v_n \to 0$. □

Exemple 2.17. La suite $w_n := (n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor)/n$ converge vers 0. En effet, comme $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $u_n := n^{3/2} - \lfloor n^{3/2} \rfloor$ est bornée. La conclusion suit puisque la suite $v_n := 1/n$ tend vers 0. ◇

Exercice 2.2

Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \to x$. (Indication : utiliser les Théorèmes 1.22 et 2.15.)

1. Une somme de la forme $\sum_{k=m}^{n}(a_k - a_{k+1}) = (a_m - \cancel{a_{m+1}}) + (\cancel{a_{m+1}} - \cancel{a_{m+2}}) + (\cancel{a_{m+2}} - \cancel{a_{m+3}}) + \cdots + (\cancel{a_n} - a_{n+1}) = a_m - a_{n+1}$, comme celle apparaissant dans ce calcul, est appelée **somme télescopique**. Vous en avez déjà rencontré un exemple au point **8.** de l'Exercice 1.8.

2.2 Convergence monotone

Dans tous les exemples traités jusqu'à présent, nous avions un candidat pour la limite et la preuve de la convergence établissait simultanément la validité de ce candidat. En général, une telle approche n'est pas possible, et une méthode permettant de montrer la convergence sans nécessairement déterminer explicitement la limite est requise. Nous allons étudier, dans cette section, une première approche de ce type.

Définition 2.18. *Une suite* $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ *est dite* ***croissante*** *si* $u_n \leqslant u_{n+1}$ *pour tout* n*. Elle est* ***décroissante*** *si* $u_n \geqslant u_{n+1}$ *pour tout* n*.*

- ☐ Si (u_n) est croissante, alors (u_n^2) est croissante.
- ☐ Si (u_n) est croissante, alors (u_n) n'est pas majorée.
- ☐ Si (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geqslant u_n$, alors (v_n) est croissante.
- ☐ Si (u_n) est croissante et $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$, alors $(1/u_n)$ est décroissante.
- ☐ Une suite peut être à la fois croissante et décroissante.
- ☐ Une suite convergente est soit croissante, soit décroissante.

Théorème 2.19 (Convergence des suites croissantes et majorées)**.** *Une suite* (u_n) *croissante et majorée est convergente et* $\lim_n u_n = \sup_n u_n \coloneqq \sup\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\}$*.*

Évidemment, ce résultat s'étend aux suites décroissantes et minorées (en remplaçant $\sup$ par $\inf$).

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par le Lemme 1.12, il existe N tel que $u_N > \sup_k u_k - \epsilon$. Par conséquent, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sup_k u_k - \epsilon < u_N \leqslant u_n \leqslant \sup_k u_k < \sup_k u_k + \epsilon. \qquad \square$$

Exemple 2.20. Nous allons montrer la convergence de la suite

$$u_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Tout d'abord, (u_n) est clairement croissante, puisque $u_{n+1} - u_n = 1/(n+1)^2 > 0$. La convergence sera donc garantie si on parvient à montrer que (u_n) est également majorée. Pour cela, observons tout d'abord que, pour tout $k \geqslant 2$,

$$\frac{1}{k^2} = \frac{1}{k \cdot k} < \frac{1}{k \cdot (k-1)} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}. \tag{2.1}$$

On obtient donc

$$u_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} < 1 + \sum_{k=2}^{n} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = 1 + \Big(1 - \frac{1}{n}\Big) < 2.$$

La convergence est établie. Cet argument ne fournit toutefois pas la valeur de la limite ℓ (on sait juste que $2 \geqslant \ell = \sup_k u_k \geqslant u_n$ pour tout n ; avec $n = 10$, on obtient $1{,}54 < \ell \leqslant 2$). Celle-ci a été déterminée pour la première fois en 1734 par Euler : elle est égale à $\pi^2/6 \cong 1{,}64$. ◇

Exemple 2.21. Soit $c > 0$ et $a > 0$. On considère la suite (u_n) définie par la récurrence

$$u_0 := a \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{c}{u_n}\Big).$$

On vérifie immédiatement (par récurrence) que $u_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$. De plus, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{4}\Big(u_n + \frac{c}{u_n}\Big)^2 = \frac{1}{4}\Big(u_n - \frac{c}{u_n}\Big)^2 + c \geqslant c.$$

En particulier, $u_{n+1} - u_n = \frac{c-u_n^2}{2u_n} \leqslant 0$ pour tout $n \geqslant 1$ (l'affirmation est fausse pour $n = 0$ si $a^2 < c$). On en déduit que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante et minorée. Elle est donc convergente ; notons ℓ sa limite. Afin de déterminer ℓ, il suffit d'observer que la relation de récurrence et la Proposition 2.11 impliquent que

$$0 = \lim_n \Big\{u_{n+1} - \frac{1}{2}\Big(u_n + \frac{c}{u_n}\Big)\Big\} = \ell - \frac{1}{2}\Big(\ell + \frac{c}{\ell}\Big).$$

Il suit que $\ell^2 = c$. Comme $\ell \geqslant 0$, on obtient finalement $\ell = \sqrt{c}$.

Notons que cette suite fournit une méthode simple et efficace pour obtenir une valeur approchée de la racine carrée d'un nombre. Par exemple, en prenant $c = a := 2$, les premiers termes de la suite sont

$$u_1 = \frac{3}{2}, \quad u_2 = \frac{17}{12}, \quad u_3 = \frac{577}{408}, \quad u_4 = \frac{665857}{470832} \cong 1{,}414213562375.$$

On voit que u_4 fournit déjà une excellente approximation de $\sqrt{2} \cong 1{,}414213562373$. Cette méthode d'extraction d'une racine carrée est connue sous le nom de **méthode de Héron** et remonte au moins au premier siècle, et peut-être même aux mathématiciens babyloniens plusieurs siècles plus tôt. ◇

Exemple 2.22 (Représentation décimale). La représentation décimale d'un nombre réel positif prend la forme

$$x = \mathsf{x}_0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots, \qquad \text{avec } \mathsf{x}_0 \in \mathbb{N} \text{ et } \mathsf{x}_1, \mathsf{x}_2, \ldots \in \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

Elle est définie à l'aide de la suite

$$u_n = \mathsf{x}_0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\ldots\mathsf{x}_n := \sum_{k=0}^{n} \mathsf{x}_k \cdot 10^{-k}.$$

Manifestement, la suite (u_n) est croissante est majorée (par $\mathsf{x}_0 + 1$). Par conséquent, $x = \lim_n u_n$ existe.

Observez que cette représentation n'est pas unique. Par exemple, le nombre correspondant à $\mathsf{x}_0 = 0$ et $\mathsf{x}_k = 9$ pour tous les $k \geqslant 1$ (c'est-à-dire, 0,9999...) coïncide avec le nombre correspondant à $\mathsf{x}_0 = 1$ et $\mathsf{x}_k = 0$ pour tout $k \geqslant 1$ (c'est-à-dire, 1,0000...). En effet, ce sont respectivement les limites des suites $u_n := \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k}$ et $v_n := 1$. Or, par le résultat de l'Exemple 2.13, on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 9\Big(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} - 1\Big) = 9\Big(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - 1\Big) = 1. \qquad \diamond$$

Théorème 2.23 (Théorème des suites adjacentes)**.** *Soient (u_n) et (v_n) deux suites* ***adjacentes****, c'est-à-dire satisfaisant*

(i) *(u_n) est croissante et (v_n) est décroissante ;*

(ii) *$v_n \geqslant u_n$ pour tout n ;*

(iii) $\lim_n(v_n - u_n) = 0$.

Alors, (u_n) et (v_n) convergent et $\lim_n u_n = \lim_n v_n = \sup_n u_n = \inf_n v_n$.

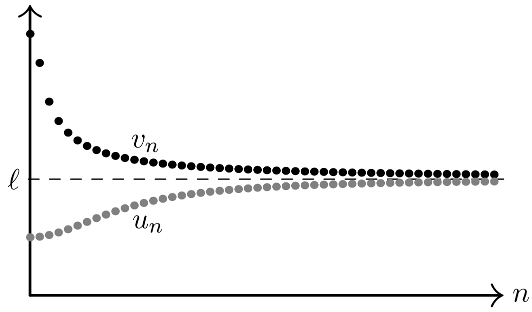


FIGURE 2.3: Deux suites adjacentes.

Démonstration. La suite u_n est croissante et majorée (puisque $u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$ pour tout n). Par conséquent, il suit du Théorème 2.19 que (u_n) est convergente. De même, (v_n) étant décroissante et minorée (par u_0), elle est également convergente. L'égalité des limites suit alors de la propriété (iii). □

Exemple 2.24. Considérons les suites

$$u_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \qquad \text{et} \qquad v_n := u_n + \frac{1}{n!n}.$$

Comme $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n!} > 0$, (u_n) est croissante. Pour vérifier que v_n est décroissante, on écrit

$$v_n - v_{n-1} = \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} - \frac{1}{(n-1)!(n-1)} = \frac{-1}{n!n(n-1)} < 0.$$

De plus, $v_n - u_n = \frac{1}{n!n}$ est positif et converge vers 0. Par conséquent, les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes et convergent donc vers une même limite, notée e, appelée **nombre d'Euler**[2]. Même si cette approche ne nous donne pas explicitement la valeur de la limite, elle nous fournit, via les identités $e = \sup_n u_n = \inf_n v_n$, une suite d'encadrements de cette constante. Par exemple, avec $n = 10$, on obtient $2{,}71828180 < u_{10} < e < v_{10} < 2{,}71828183$. ◇

Il est intéressant de noter que les encadrements obtenus pour la constante d'Euler dans l'exemple précédent sont en fait suffisants pour en déduire une propriété non triviale de cette dernière.

Proposition 2.25. *Le nombre d'Euler e est irrationnel.*

Démonstration. Supposons au contraire que $e = \frac{p}{q}$ avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. Il suit des encadrements fournis par l'exemple précédent que $u_q < e < v_q$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} < \frac{p}{q} < \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} + \frac{1}{q!q}.$$

Si l'on multiplie ces deux inégalités par $q!q$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{q} \frac{q!q}{k!} < q!p < \sum_{k=0}^{q} \frac{q!q}{k!} + 1.$$

Or, $\frac{q!}{k!} = \prod_{i=k+1}^{q} i$ est un entier et donc les sommes ci-dessus sont également entières. On conclut donc que l'entier $q!p$ est encadré strictement par deux entiers successifs, ce qui est absurde. □

2. Le nombre d'Euler est intimement lié aux fonctions logarithme et exponentielle, comme on le verra dans le Chapitre 6.

Exemple 2.26. On considère les suites (pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$$u_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad v_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Nous allons tout d'abord montrer que ces deux suites convergent vers une même limite en prouvant qu'elles sont adjacentes. Commençons par la croissance de (u_n) : par l'inégalité de Bernoulli,

$$\frac{u_n}{u_{n-1}} = \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n-1}}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) \frac{n}{n-1} = 1.$$

On montre de façon similaire que (v_n) est décroissante :

$$\frac{v_{n-1}}{v_n} = \left(1 + \frac{1}{n^2-1}\right)^n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geqslant \left(1 + \frac{n}{n^2-1}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \geqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right) \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1,$$

où la première inégalité suit à nouveau de l'inégalité de Bernoulli. Le fait que $v_n > u_n$ pour tout n est évident. Finalement, $v_n - u_n = \frac{u_n}{n}$ et on a bien $\lim_n (v_n - u_n) = 0$ par le Corollaire 2.16, puisque $1/n \to 0$ et (u_n) est bornée ($\forall n \in \mathbb{N}^*, 2 = u_1 \leqslant u_n < v_n \leqslant v_1 = 4$).

(u_n) et (v_n) convergent donc toutes deux vers la même limite. Il se trouve que cette limite est à nouveau donnée par le nombre d'Euler e, comme nous allons le montrer à présent.

Notons $t_n := \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$. On a vu que $\lim_n t_n = e$ (Exemple 2.24). Par la formule du binôme,

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \frac{n!}{(n-k)!n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \underbrace{\frac{n-i}{n}}_{\leqslant 1} \leqslant \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = t_n.$$

Il suit que $\lim_n u_n \leqslant \lim_n t_n = e$. Afin de montrer l'autre direction, observons que, si $n \geqslant m$,

$$u_n \geqslant \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} \frac{n-i}{n}.$$

Dans le membre de droite on a une somme de $m+1$ termes. Comme $\lim_n \frac{n-i}{n} = 1$ (attention : on garde m fixe et $i < m$), chacun de ces termes converge, lorsque $n \to \infty$ vers $\frac{1}{k!}$. On obtient donc, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\lim_n u_n \geqslant \sum_{k=0}^m \frac{1}{k!} = t_m.$$

En prenant à présent la limite $m \to \infty$, on obtient $\lim_n u_n \geqslant \lim_m t_m = e$, comme désiré. $\diamond$

2.3 Suites tendant vers l'infini et formes indéterminées

Définition 2.27. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite.*

- (u_n) ***tend vers*** $+\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \geqslant M$.
- (u_n) ***tend vers*** $-\infty$ *si* $\forall M \in \mathbb{R}, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, u_n \leqslant M$.

Insistons sur le fait qu'une suite qui tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ est divergente : $+\infty$ et $-\infty$ ne sont pas des limites au sens propre du terme, puisque ce ne sont pas des nombres réels (mentionnons ici qu'on ne peut pas ajouter $+\infty$ et $-\infty$ à $\mathbb{R}$ et préserver l'ensemble des axiomes du Chapitre 1). Nous écrirons tout de même, par analogie, $\lim_n u_n = \pm\infty$. De même, on s'autorisera à écrire, par exemple, $\sup E = +\infty$ ($\inf E = -\infty$) si $E \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré (minoré).

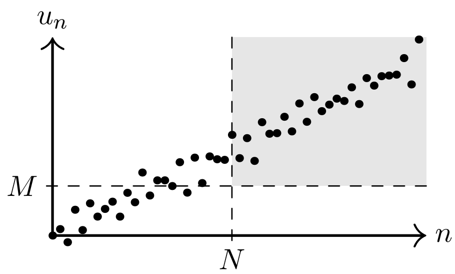


FIGURE 2.4: Une suite qui tend vers $+\infty$: pour tout M, on peut trouver N tel que $u_n \geqslant M$ pour tout $n \geqslant N$.

- ☐ Une suite tendant vers $+\infty$ n'est pas majorée.
- ☐ Si $A \subset \mathbb{R}$ n'est pas majoré, alors il existe une suite $(u_n) \in A^{\mathbb{N}}$ tendant vers $+\infty$.
- ☐ Une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- ☐ Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 0$. Alors, $\lim_n u_n = -\infty$ si et seulement si $\lim_n 1/u_n = 0$.
- ☐ Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \neq 0$. Alors, $\lim_n 1/u_n = 0$ implique $\lim_n u_n = -\infty$ ou $\lim_n u_n = +\infty$.
- ☐ Soit (u_n) une suite telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$. Alors $\lim_n u_n = +\infty$.

Exercice 2.3

Soit (u_n) une suite tendant vers $+\infty$. Démontrer les affirmations suivantes.

1. Si $u_n \leqslant v_n$ pour tout n suffisamment grand, alors (v_n) tend vers $+\infty$.

2. Si (v_n) tend vers $+\infty$, alors $(u_n + v_n)$ et $(u_n \cdot v_n)$ tendent vers $+\infty$.

3. Si (v_n) est bornée, alors $(u_n + v_n)$ tend vers $+\infty$.

4. S'il existe $\delta > 0$ tel que $v_n \geqslant \delta$ pour tout n suffisamment grand, alors $(u_n \cdot v_n)$ tend vers $+\infty$.

5. Si (v_n) est bornée, alors $(\frac{v_n}{u_n})$ tend vers 0.

Observons que, dans l'exercice précédent, on ne retrouve pas toutes les propriétés de la Proposition 2.11. C'est parce qu'en général le comportement dépend des suites choisies. On parle alors de **formes indéterminées** :

Si (u_n)	et (v_n)	alors	est une indétermination du type
$\to +\infty$	$\to -\infty$	$(u_n + v_n)$	« $\infty - \infty$ »
$\to 0$	$\to +\infty$	$(u_n \cdot v_n)$	« $0 \cdot \infty$ »
$\to 0$	$\to 0$	$(\frac{u_n}{v_n})$	« $0/0$ »
$\to +\infty$	$\to +\infty$	$(\frac{u_n}{v_n})$	« ∞/∞ »
$\to 1$	$\to +\infty$	$(u_n^{v_n})$	« 1^∞ »
$\to +\infty$	$\to 0$	$(u_n^{v_n})$	« ∞^0 »
$\to 0$	$\to 0$	$(u_n^{v_n})$	« 0^0 »

Exemple 2.28. Soit $u_n := n$, $v_n := n^2$. Ces deux suites tendent vers $+\infty$, et on vérifie aisément que $\frac{u_n}{v_n} \to 0$ et $\frac{v_n}{u_n} \to +\infty$. Ce type de comportement est typique des formes indéterminées : c'est la vitesse à laquelle les limites en question sont approchées qui va déterminer l'existence et la valeur de la limite. ◇

Exemple 2.29. Mentionnons que l'analyse du comportement asymptotique des suites définies par récurrence peut parfois être extrêmement difficile. Un exemple frappant est celui de la **conjecture de**

Syracuse[3]. Ce problème consiste à étudier le comportement de la suite définie par la relation de récurrence

$$u_{n+1} := \begin{cases} \frac{1}{2}u_n & \text{si } u_n \text{ est pair,} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair.} \end{cases}$$

en fonction de la valeur initiale $u_0 \in \mathbb{N}^*$. Par exemple, si $u_0 := 1$, alors on obtient la suite $1, 4, 2, 1$; comme on est retombé sur 1, la suite se répète ensuite périodiquement. Avec $u_0 := 7$, on obtient la suite $7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$; à nouveau, étant tombé sur 1, cette suite se poursuit à partir de là comme la suite précédente. Un dernier exemple : avec $u_0 := 33$, on obtient la suite $33, 100, 50, 25, 76, 38, 19, 58, 29, 88, 44, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$; à nouveau, ayant atteint 1, on poursuit comme la première suite.

La conjecture de Syracuse affirme que, *quelle que soit la valeur initiale* $u_0 \in \mathbb{N}^*$, la suite obtenue finit toujours pas tomber sur 1 et se termine donc avec le motif $1, 4, 2$ répété périodiquement. Cette conjecture a été vérifiée expérimentalement pour toutes les valeurs de u_0 jusqu'à $2^{68} \cong 2{,}95 \cdot 10^{20}$. Néanmoins, cette conjecture résiste aux mathématiciens depuis qu'elle a été énoncée par Lothar Collatz en 1937. Le célèbre mathématicien Paul Erdős aurait déclaré à propos de cette conjecture : « Mathematics may not be ready for such problems ». ◇

2.4 Sous-suites et valeurs d'adhérence

Exemple 2.30. La suite $u_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$ ne converge pas. Cependant,

- ▷ si on observe la suite uniquement le long des indices pairs, alors $u_{2n} = \frac{2n}{2n+1} \xrightarrow{n \to \infty} 1$;
- ▷ si on observe la suite uniquement le long des indices impairs, alors $u_{2n+1} = -\frac{2n+1}{2n+2} \xrightarrow{n \to \infty} -1$.

Ainsi, même si une suite n'est pas convergente, on peut espérer obtenir des informations sur son comportement asymptotique en se restreignant à un sous-ensemble des indices. ◇

Définition 2.31. *Soit* (u_n) *une suite. Une* ***sous-suite*** *extraite de* (u_n) *est une suite de la forme* $(u_{\varphi(n)})$ *où* $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *est strictement croissante.*

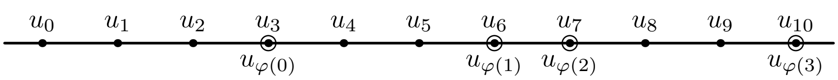


FIGURE 2.5: Extraction d'une sous-suite.

Exemple 2.32. (u_{2n}), (u_{2n+1}) et (u_{2^n}) sont des sous-suites extraites de (u_n). ◇

Exercice 2.4

Soit (u_n) une suite convergeant vers ℓ. Montrer que toute sous-suite extraite de (u_n) converge également vers ℓ.

- ☐ Toute sous-suite d'une suite croissante est croissante.
- ☐ Si une suite n'est pas croissante, alors aucune de ses sous-suites n'est croissante.
- ☐ Toute sous-suite d'une suite non bornée est non bornée.

3. Également connue sous l'appellation de conjecture de Collatz, conjecture d'Ulam, problème de Kakutani, conjecture de Thwaites, algorithme de Hasse, conjecture tchèque et problème $3n + 1$.

Définition 2.33. *$a \in \mathbb{R}$ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_n) s'il existe une sous-suite extraite de (u_n) convergeant vers a.*

Exemple 2.34. ▷ La suite $u_n := (-1)^n \frac{n}{n+1}$ possède deux valeurs d'adhérence : -1 et 1.

▷ Par l'Exercice 2.4, toute suite convergente possède une unique valeur d'adhérence : sa limite. ◇

Intuitivement, a est une valeur d'adhérence de la suite (u_n) si, pour tout $\epsilon > 0$, $u_n \in (a-\epsilon, a+\epsilon)$ pour une infinité de valeurs de n : la suite s'approche arbitrairement près de a infiniment souvent. Ceci est rendu précis dans la proposition suivante.

Proposition 2.35. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $a \in \mathbb{R}$. Alors, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) a est une valeur d'adhérence de (u_n).

(ii) $\forall \epsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geqslant N, |u_n - a| < \epsilon$.

Démonstration. (i) ⇒ (ii). Il existe une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a. Fixons $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n' \geqslant N'$, $|u_{\varphi(n')} - a| < \epsilon$. Prenons $n := \varphi(\max\{N, N'\})$. On a alors $|u_n - a| < \epsilon$ et $n \geqslant N$ (par le point **6.** de l'Exercice 1.11).

(ii) ⇒ (i). Nous allons construire, par récurrence, une fonction strictement croissante $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que la sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ converge vers a.

Posons tout d'abord $\epsilon_0 := 1$ et $N_0 := 0$. Soit $k \geqslant N_0$ tel que $|u_k - a| < \epsilon_0 = 1$. On pose $\varphi(0) := k$. Supposons à présent que l'on ait déjà construit $\varphi(0), \dots, \varphi(n-1)$. Nous allons expliquer comment construire $\varphi(n)$. Posons $\epsilon_n := \frac{1}{n+1}$ et $N_n := \varphi(n-1) + 1$. Par (ii), il existe $k \geqslant N_n$ tel que $|u_k - a| < \epsilon_n = \frac{1}{n+1}$. On pose $\varphi(n) := k$.

La construction ci-dessus garantit que $\varphi(n+1) > \varphi(n)$ et $|u_{\varphi(n)} - a| < \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Soit (u_n) une suite bornée. On définit deux nouvelles suites :

$$M_n := \sup\{u_k \,|\, k \geqslant n\} \qquad \text{et} \qquad m_n := \inf\{u_k \,|\, k \geqslant n\}. \tag{2.2}$$

Clairement, $m_n \leqslant M_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Lemme 2.36. *Les suites (M_n) et (m_n) sont convergentes.*

Démonstration. Comme $E \subset F$ implique $\sup E \leqslant \sup F$ (Exercice 1.10, point **3.**), la suite (M_n) est décroissante. De plus, elle est bornée, puisque (u_n) l'est. Donc, (M_n) est convergente. On procède de façon similaire pour (m_n). □

Définition 2.37. *Soit (u_n) une suite bornée et (M_n) et (m_n) comme définies dans (2.2).*

▷ *La **limite supérieure** de (u_n) est définie par*

$$\limsup_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{u_k \,|\, k \geqslant n\}.$$

▷ *La **limite inférieure** de (u_n) est définie par*

$$\liminf_{n\to\infty} u_n := \lim_{n\to\infty} m_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{u_k \,|\, k \geqslant n\}.$$

Comme pour la limite, on écrira plus simplement $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$. Puisque $M_n \geqslant m_n$, pour tout n, on a

$$\limsup_n u_n \geqslant \liminf_n u_n.$$

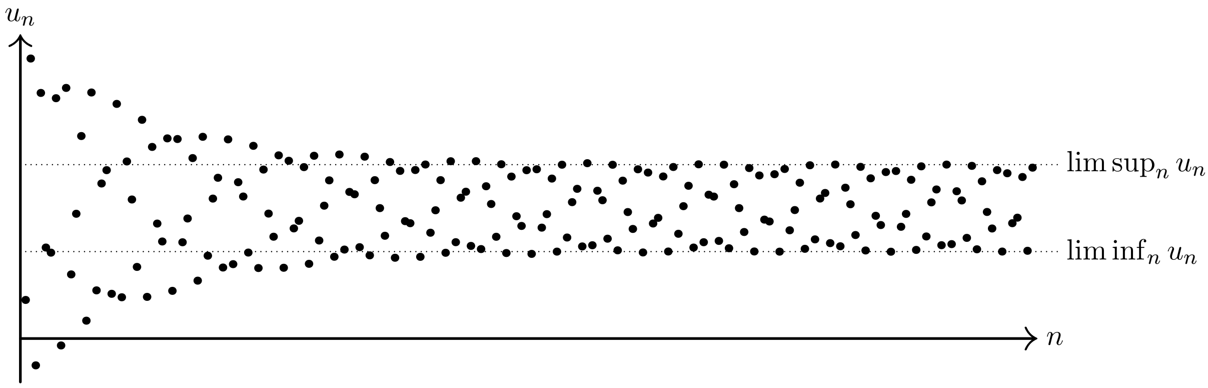


FIGURE 2.6: Limites supérieure et inférieure d'une suite.

- ☐ Si $\limsup_n u_n = 0$, alors $\limsup_n |u_n| = 0$.
- ☐ Si $\limsup_n |u_n| = 0$, alors $\lim_n u_n = 0$.
- ☐ Si $\limsup_n |u_n| = 3$, alors $\limsup_n u_n = 3$.
- ☐ Si $\limsup_n |u_n| = 3$, alors (u_n) est bornée.
- ☐ Si (u_n) est une suite telle que $\lim_n u_n$ existe, alors $\liminf_n u_n = \limsup_n u_n = \lim_n u_n$.
- ☐ Soient a une valeur d'adhérence de (u_n) et b une valeur d'adhérence de (v_n). Alors $a + b$ est une valeur d'adhérence de $(u_n + v_n)$.

Proposition 2.38. *Soit (u_n) une suite bornée. Alors, $\limsup_n u_n$ et $\liminf_n u_n$ sont des valeurs d'adhérence de (u_n). De plus, $\limsup_n u_n$ (resp. $\liminf_n u_n$) est le maximum (resp. minimum) des valeurs d'adhérence de (u_n).*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $\limsup_k u_k$ est une valeur d'adhérence de (u_n). Nous allons utiliser la caractérisation de la Proposition 2.35. Fixons donc $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. D'une part, on a vu que (M_n) est une suite décroissante qui converge vers $\limsup_k u_k$. Par conséquence, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n' \geqslant N'$,

$$\limsup_k u_k \leqslant M_{n'} \leqslant \limsup_k u_k + \epsilon. \tag{2.3}$$

D'autre part, posons $N'' := \max\{N, N'\}$. Puisque $M_{N''} = \sup\{u_k \mid k \geqslant N''\}$, il suit du Lemme 1.12 qu'il existe $n \geqslant N''$ tel que

$$M_{N''} - \epsilon \leqslant u_n \leqslant M_{N''}.$$

En combinant cela avec (2.3), on obtient

$$\limsup_k u_k - \epsilon \overset{(2.3)}{\leqslant} M_{N''} - \epsilon \leqslant u_n \leqslant M_{N''} \overset{(2.3)}{\leqslant} \limsup_k u_k + \epsilon.$$

Comme $n \geqslant N'' \geqslant N$, le critère de la Proposition 2.35 est vérifié.

Montrons finalement que $\limsup_k u_k$ est un majorant de l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n) (et en est donc le maximum). Soit $a > \limsup_k u_k$ et posons $\epsilon := (a - \limsup_k u_k)/2$. Comme $u_n \leqslant \sup\{u_k \mid k \geqslant n\} = M_n$, on déduit que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$u_n \leqslant M_n \overset{(2.3)}{\leqslant} \limsup_k u_k + \epsilon.$$

Par conséquent, $|a - u_n| \geqslant a - u_n \geqslant a - (\limsup_k u_k + \epsilon) = 2\epsilon - \epsilon = \epsilon$ pour tout $n \geqslant N'$. Il suit que a n'est pas une valeur d'adhérence de la suite (u_n). ☐

Remarque 2.39. *Clairement, il suit qu'une suite bornée est convergente si et seulement si ses limites supérieure et inférieure coïncident.* ◇

Corollaire 2.40 (Théorème de Bolzano–Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une valeur d'adhérence.*

Évidemment, ce résultat n'est plus vrai sans l'hypothèse que la suite est bornée (considérer, par exemple, la suite $u_n := n$).

Démonstration. On a vu que $\limsup_n u_n$ est une valeur d'adhérence. □

- ☐ Toute suite admet une sous-suite convergente.
- ☐ Une suite divergente ne peut pas posséder une sous-suite convergente.
- ☐ Une suite non bornée ne peut pas posséder une sous-suite bornée.
- ☐ Une suite non bornée ne peut pas posséder une sous-suite convergente.
- ☐ Une suite tendant vers $+\infty$ ne peut pas posséder une sous-suite convergente.
- ☐ Si (u_n) est divergente, alors il est possible qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(u_{n+k})_n$ soit convergente.

2.5 Suites de Cauchy

Nous allons à présent voir une autre approche pour démontrer la convergence d'une suite sans déterminer sa limite.

Définition 2.41. *Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est **de Cauchy** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n, m \geqslant N, |u_n - u_m| < \epsilon.$$

Théorème 2.42. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $\ell := \lim_n u_n$. Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$, tel que, pour tout $n \geqslant N$, $|u_n - \ell| < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, pour tout $m, n \geqslant N$, par l'inégalité triangulaire,

$$|u_n - u_m| = |u_n - \ell + \ell - u_m| \leqslant |u_n - \ell| + |\ell - u_m| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$ □

Remarquablement, dans $\mathbb{R}$, l'inverse est aussi vrai !

Théorème 2.43 ($\mathbb{R}$ est un espace métrique **complet**)**.** *Toute suite de Cauchy converge.*

Démonstration. Soit (u_n) une suite de Cauchy. On commence par montrer que (u_n) est bornée. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $m, n \geqslant N$, $|u_n - u_m| < 1$. En prenant $m = N$, on obtient donc $1 > |u_n - u_N| \geqslant |u_n| - |u_N|$, c'est-à-dire $|u_n| \leqslant 1 + |u_N|$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui montre que (u_n) est bien bornée :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leqslant \max\{|u_0|, \ldots, |u_{N-1}|, 1 + |u_N|\}.$$

Par le Corollaire 2.40, on peut trouver un nombre réel $\ell \in \mathbb{R}$ et extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ de sorte que $\lim_n u_{\varphi(n)} = \ell$. Il reste à montrer que $\lim_n u_n = \ell$.

Fixons $\epsilon > 0$. D'une part, la convergence de la suite $(u_{\varphi(n)})$ vers ℓ implique

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, |u_{\varphi(n)} - \ell| < \epsilon/2.$$

D'autre part, la suite étant de Cauchy, on a

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall m, n \geqslant N, |u_n - u_m| < \epsilon/2.$$

Soit $k \geqslant N_0$ tel que $\varphi(k) \geqslant N$. Alors, en combinant les inégalités ci-dessus, on obtient, pour tout $n \geqslant N$,

$$|u_n - \ell| \leqslant |u_n - u_{\varphi(k)}| + |u_{\varphi(k)} - \ell| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$ □

Exercice 2.5

Montrer que le Théorème 2.43 ne s'applique pas à $\mathbb{Q}$ (« $\mathbb{Q}$ n'est pas complet »).

- ☐ Une suite converge vers ℓ si et seulement si elle est de Cauchy et possède une sous-suite convergeant vers ℓ.
- ☐ Une suite de Cauchy n'est pas nécessairement bornée.

Exemple 2.44. Considérons la suite $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Fixons $\epsilon > 0$. Alors, pour tout $n > 1/\epsilon$ et tout $m \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+m} - u_n| = \Big| \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{(-1)^k}{k^2} \Big| \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \frac{1}{k^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{n+m} \Big(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\Big) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+m} \leqslant \frac{1}{n} < \epsilon,$$

où l'on a utilisé (2.1). Ceci montre que la suite (u_n) est de Cauchy et est donc convergente. ◇

Exemple 2.45 (Divergence de la série harmonique). Nous allons montrer que la suite $u_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge (comme elle est croissante, on en déduit alors qu'elle tend vers $+\infty$)[4] ; voir la Figure 2.7. Pour ce faire, nous allons montrer qu'elle n'est pas de Cauchy.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{2k} - u_k = \sum_{i=k+1}^{2k} \underbrace{\frac{1}{i}}_{\geqslant \frac{1}{2k}} \geqslant k \cdot \frac{1}{2k} = \frac{1}{2}.$$

La propriété de Cauchy est donc violée pour tout $\epsilon \leqslant \frac{1}{2}$. ◇

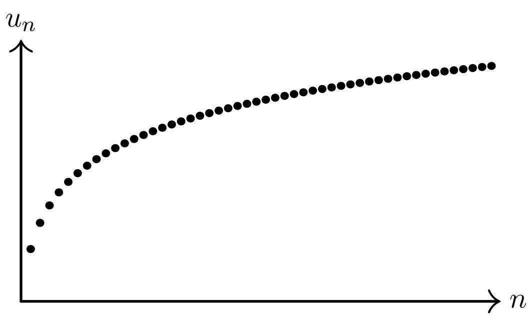


FIGURE 2.7: Les 50 premières sommes partielles de la série harmonique.

⚠ Observez que, dans l'exemple précédent, on a $\lim_n (u_{n+1} - u_n) = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0$. Il est donc essentiel, pour vérifier qu'une suite est de Cauchy, de considérer toutes les paires d'entiers m, n suffisamment grands, et non pas simplement n et $n+1$.

2.6 Exercices supplémentaires

Exercice 2.6

1. Soit (u_n) une suite convergente, de limite ℓ. Montrer que la suite $(|u_n|)$ est également convergente et de limite $|\ell|$.

4. La première preuve connue de ce résultat est due à Nicolas Oresme et remonte à 1360 !

2. **(Critère de d'Alembert pour les suites)** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite telle que $\rho := \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ existe. Démontrer les affirmations suivantes :

a) Si $\rho > 1$, alors la suite (u_n) diverge. De plus, si $u_n > 0$ pour tout n suffisamment grand, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty$.

b) Si $0 \leqslant \rho < 1$, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.

Donner également des exemples de suites $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ pour lesquelles $\rho = 1$ et

c) $\lim_n u_n = \ell \in \mathbb{R}^*$ d) $\lim_n u_n = 0$ e) $\lim_n u_n = +\infty$

f) (u_n) ne tend ni vers une limite finie, ni vers l'infini.

3. Soient $(u_n), (v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites convergeant respectivement vers ℓ et ℓ'. Montrer que la suite $(\max\{u_n, v_n\})$ converge et que sa limite est $\max\{\ell, \ell'\}$.

4. Pour chacune des suites suivantes, déterminer si elle converge et, si c'est le cas, quelle est sa limite.

a) $u_n := \left(\dfrac{2n^3}{n^3-7}\right)^2$ b) $u_n := \left(\dfrac{6n^2-\sqrt{n}}{2n^2+n}\right)^2$ c) $u_n := \sqrt{n+3}-\sqrt{n+1}$

d) $u_n := (-1)^n\,\dfrac{n+5}{n}$ e) $u_n := \dfrac{n(n-1)}{2^n-5}$ f) $u_n := \dfrac{\sqrt{n^2+2}}{2n}$

g) $u_n := \dfrac{n!}{n^n}$ h) $u_n := \dfrac{c^n}{n!}\ (c \in \mathbb{R})$ i) $u_n := (-1)^n\,\dfrac{\sqrt[4]{n}}{\sqrt[3]{n}}$

j) $u_n := \dfrac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 3x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$

5. En utilisant le fait (Exemple 2.26) que $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$, montrer que, pour toute suite $(v_n) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_n v_n = +\infty$,

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{v_n}\right)^{v_n} = e.$$

6. Soit $r, x \in \mathbb{R}$. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie récursivement par $u_0 := x$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_n := 1 + ru_{n-1}$.

a) Trouver une expression explicite pour u_n, $n \geqslant 1$.

b) Déterminer sous quelles conditions (sur r et x), la suite converge et, lorsque c'est le cas, déterminer la limite.

7. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_1 := 3$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} := \frac{u_n+4}{4}$.

a) Exprimer $u_{n+1} - u_n$ en fonction de $u_n - u_{n-1}$ et en conclure que (u_n) est décroissante.

b) Vérifier que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en conclure que la suite est convergente. Déterminer sa limite.

8. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_1 := 0$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} := \frac{3u_n+1}{4}$.

a) Trouver un candidat ℓ pour la limite (en passant à la limite dans la relation de récurrence).

b) Exprimer $|u_{n+1} - \ell|$ en fonction de $|u_n - \ell|$ et conclure que la suite converge vers ℓ.

9. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_1 := \frac{3}{2}$ et, pour $n \geqslant 2$, $u_{n+1} := 1 + \frac{1}{2}u_n^2 - \frac{1}{2}u_n$.

a) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.

b) En déduire que (u_n) est décroissante (en considérant le signe de $u_{n+1} - u_n$).

c) Conclure que (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

10. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_1 := \frac{5}{2}$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} := (u_n^2 + 6)/5$.

a) Montrer que $u_n \in [2, 3]$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que u_n est décroissante.

c) Conclure que u_n converge et calculer sa limite.

11. On considère la suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_1 := 10$ et, pour $n \geqslant 1$, $u_{n+1} := \frac{u_n}{2} + \frac{1}{u_n}$.

a) Montrer que $u_n > \sqrt{2}$ pour tout $n \geqslant 1$.

b) Montrer que u_n est décroissante.

c) Conclure que u_n converge et calculer sa limite.

12. Montrer que la suite définie par $u_1 := 1$ et $u_{n+1} := \frac{7}{3} - \frac{1}{1+u_n}$ converge et déterminer sa limite.

13. Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer si elle converge et, lorsque c'est le cas, déterminer sa limite.

a) $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots$ b) $\sqrt{2}, \sqrt{2\sqrt{2}}, \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}, \ldots$

(Indication : dans les deux cas, commencer par exprimer la suite à l'aide d'une relation de récurrence, puis déterminer si la suite est bornée.)

14. Donner un exemple de suite (u_n) dont l'ensemble A des valeurs d'adhérence satisfait :

a) $A = \{0, 2, \pi\}$ b) $A = \varnothing$ c) $A = \mathbb{N}^*$ d) $A = [0, 1]$

15. Établir les bornes suivantes sur les coefficients binomiaux (e est la constante d'Euler) :

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} \leqslant \left(\frac{en}{k}\right)^k.$$

16. Soient (u_n) et (v_n) deux suites bornées.

a) Montrer que $\liminf_n u_n + \liminf_n v_n \leqslant \liminf_n (u_n + v_n)$.

b) Donner un exemple montrant que l'inégalité du point précédent peut être stricte.

c) On suppose que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n. Montrer que $\liminf_n u_n \leqslant \liminf_n v_n$.

17. Soient $c \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite majorée.

a) On suppose $c \geqslant 0$. Montrer que $\limsup_n (cu_n) = c \limsup_n u_n$.

b) Quelle est l'affirmation correspondante lorsque $c < 0$ et (u_n) est bornée ?

18. **(Théorème de Cesàro)** Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$ et $S_n := u_1 + \cdots + u_n$. Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(\frac{1}{n}S_n)$ converge vers ℓ.

a) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=N}^{n} |u_k - \ell| < \epsilon.$$

b) Montrer que, pour tout $\epsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, il existe $N' \geqslant N$ tel que, pour tout $n \geqslant N'$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N-1} |u_k - \ell| < \epsilon.$$

c) En déduire la convergence de $\frac{1}{n}S_n$ vers ℓ. On dit que la suite (u_n) **converge vers ℓ au sens de Cesàro**.

d) En procédant de façon similaire, montrer que si la suite (u_n) tend vers $+\infty$, alors la suite $\frac{1}{n}S_n$ tend également vers $+\infty$.

e) Donner un exemple de suite divergente qui converge au sens de Cesàro.

19. Le **flocon de von Koch** est la fractale dont la construction est décrite dans la Figure 2.8. Calculer son aire (se souvenir de la série géométrique). Qu'en est-il de son périmètre ?

20. Soit $C \in \mathbb{R}_+^*$ et $(a_{m,n})_{m\in\mathbb{N},n\in\mathbb{N}}$ une collection de nombres réels satisfaisant $a_{m,n} \leqslant C$ pour tout $m, n \in \mathbb{N}$.

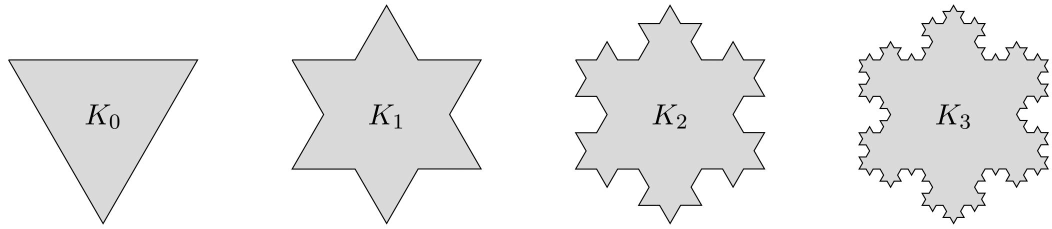


FIGURE 2.8: Les 4 premières étapes de la construction du flocon de von Koch. Soit K_0 un triangle équilatéral de côté 1 (y compris son intérieur). K_1 est obtenu en centrant sur chaque segment du bord de K_0 un triangle équilatéral de côté $1/3$. K_n est obtenu en centrant sur chaque segment du bord de K_{n-1} un triangle équilatéral de côté $1/3^n$. Le flocon est la figure obtenue en itérant cette procédure une infinité de fois.

a) Donner un exemple tel que $\lim\limits_{m\to\infty}\lim\limits_{n\to\infty} a_{m,n} \neq \lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{m\to\infty} a_{m,n}$.

b) En supposant que $a_{m,n} \leqslant a_{m',n'}$ pour tout $m \leqslant m'$ et $n \leqslant n'$, montrer que

$$\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \sup\{a_{m,n} \mid m,n \in \mathbb{N}\}.$$

21. (**Lemme de Fekete ou lemme sous-additif**) Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est **sous-additive** si $u_{n+m} \leqslant u_n + u_m$ pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$. Soit (u_n) une suite sous-additive et minorée. Le but de cet exercice est de montrer que la suite $(\frac{u_n}{n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$.

a) Montrer que $\ell := \inf_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{u_n}{n}$ est bien défini.

b) On fixe $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{u_m}{m} < \ell + \epsilon$.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire $n = km + r$ avec $k, r \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant r < m$. Montrer que $n\ell \leqslant u_n \leqslant k u_m + u_r$.

d) En déduire que $\ell \leqslant \liminf_n \frac{u_n}{n} \leqslant \limsup_n \frac{u_n}{n} \leqslant \frac{u_m}{m} < \ell + \epsilon$. Conclure.

22. Soit $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite décroissante convergeant vers 0 et soit $u_n := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k v_k$.

a) Montrer que, pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - v_{n+1} + v_{n+2} - v_{n+3} + \cdots + (-1)^k v_{n+k} \leqslant v_n$.

b) En déduire que la suite (u_n) est de Cauchy et est donc convergente.

c) Montrer que la suite $w_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ converge. (Vous verrez plus tard que la limite est $\log 2$.)

23. Soit $(v_k) \in [-1,1]^{\mathbb{N}}$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{v_k}{k!}$ est convergente.

(Indication : Commencer par montrer que, $\forall n \geqslant 1, \forall M \geqslant n, \sum_{k=n}^{M} 1/k! \leqslant 2/n!$.)

24. Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$ avec $a < b$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) récursivement par $u_0 := a$, $v_0 := b$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} := \sqrt{u_n v_n}$ et $v_{n+1} := \frac{1}{2}(u_n + v_n)$.

a) Montrer que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. En déduire que $u_n \leqslant v_n$ pour tout n.

b) Montrer que (u_n) est croissante et (v_n) décroissante.

c) Montrer que $0 \leqslant v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$. En déduire que (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont la même limite. Celle-ci est appelée la **moyenne arithmético-géométrique** de a et b.

25. (**Théorème du point fixe de Banach**) Soient $a < b$ deux réels, $f : [a,b] \to [a,b]$ et $\lambda \in (0,1)$. On suppose que f est **contractante** : pour tout $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda |x - y|$. Le but de cet exercice est de montrer que f possède un unique point fixe : $\exists! x_* \in [a,b]$, $f(x_*) = x_*$.
On fixe $u_0 \in [a,b]$ et on considère la suite définie récursivement par $u_n := f(u_{n-1})$ lorsque $n \geqslant 1$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leqslant \lambda^n |u_1 - u_0|$.

b) En utilisant le point précédent, montrer que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $|u_{n+m} - u_n| \leqslant \frac{\lambda^n}{1-\lambda}|u_1 - u_0|$. En déduire que la suite (u_n) converge vers une limite $\ell \in [a, b]$.

c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f(\ell) - \ell| \leqslant |f(\ell) - f(u_n)| + |u_{n+1} - \ell|$. En déduire que $f(\ell) = \ell$, ce qui montre l'existence d'un point fixe.

d) Supposer que x_* et y_* soient deux points fixes. Montrer que $|x_* - y_*| \leqslant \lambda |x_* - y_*|$ et donc que $x_* = y_*$.

3 Fonctions continues

Dans ce chapitre, nous allons introduire la notion de continuité pour des fonctions définies sur un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$, puis étudier les propriétés de telles fonctions. La définition moderne de la continuité n'a été introduite qu'en 1817, par Bolzano, bien que plusieurs définitions alternatives beaucoup plus restrictives aient été proposées plus tôt.

3.1 Limite d'une fonction en un point

Étant donné un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$, nous dirons que $x_0 \in \mathbb{R}$ est un **point limite** de E si

$$\forall \epsilon > 0, \exists x \in E, 0 < |x - x_0| < \epsilon.$$

En d'autres termes, x_0 est un point limite de E si l'on peut trouver une suite d'éléments de E tous distincts de x_0 et convergeant vers x_0.

Définition 3.1. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$ et x_0 un point limite de E. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ **tend vers ℓ en x_0** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big].$$

Dans ce cas, on écrira $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

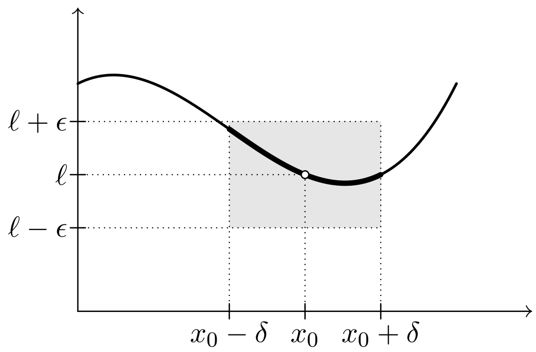


FIGURE 3.1: La limite de f en x_0 est égale à ℓ : pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que le graphe de f au-dessus de $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\}$ soit inclus dans la région grisée. La valeur de f en x_0 n'intervient pas (en fait x_0 peut ne pas appartenir au domaine de définition de f).

Remarque 3.2. ▷ *Lorsque $x_0 \notin E$, il est nécessaire de supposer que x_0 est un point limite de E afin de garantir qu'on puisse trouver des points de E arbitrairement près de x_0. En particulier, chercher à déterminer la limite d'une fonction en un point à distance strictement positive de son domaine de définition n'a pas de sens ; par exemple, on ne peut pas étudier la limite de $\sqrt{x^2-1}$ en $x=0$.*

▷ *Même lorsque $x_0 \in E$, ni l'existence ni la valeur de la limite ne dépendent de la valeur de $f(x_0)$.*

▷ *La limite de f en x_0 est une propriété locale : elle ne dépend que du comportement de f « au voisinage de x_0 ».*

▷ *On vérifie aisément que, lorsqu'elle existe, la limite de f en x_0 est toujours unique.* ◇

Exemple 3.3. On considère la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$, définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrons que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$,

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}.$$

Soit $\epsilon > 0$. Supposons $x_0 > 0$. Posons $\delta := \epsilon\sqrt{x_0} > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| = |\sqrt{x} - \sqrt{x_0}|\frac{|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}|}{|\sqrt{x}+\sqrt{x_0}|} = \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \leqslant \frac{|x-x_0|}{\sqrt{x_0}} < \epsilon.$$

Dans le cas où $x_0 := 0$, on peut prendre $\delta := \epsilon^2 > 0$, puisqu'alors, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $|x| < \delta$,

$$|\sqrt{x} - \sqrt{0}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} = \epsilon.$$ ◇

Nous utiliserons à de nombreuses reprises le résultat élémentaire suivant.

Exercice 3.1

Soit $E, F \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in E$, $y_0 \in F$ et $\ell \in \mathbb{R}$. Soit $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$ telles que

▷ $\forall x \in E \setminus \{x_0\}$, $f(x) \neq y_0$;

▷ $\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0$;

▷ $\lim_{y\to y_0} g(y) = \ell$.

Montrer que $\lim_{x\to x_0} g\big(f(x)\big) = \ell$.

La proposition suivante fournit une définition alternative de la limite d'une fonction en un point et se révèle utile en pratique.

Proposition 3.4. *Soit $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ et x_0 un point limite de E. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

(i) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

(ii) Pour toute suite $(u_n) \in (E \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = \ell$.

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit $(u_n) \in (E \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0. Fixons $\epsilon > 0$. D'une part, puisque $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E \setminus \{x_0\}$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - \ell| < \epsilon$. D'autre part, puisque $u_n \to x_0$, il existe N tel que $|u_n - x_0| < \delta$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc $|f(u_n) - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$.

(ii) $\Rightarrow$ (i). On procède par contraposition. Supposons donc que f ne tende pas vers ℓ en x_0. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver $x_\delta \in E$ satisfaisant $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ et $|f(x_\delta) - \ell| > \epsilon$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := x_{1/n}$. On a alors $0 < |u_n - x_0| < 1/n$ et $|f(u_n) - \ell| > \epsilon$. On a ainsi construit une suite $(u_n) \in (E \setminus \{x_0\})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0, mais pour laquelle $f(u_n)$ ne converge pas vers ℓ. □

Il suit aisément des Propositions 2.11 et 3.4 que la limite d'une fonction en un point se comporte bien vis-à-vis des opérations arithmétiques. La preuve est laissée en exercice :

Exercice 3.2

Soient $E \subset \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathbb{R}$ un point limite de E. Soient $f, g : E \to \mathbb{R}$ telles que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell'$. Démontrer les affirmations suivantes.

a) $\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \ell + \ell'$.

b) $\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = \ell \cdot \ell'$.

c) Si $\ell' \neq 0$, $\lim_{x \to x_0} (f/g)(x) = \ell/\ell'$.

Exemple 3.5. Les cas les plus intéressants sont lorsque l'on obtient des formes indéterminées (dans les deux exemples ci-dessous, du type $\frac{0}{0}$).

- Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x^2-1}{x-1}$. Puisque $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$, on observe que $f(x) = x + 1$ pour tout $x \neq 1$. Par conséquent, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$.
- Soit $f : [-1, 0) \cup (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \big(\sqrt{1+x} - 1\big)/x$ et $x_0 = 0$. Alors,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + 1}{\sqrt{1+x} + 1} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt{1+x} + 1} = \frac{1}{2},$$

où la dernière égalité suit de l'Exercice 3.1 et de l'Exemple 3.3. ◇

La Proposition 3.4 fournit également une approche pour démontrer qu'une fonction n'admet *pas* de limite en un point x_0 : il suffit de construire deux suites (u_n) et (v_n) convergeant vers x_0 et telle que les suites $(f(u_n))$ et $(f(v_n))$ ne possèdent pas la même limite.

Exemple 3.6. La fonction **signe**, définie par

$$\operatorname{sign}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0. Il suffit en effet de considérer $u_n := 1/n$ et $v_n := -1/n$, puisque $\lim_n f(u_n) = 1$ et $\lim_n f(v_n) = -1$. ◇

Exemple 3.7. Considérons la fonction $f : (0, 1] \to \mathbb{R}$ définie de la façon suivante. On pose d'abord $f(\frac{1}{2n}) := 0$ et $f(\frac{1}{2n-1}) := 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On procède ensuite à une **interpolation linéaire** entre ces points : on pose $f(x) := (2n-1)(2nx-1)$ pour chaque $x \in (\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1})$ et $f(x) := (2n+1)(1-2nx)$ pour chaque $x \in (\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n})$ (voir la Figure 3.2).

La fonction f ainsi construite n'admet pas de limite en 0. Pour le voir, il suffit considérer les suites $u_n := \frac{1}{2n}$ et $v_n := \frac{1}{2n-1}$. ◇

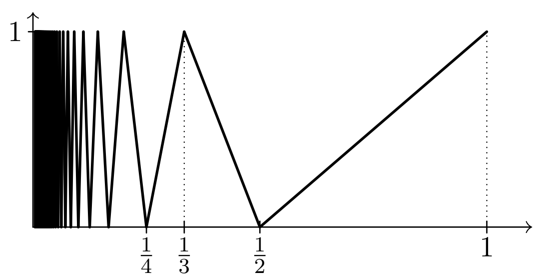


FIGURE 3.2: La fonction de l'Exemple 3.7.

L'exercice suivant fournit un analogue du théorème des gendarmes.

Exercice 3.3

Soient $E \subset \mathbb{R}$, x_0 un point limite de E et $f, g, h : E \to \mathbb{R}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes :

(i) il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \in E$ tel que $0 < |x - x_0| < \epsilon$,

(ii) $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = \ell$.

Montrer que g possède une limite en x_0 et que $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell$.

3.2 Convergence à l'infini et divergence vers l'infini

Définition 3.8 (Convergence à l'infini).

- *Soit E tel que $[m, +\infty) \subset E$ pour un $m \in \mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f* ***converge vers ℓ en $+\infty$*** *si*
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \big[x > N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big].$$
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.
- *Soit E tel que $(-\infty, m] \subset E$ pour un $m \in \mathbb{R}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que f* ***converge vers ℓ en $-\infty$*** *si*
$$\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \big[x < N \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big].$$
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$.
- *Dans les deux cas, on dit que la droite $y = \ell$ est une* ***asymptote horizontale*** *au graphe de f.*

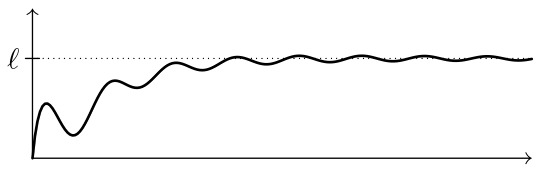


FIGURE 3.3: Fonction tendant vers ℓ en $+\infty$.

Les propriétés listées dans l'Exercice 3.2 s'étendent immédiatement aux limites en $\pm\infty$. La vérification est laissée en exercice.

Définition 3.9 (Divergence vers l'infini). *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et x_0 un point limite de E.*

- *On dit que f* ***tend vers $+\infty$ en x_0*** *si*
$$\forall M, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\big].$$
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$.
- *On dit que f* ***tend vers $-\infty$ en x_0*** *si*
$$\forall M, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < M\big].$$
Dans ce cas, on écrit $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.
- *Dans les deux cas, on dit que la droite $x = x_0$ est une* ***asymptote verticale*** *au graphe de f.*

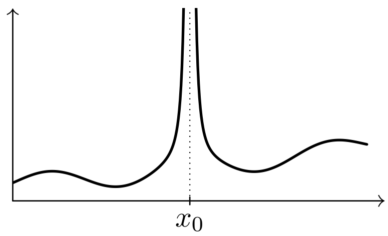


FIGURE 3.4: Une fonction tendant vers $+\infty$ en x_0.

Exemple 3.10. La fonction $x \mapsto 1/x^2$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, tend vers l'infini en 0, mais la fonction $x \mapsto 1/x$, de $\mathbb{R}^*$ dans $\mathbb{R}$, ne tend pas vers l'infini en 0. ◇

Définition 3.11. *Soit E tel que $[m, +\infty) \subset E$ pour un $m \in \mathbb{R}$.*

- *On dit que f **tend vers $+\infty$ en $+\infty$** si*

$$\forall M, \exists N \in \mathbb{R}, \forall x \in E, \big[x > N \Rightarrow f(x) > M\big].$$

Dans ce cas, on écrit $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

- *On définit de façon analogue $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.*

Exemple 3.12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons la fonction polynomiale $P(x) \coloneqq a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, avec $a_n > 0$. Alors, pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$P(x) = \big(a_0 x^{-n} + a_1 x^{-n+1} + \cdots + a_{n-1} x^{-1} + a_n\big) x^n \geqslant \left(a_n - \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{x}\right) x^n.$$

En particulier, pour tout $x \geqslant 1$ tel que $x \geqslant 2\big(|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|\big)/a_n$, on a $P(x) \geqslant \frac{1}{2} a_n x^n \geqslant \frac{1}{2} a_n x$. Par conséquent,

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty.$$

On montre que

$$\lim_{x\to-\infty} P(x) = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

en procédant de façon similaire. Finalement, les affirmations correspondantes dans le cas où $a_n < 0$ peuvent être déduites des précédentes en considérant la fonction $Q \coloneqq -P$. ◇

3.3 Continuité

Formulé de façon informelle, une fonction f est continue en x_0 si $f(y)$ est « arbitrairement proche » de $f(x_0)$ pourvu que y soit pris « suffisamment proche » de x_0.

Définition 3.13.

- *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in E$. La fonction f est **continue en x_0** si f tend vers $f(x_0)$ en x_0, c'est-à-dire, de façon explicite,*[1]

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon\big].$$

- *Si f n'est pas continue en x_0, on dit qu'elle est **discontinue en x_0**.*
- *Si f est continue en chaque $x_0 \in E$, on dit que f est **continue sur E**. L'ensemble des fonctions $f : E \to \mathbb{R}$ continues sur E est noté $\mathscr{C}^0(E)$.*

Remarque 3.14. ▷ *Lorsqu'une fonction est continue sur tout son domaine de définition, on dit parfois simplement qu'elle est continue.*

▷ *Remarquons à nouveau que la continuité en un point x_0 est une propriété locale de la fonction.* ◇

Exemple 3.15. ▷ Soit $c \in \mathbb{R}$. La fonction constante $x \mapsto c$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

▷ La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$ est continue en tout point de $\mathbb{R}$. ◇

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction discontinue en x_0.

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \big[|f(x) - f(x_0)| < \epsilon \Rightarrow |x - x_0| > \delta\big]$.

☐ $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \big[|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| > \epsilon\big]$.

☐ $\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x \in \mathbb{R}, \big[|x - x_0| < \delta \ \wedge\ |f(x) - f(x_0)| \geqslant \epsilon\big]$.

☐ $\exists n \in \mathbb{N}^*, \forall m \in \mathbb{N}^*, \exists x \in \mathbb{R}, \big[|x - x_0| < 1/m \ \wedge\ |f(x) - f(x_0)| \geqslant 1/n\big]$.

☐ $\exists \epsilon > 0, \exists (u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \big[\lim_n u_n = x_0 \ \wedge\ \lim_n |f(u_n) - f(x_0)| \geqslant \epsilon\big]$.

Remarque 3.16. *Il suit immédiatement de la Proposition 3.4 que f est continue en x_0 si et seulement si $f(u_n) \to f(x_0)$ pour toute suite (u_n) convergeant vers x_0. En particulier, si f est continue en x_0 et si la suite (u_n) converge vers x_0, alors*

$$\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big).$$

Ainsi, lorsque f est continue en x_0, on peut permuter les opérations « passage à la limite » et « évaluation de la fonction ». ◇

☐ Si f n'est pas continue en x_0, alors il n'existe pas de suite (u_n) convergeant vers x_0 telle que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$.

☐ S'il existe une suite (u_n) convergeant vers x_0 pour laquelle $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$, alors f est continue en x_0.

☐ Si f n'est pas continue en x_0, alors il existe une suite (u_n) convergeant vers x_0 pour laquelle $\lim_{n\to\infty} f(u_n) \neq f(x_0)$.

☐ Si $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe et si $f(x_0)$ existe, alors f est continue en x_0.

Exemple 3.17. Soit $a \in \mathbb{R}$, $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite définie récursivement par $u_0 := a$ et $u_{n+1} := f(u_n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Supposons que $\lim_{n\to\infty} u_n = \ell$. Alors, puisque $u_{n+1} - f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suit de la Remarque 3.16 que

$$0 = \lim_{n\to\infty} \big(u_{n+1} - f(u_n)\big) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - \lim_{n\to\infty} f(u_n) = \lim_{n\to\infty} u_{n+1} - f\big(\lim_{n\to\infty} u_n\big) = \ell - f(\ell).$$

Ainsi, lorsqu'elle existe, la limite d'une telle suite satisfait nécessairement $\ell = f(\ell)$. ◇

Exemple 3.18. La **fonction caractéristique des rationnels**, $\chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$\chi_{\mathbb{Q}}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

est discontinue en chaque point $x_0 \in \mathbb{R}$. En effet, si $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, on peut considérer une suite $(u_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 (une telle suite existe puisque $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$) ; on a alors $\lim_n \chi_{\mathbb{Q}}(u_n) = 1 \neq \chi_{\mathbb{Q}}(x_0)$. On procède de façon similaire lorsque $x_0 \in \mathbb{Q}$ (en considérant une suite d'irrationnels convergeant vers x_0). ◇

1. Observez que l'on n'a pas imposé $0 < |x - x_0|$ comme on l'avait fait auparavant. La raison est que lorsque $x = x_0$, la condition $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ est trivialement satisfaite.

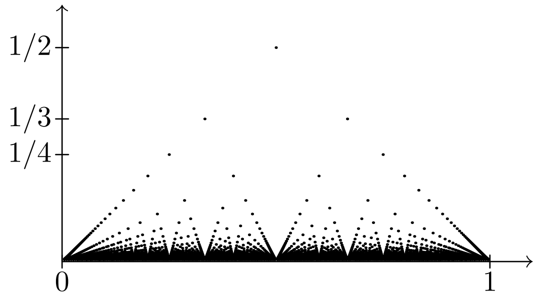


FIGURE 3.5: La fonction de Thomae, introduite dans l'Exercice 3.4, est discontinue en chaque rationnel, mais continue en chaque irrationnel.

Exercice 3.4

On considère la **fonction de Thomae** $T : (0,1) \to \mathbb{R}$ définie par (voir la Figure 3.5)

$$T(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

où la fraction $\frac{p}{q}$ est supposée irréductible. Le but de cet exercice est de montrer que T est continue en $x_0 \in (0,1)$ si et seulement si x_0 est irrationnel. [2]

a) Soit $x_0 \in (0,1)$ rationnel. Construire une suite $(u_n) \in (0,1)^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x_0 et telle que $T(x_0) \neq \lim_{n\to\infty} T(u_n)$. En conclure que T est discontinue en x_0.

b) Pour $\epsilon > 0$ fixé, montrer que l'ensemble $\mathcal{B}_\epsilon := \{x \in (0,1) \,|\, T(x) \geqslant \epsilon\}$ ne contient qu'un nombre fini de points. En déduire que T est continue en tout $x_0 \in (0,1)$ irrationnel.

Les propositions suivantes montrent que la notion de continuité se comporte bien vis-à-vis des opérations arithmétiques et de la composition de fonctions.

Proposition 3.19. *Soient f et g deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$ continues en x_0. Alors, $f+g$, $f \cdot g$ et, si $g(x_0) \neq 0$, f/g sont continues en x_0.*

Démonstration. C'est une conséquence directe de l'Exercice 3.2. □

Exemple 3.20. ▷ Il suit de la Proposition 3.19 et de l'Exemple 3.15 que les fonctions monomiales $x \mapsto x^n$, $n \in \mathbb{N}$, sont des fonctions continues en tout point de $\mathbb{R}$.

▷ Il suit de la Proposition 3.19 et du point précédent que les fonctions polynomiales sont continues en tout point de $\mathbb{R}$.

▷ Il suit de la Proposition 3.19 et du point précédent que les fonctions rationnelles sont continues en tout point de leur domaine de définition. ◇

Proposition 3.21 (Composition de fonctions continues)**.** *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$, avec $E, F \subset \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in E$. Si f est continue en x_0 et g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0. Par conséquent, si $f : E \to F$ et $g : F \to \mathbb{R}$ sont continues, alors $g \circ f : E \to \mathbb{R}$ est continue.*

Démonstration. On utilise la caractérisation de la Remarque 3.16. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers x_0. La continuité de f en x_0 implique alors que $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(x_0)$. La suite $(f(u_n)) \in F^{\mathbb{N}}$ converge donc vers $f(x_0)$. La continuité de g en $f(x_0)$ implique alors que $\lim_{n\to\infty} g(f(u_n)) = g(f(x_0))$, ce qui montre que $g \circ f$ est continue en x_0. □

2. Il est intéressant de noter qu'il n'est par contre pas possible de construire une fonction qui soit continue sur les rationnels et discontinue sur les irrationnels. Une preuve élémentaire de ce fait a été donnée par Volterra en 1881 alors qu'il était encore étudiant à la *Scuola Normale Superiore* de Pise. Une présentation de sa preuve peut être trouvée dans la Section B.3.

Remarque 3.22. *Si la composition de deux fonctions continues est continue, la composition de deux fonctions discontinues n'est pas nécessairement discontinue. Par exemple, les fonctions*

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \leqslant 0, \\ x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

sont toutes deux discontinues en 0*, mais* $g \circ f(x) = 1$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *et est donc continue.* ◇

- ☐ Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est convergente, alors $\limsup_n f(u_n) = f(\limsup_n u_n)$.
- ☐ Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est majorée, alors $\limsup_n f(u_n) = f(\limsup_n u_n)$.
- ☐ Si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ est croissante et $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, alors $\limsup_n f(u_n) = f(\limsup_n u_n)$.

3.4 Maximum et minimum d'une fonction continue

Dans cette section, on va s'intéresser aux propriétés d'une fonction continue définie sur un intervalle **fermé** et **borné** (on dit aussi **compact**), c'est-à-dire de la forme $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ deux réels.

Définition 3.23. *Soient* $E \subset \mathbb{R}$*,* $f : E \to \mathbb{R}$ *et* $x_0 \in E$*.*

- ▷ *La fonction* f *est* ***majorée*** *(resp.* ***minorée***, ***bornée****) si l'ensemble* $\{f(x) \mid x \in E\}$ *est majoré (resp. minoré, borné).*
- ▷ *La fonction* f ***atteint son maximum en*** $\boldsymbol{x_0}$ *(ou* ***admet un maximum en*** $\boldsymbol{x_0}$*) si*

$$\forall x \in E, f(x) \leqslant f(x_0).$$

- ▷ *La fonction* f ***atteint son minimum en*** $\boldsymbol{x_0}$ *(ou* ***admet un minimum en*** $\boldsymbol{x_0}$*) si*

$$\forall x \in E, f(x) \geqslant f(x_0).$$

Lorsque $F \subset E$ et f est majorée, on écrira $\sup_F f \equiv \sup_{x \in F} f(x) := \sup \{f(x) \mid x \in F\}$. Lorsque $F = E$ on écrira simplement $\sup f \equiv \sup_E f$. On fera de même pour l'infimum, le maximum et le minimum (lorsque ces quantités existent).

Théorème 3.24. *Toute fonction* $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ *est bornée et admet un maximum et un minimum.*

Il est bien entendu possible que le minimum et/ou le maximum soit atteint sur le bord de l'intervalle.

Démonstration. Montrons d'abord que f est majorée. On procède par l'absurde. Supposons donc que f ne soit pas majorée. Dans ce cas, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $u_n \in [a, b]$ tel que $f(u_n) > n$. Or, la suite (u_n) est bornée et il suit donc du Théorème de Bolzano–Weierstrass que l'on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ qui converge vers un point $x_0 \in [a, b]$. On a alors, par continuité de f,

$$f(x_0) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{f(u_{\varphi(n)})}_{> \varphi(n)} = +\infty,$$

ce qui est absurde. On montre de la même façon que f est minorée.

Montrons à présent que f admet un maximum. Soit $S := \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ (qui existe puisque f est bornée). Par le Lemme 1.12, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver $v_n \in [a, b]$ tel que

$$S - \frac{1}{n} \leqslant f(v_n) \leqslant S.$$

En particulier, $\lim_{n\to\infty} f(v_n) = S$. À nouveau, par le théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(v_{\varphi(n)})$ convergeant vers un point $x^* \in [a,b]$. On a alors, par continuité de f,

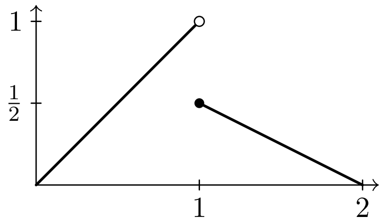
$$f(x^*) = \lim_{n\to\infty} f(v_{\varphi(n)}) = S,$$

ce qui montre que f atteint son maximum en x^*. On procède de la même façon pour le minimum. □

Exemple 3.25. Les contre-exemples suivants illustrent l'importance des hypothèses dans le théorème précédent.

▷ (Fonction définie sur $[a,b]$, mais non continue.) La fonction $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ définie par

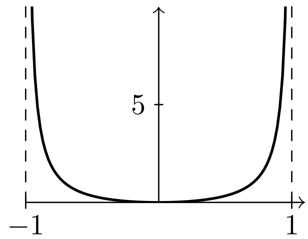
$$f(x) := \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1), \\ 1 - \frac{x}{2} & \text{si } x \in [1,2] \end{cases}$$



n'admet pas de maximum.

▷ (Fonction continue sur un intervalle borné mais ouvert.) La fonction $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ définie par

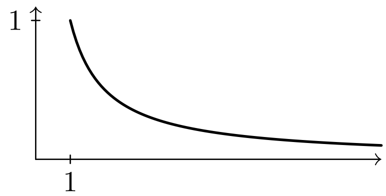
$$f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$$



n'admet pas de maximum.

▷ (Fonction continue sur un intervalle fermé, mais pas borné.) La fonction $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) := \frac{1}{x}$$



n'admet pas de minimum. ◇

3.5 Théorème des valeurs intermédiaires

En dépit de son caractère intuitif, le résultat suivant joue un rôle essentiel en analyse. La première preuve en a été donnée par Bolzano en 1817.

Théorème 3.26 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ telle que $f(a) < f(b)$. Alors, pour tout $h \in \big(f(a), f(b)\big)$, il existe $x \in (a,b)$ tel que $f(x) = h$.*

Démonstration. Nous allons construire récursivement deux suites adjacentes dont la limite commune aura la propriété souhaitée. On dit que l'on procède par **dichotomie** (voir également la Figure 3.7).

1. On pose $u_0 := a$ et $v_0 := b$. Il suit des hypothèses que $f(u_0) < h < f(v_0)$.

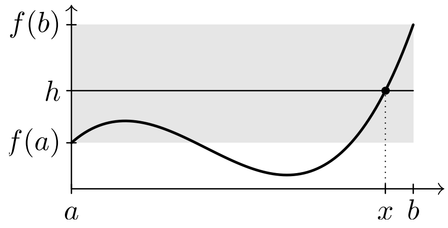


FIGURE 3.6: Le théorème des valeurs intermédiaires affirme que chaque droite horizontale $y = h$ avec $h \in [f(a), f(b)]$ intersecte le graphe de f au-dessus de $[a, b]$ en au moins un point.

2. Supposons que u_n et v_n aient déjà été définis et satisfont $u_n < v_n$ et $f(u_n) \leqslant h \leqslant f(v_n)$. Soit $w_n \coloneqq (u_n + v_n)/2$ le point milieu entre u_n et v_n. Nous définissons alors u_{n+1} et v_{n+1} de la façon suivante :

   ▷ si $f(w_n) \geqslant h$, alors $u_{n+1} \coloneqq u_n$ et $v_{n+1} \coloneqq w_n$;

   ▷ si $f(w_n) < h$, alors $u_{n+1} \coloneqq w_n$ et $v_{n+1} \coloneqq v_n$.

   Observez que l'on a alors nécessairement $u_{n+1} < v_{n+1}$ et $f(u_{n+1}) \leqslant h \leqslant f(v_{n+1})$.

Il suit de cette construction que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

▷ $a = u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0 = b$,

▷ $v_n - u_n = \frac{1}{2}(v_{n-1} - u_{n-1}) = \frac{1}{2^2}(v_{n-2} - u_{n-2}) = \cdots = \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0) = \frac{1}{2^n}(b - a)$,

▷ $f(u_n) \leqslant h \leqslant f(v_n)$.

Les deux premières propriétés impliquent que (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes, minorées par a et majorées par b. Par conséquent, celles-ci convergent vers une limite commune $x \in [a, b]$. La troisième propriété et la continuité de f impliquent alors que

$$h \leqslant \lim_{n\to\infty} f(v_n) = f(x) = \lim_{n\to\infty} f(u_n) \leqslant h.$$

On a donc bien $f(x) = h$. □

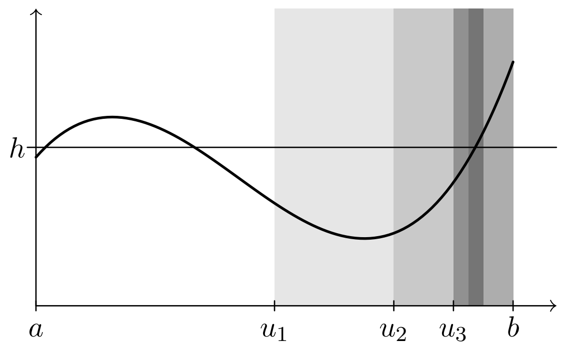


FIGURE 3.7: La construction par dichotomie dans la preuve du Théorème 3.26. Les intervalles successifs (nécessairement emboîtés) $[u_n, v_n]$, pour $1 \leqslant n \leqslant 5$, sont indiqués en nuances de gris de plus en plus foncées. u_1, u_2 et u_3 sont indiqués explicitement et $v_1 = v_2 = v_3 = b$.

Remarque 3.27. *La conclusion du Théorème 3.26 n'est plus vraie, en général, si l'on remplace l'ensemble des nombres réels par $\mathbb{Q}$. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \mapsto x^2 - 2$ est continue sur $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ et vérifie $f(0) = -2$, $f(2) = 2$, mais il n'y a pas de rationnel q tel que $f(q) = 0$.* ◇

Remarque 3.28. *Il a fallu attendre la formalisation du concept de continuité au XIXᵉ siècle pour que soit réellement compris le lien entre cette propriété et la propriété des valeurs intermédiaires (c'est-à-dire, celle de satisfaire la conclusion du Théorème 3.26). Pour se rendre compte à quel point ces deux notions sont distinctes, mentionnons qu'on peut construire des exemples de fonctions possédant la propriété des valeurs intermédiaires sur chaque intervalle de $\mathbb{R}$ tout en n'étant continues nulle part.* ◇

- ☐ À un moment de votre vie, votre taille a été de 90cm exactement.
- ☐ À chaque instant, il existe deux points diamétralement opposés le long de l'équateur auxquels la température est identique.

Voyons à présent quelques conséquences de ce théorème.

Corollaire 3.29. *Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois.*

Démonstration. Considérons la fonction polynomiale $P(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$, avec n impair et $a_n \neq 0$. Sans perte de généralité, on supposera que $a_n > 0$. P étant de degré impair, il suit de l'Exemple 3.12 que

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

En particulier, on peut trouver $K \in \mathbb{R}$ tel que $P(-K) < 0 < P(K)$. En appliquant le théorème des valeurs intermédiaires à l'intervalle $[-K, K]$ et avec $h = 0$, on conclut à l'existence de $x \in [-K, K]$ tel que $P(x) = 0$ (voir la Figure 3.8). ☐

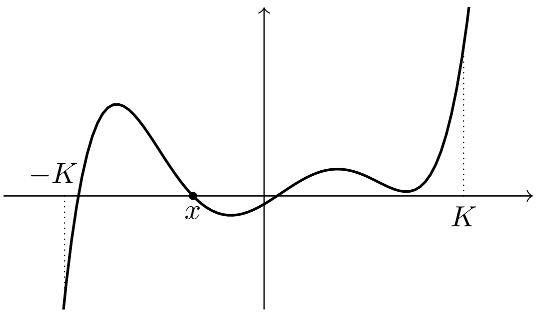


FIGURE 3.8: Toute fonction polynomiale de degré impair s'annule au moins une fois (ici trois).

Corollaire 3.30. *Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Alors, $f([a,b])$ est un intervalle fermé et borné.*

Démonstration. Par le Théorème 3.24, f atteint son maximum et son minimum : il existe $x_*, x^* \in [a,b]$ tels que

$$f(x_*) = \min_{x\in[a,b]} f(x) \qquad \text{et} \qquad f(x^*) = \max_{x\in[a,b]} f(x).$$

Si $f(x_*) = f(x^*)$, alors f est constante et $f([a,b]) = \{f(x_*)\}$ qui est un intervalle fermé et borné. Sinon, on a nécessairement $x_* \neq x^*$; on supposera, sans perte de généralité, que $x_* < x^*$. Soit $h \in [f(x_*), f(x^*)]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in [x_*, x^*]$ tel que $f(x) = h$. Par conséquent, $[f(x_*), f(x^*)] \subset f([a,b])$. Comme $f([a,b]) \subset [f(x_*), f(x^*)]$ par définition du minimum et du maximum, on en conclut que $f([a,b]) = [f(x_*), f(x^*)]$ et ce dernier est bien un intervalle fermé et borné (*cf.* Figure 3.9). ☐

Remarque 3.31. *Le résultat précédent montre que l'image d'un intervalle fermé borné par une fonction continue est toujours un intervalle fermé borné. Les deux hypothèses sont importantes.*

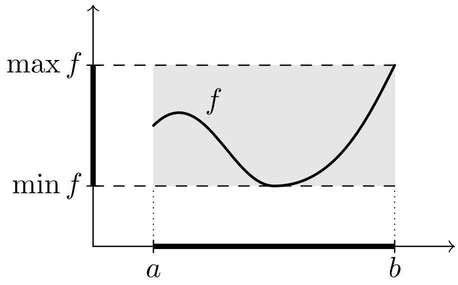


FIGURE 3.9: L'image de l'intervalle fermé borné $[a, b]$ sous l'application continue f est l'intervalle fermé borné $[\min f, \max f]$.

▷ *L'image par une application continue d'un intervalle fermé n'est pas nécessairement fermée : la fonction* $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2/(1 + x^2)$, *envoie l'intervalle fermé* $[1, +\infty)$ *sur l'intervalle* $[\frac{1}{2}, 1)$ *qui n'est pas fermé.*

▷ *L'image par une application continue d'un intervalle borné n'est pas nécessairement bornée : la fonction* $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1/(1 - x^2)$, *envoie l'intervalle borné* $(-1, 1)$ *sur l'intervalle non borné* $[1, +\infty)$. ◇

La conséquence suivante, également élémentaire, fournit à nouveau un outil dont les généralisations se révèlent essentielles dans de nombreux domaines des mathématiques.

Corollaire 3.32 (Théorème du point fixe de Brouwer)**.** *Soit* $f : [a, b] \to [a, b]$ *une fonction continue. Alors,* f *admet au moins un point fixe, c'est-à-dire*

$$\exists x \in [a, b] \text{ tel que } x = f(x).$$

Démonstration. Observons tout d'abord qu'il n'y a rien à démontrer si $a = f(a)$ ou $b = f(b)$. On peut donc supposer que

$$f(a) > a \qquad \text{et} \qquad f(b) < b.$$

Or, ceci implique que la fonction continue $g(x) = x - f(x)$ satisfait $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $x \in [a, b]$ tel que $g(x) = 0$ (*cf.* Figure 3.10). □

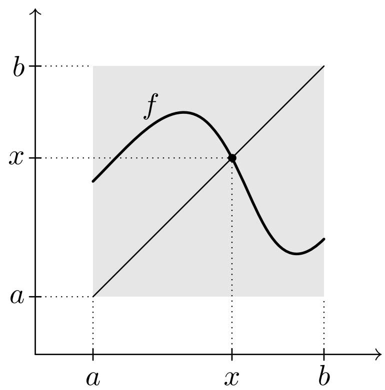


FIGURE 3.10: Le point fixe x de la fonction continue $f : [a, b] \to [a, b]$ est donné par l'intersection du graphe de f et de la diagonale (note : le point fixe est ici unique, mais ce n'est pas nécessairement le cas).

3.6 Continuité de la fonction réciproque

Théorème 3.33. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction strictement monotone. Alors, $f : I \to f(I)$ est bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est strictement monotone et continue.*

Démonstration. $f : I \to f(I)$ est surjective par construction et injective de par sa stricte monotonicité ; elle est donc bijective et $f^{-1} : f(I) \to I$ est bien définie. Pour la suite, nous supposons, sans perte de généralité, que f est strictement croissante.

Montrons tout d'abord que f^{-1} est strictement croissante. Soit $x, y \in f(I)$ tels que $x < y$. Notons $u := f^{-1}(x)$ et $v := f^{-1}(y)$. Comme $f(u) = x < y = f(v)$ et f est strictement croissante, on en conclut que $u < v$, c'est-à-dire $f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$.

Montrons finalement que f^{-1} est continue sur $f(I)$. Soit $y_0 \in f(I)$. Nous allons montrer que f^{-1} est continue en y_0.

Fixons $\epsilon > 0$. Soit $x_0 := f^{-1}(y_0)$. On supposera que $x_0 \neq \inf I$ et $x_0 \neq \sup I$ (ces cas sont laissés en exercice). I étant un intervalle, on peut trouver $x_1, x_2 \in I$ tels que

$$x_0 - \epsilon < x_1 < x_0 < x_2 < x_0 + \epsilon.$$

Notons $y_1 := f(x_1)$ et $y_2 := f(x_2)$. f étant strictement croissante, on a $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$, c'est-à-dire $y_1 < y_0 < y_2$. Posons $\delta := \min\{y_0 - y_1, y_2 - y_0\}$. Pour tout $y \in f(I)$ tel que $|y - y_0| < \delta$, on a nécessairement $y_1 < y < y_2$. f^{-1} étant strictement croissante, on en déduit que

$$f^{-1}(y_0) - \epsilon = x_0 - \epsilon < x_1 = f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y) < f^{-1}(y_2) = x_2 < x_0 + \epsilon = f^{-1}(y_0) + \epsilon,$$

c'est-à-dire $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \epsilon$. □

Exemple 3.34 (Continuité des puissances rationnelles). Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a vu que $x \mapsto x^n$ est une fonction strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Il suit donc du théorème précédent que son inverse $x \mapsto x^{1/n}$ est une fonction continue et strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. La fonction $x \mapsto x^m$ étant continue, il suit de la Proposition 3.21 que la fonction $x \mapsto x^{m/n} = (x^{1/n})^m$ de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$ est continue.

La fonction $x \mapsto x^{-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est strictement décroissante. Par conséquent, le Théorème 3.33 implique que sa réciproque est continue. Mais cette fonction est sa propre réciproque, ce qui montre qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. On montre de même qu'elle est continue sur $\mathbb{R}_-^*$, et donc sur $\mathbb{R}^*$.

Finalement, en combinant les deux observations précédentes, il suit à nouveau de la Proposition 3.21 que, pour tout $r \in \mathbb{Q}$, la fonction $x \mapsto x^r$ est une fonction continue de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$. ◇

Remarque 3.35. *Considérons la fonction strictement croissante (et continue)*

$$\begin{aligned} f\colon [0,1] \cup (2,3] &\to [0,2] \\ x &\mapsto \begin{cases} x & \text{si } x \in [0,1], \\ x-1 & \text{si } x \in (2,3]. \end{cases} \end{aligned}$$

On vérifie aisément que f^{-1} n'est pas continue *(en 1). Ceci montre que l'hypothèse du Théorème 3.33 demandant à ce que f soit définie sur un intervalle est essentielle.* ◇

Définition 3.36. *Une fonction $f : E \to F$ est un* ***homéomorphisme*** *si f est continue, bijective et f^{-1} est continue. S'il existe une telle fonction, les ensembles E et F sont dits* ***homéomorphes***.

Exercice 3.5

Soit f une fonction continue et bijective sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer que f est un homéomorphisme. (Indication : montrer que f est strictement monotone et utiliser le Théorème 3.33).

3.7 Continuité uniforme

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Rappelons qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est continue sur E si

$$\forall x \in E, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall y \in E, \big[|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon\big].$$

Cette notion de continuité a le défaut que, pour un ϵ donné, le choix de δ dépend à priori du point $x \in E$ considéré. Dans cette section, nous allons introduire une notion de continuité plus forte, qui se révèlera extrêmement importante pour certains développements ultérieurs.

Définition 3.37. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est* ***uniformément continue*** *si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, y \in E, \big[|y - x| < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \epsilon\big].$$

Remarque 3.38. ▷ *La notion de continuité uniforme est une propriété globale.*

▷ *Une fonction uniformément continue est nécessairement continue.* ◇

Exemple 3.39.

▷ La fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \sqrt{x}$ est uniformément continue. En effet, fixons $\epsilon > 0$ et posons $\delta := \epsilon^2$. Alors, pour tout $0 \leqslant x < y$ tel que $y - x < \delta$, on a

$$\sqrt{y} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{y} - \sqrt{x})(\sqrt{y} + \sqrt{x})}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} = \frac{y - x}{\sqrt{y} + \sqrt{x}} \leqslant \frac{y - x}{\sqrt{y}} \leqslant \frac{y - x}{\sqrt{y - x}} = \sqrt{y - x} < \sqrt{\delta} = \epsilon.$$

▷ Soit $L > 0$. La fonction $f : [-L, L] \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$ est uniformément continue. En effet, fixons $\epsilon > 0$ et posons $\delta := \epsilon/(2L)$. Alors, pour tout $x, y \in [-L, L]$ tels que $|x - y| < \delta$, on a

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |x - y||x + y| < \delta \cdot 2L = \epsilon.$$ ◇

Exemple 3.40. Soit $k > 0$ et $E \subset \mathbb{R}$. Une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est ***k*-lipschitzienne** si

$$\forall x, y \in E, |f(y) - f(x)| \leqslant k|y - x|.$$

Une telle fonction est toujours uniformément continue : pour $\epsilon > 0$, il suffit de prendre $\delta := \epsilon/k$ dans la condition de continuité uniforme.

Par contre, une fonction uniformément continue n'est en général pas lipschitzienne : pour la première fonction de l'Exemple 3.39, on a, pour tout $x > 0$,

$$\frac{|f(x) - f(0)|}{|x - 0|} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

ce qui tend vers l'infini lorsque x tend vers 0. ◇

Remarque 3.41. *Dire que $f : E \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue signifie que*

$$\exists \epsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, y \in E \text{ tels que } |x - y| < \delta \text{ et } |f(x) - f(y)| \geqslant \epsilon. \tag{3.1}$$

En particulier, f n'est pas uniformément continue si et seulement si on peut trouver $\epsilon > 0$ et deux suites (u_n) et (v_n) d'éléments de E telles que

$$\lim_{n \to \infty} u_n - v_n = 0 \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \epsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \tag{3.2}$$

En effet, par (3.1), il existe $\epsilon > 0$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $u_n, v_n \in E$ tels que $|u_n - v_n| < 1/n$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \epsilon$. Réciproquement, soit $\epsilon > 0$ et $(u_n), (v_n)$ comme dans (3.2). Soit $\delta > 0$. Alors, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - v_n| < \delta$ et $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \epsilon$. ◇

Exemple 3.42. On a vu que la fonction $x \mapsto x^2$ est uniformément continue sur $[-L, L]$, pour tout choix de $L > 0$. Montrons que cette fonction *n'est pas* uniformément continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En effet, considérons les suites définies par $u_n \coloneqq n + \frac{1}{n}$ et $v_n \coloneqq n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(v_n)| = 2 + \frac{1}{n^2} \geqslant 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \qquad \diamond$$

Exemple 3.43. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ de $(0, 1)$ dans $\mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue. En effet, considérons les suites définies par $u_n \coloneqq \frac{1}{n}$ et $v_n \coloneqq \frac{1}{n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Alors,

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0 \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(v_n)| = 1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*. \qquad \diamond$$

Les deux exemples précédents montrent qu'une fonction continue n'est pas nécessairement uniformément continue. C'est cependant toujours le cas si la fonction est définie sur un intervalle *fermé borné.*

Théorème 3.44 (Théorème de Heine)**.** *Toute fonction $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$ est uniformément continue.*

Démonstration. On démontre la contraposée. Supposons donc que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ne soit pas uniformément continue. Dans ce cas, il existe $\epsilon > 0$ et deux suites $(u_n), (v_n) \in [a, b]^{\mathbb{N}}$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} u_n - v_n = 0 \quad \text{et} \quad |f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \epsilon \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

La suite (u_n) est bornée. Par le Théorème de Bolzano–Weierstrass, on peut extraire une sous-suite $(u_{\varphi(n)})$ convergeant vers un point $x \in [a, b]$. La condition ci-dessus implique alors que la suite $(v_{\varphi(n)})$ converge également vers x, puisque

$$\lim_{n\to\infty} v_{\varphi(n)} = \lim_{n\to\infty} (v_{\varphi(n)} - u_{\varphi(n)}) + \lim_{n\to\infty} u_{\varphi(n)} = 0 + x = x.$$

Or, le fait que $|f(u_n) - f(v_n)| \geqslant \epsilon$ pour tout n implique que les suites $\big(f(u_{\varphi(n)})\big)$ et $\big(f(v_{\varphi(n)})\big)$ ne peuvent pas converger vers une même limite. f est n'est donc pas continue en x. □

3.8 Exercices supplémentaires

3.8.1 Limites

Exercice 3.6

1. Calculer les limites suivantes (les propriétés établies dans l'Exercice 3.2 peuvent être utilisées).
   a) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3 + 2x - 1}{3x^2 - 2}$ b) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$ c) $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right)$
2. Dans chaque cas, dire si la limite existe et, si c'est le cas, la déterminer.
   a) $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{6-x} - 2}{\sqrt{3-x} - 1}$ b) $\lim_{x\to 3} \frac{|x-3|}{x-3}$ c) $\lim_{x\to 2} \frac{5x - 6 - x^2}{4 - x^2}$
   d) $\lim_{x\to -\infty} \frac{5x - 6 - x^2}{4 - x^2}$ e) $\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}$
3. Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$. Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ et x_0 un point limite de E. Montrer que, pour que $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$, il suffit que
   $$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| \leqslant g(\epsilon)\big].$$
4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que si f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors $1/f$ converge vers 0 en $+\infty$.

3.8.2 Continuité

Exercice 3.7

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue en x_0 et telle que $f(x_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe $a < x_0 < b$ tels que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in (a, b)$.

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que la continuité de f implique celle de $|f|$.

b) Donner un exemple de fonction f nulle part continue, mais telle que $|f|$ soit continue.

c) Montrer que si f et g sont continues en x_0, alors les fonctions $x \mapsto \max\{f(x), g(x)\}$ et $x \mapsto \min\{f(x), g(x)\}$ sont également continues en x_0. (Se souvenir de l'Exercice 1.8, question **2.**.)

3. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $f(x) \in \mathbb{N}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est constante.

4. Soient $E \subset \mathbb{R}$, x_0 un point limite de E et $f, g : E \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue en x_0, mais pas g.

a) Montrer que $f + g$ ne peut pas être continue en x_0.

b) Qu'en est-il si f et g sont toutes deux discontinues en x_0 ?

5. Démontrer les affirmations suivantes (par exemple à l'aide du Théorème 3.24).

a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f est minorée et atteint son minimum.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Montrer que f est majorée et atteint son maximum.

6. Soient $A \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble dense et $f, g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telles que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Le but de l'exercice est de montrer que $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$.
On pose $\alpha := f(1) - f(0)$, $\beta := f(0) - f(-1)$ et $\gamma := \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

a) Soit $x \in (0, 1)$. Montrer que $\beta x \leqslant f(x) - f(0) \leqslant \alpha x$. (Indications : $x = t \cdot 1 + (1 - t) \cdot 0$ lorsque $t = x$ et $0 = t \cdot x + (1 - t) \cdot (-1)$ lorsque $t = 1/(1 + x)$.)

b) Soit $x \in (-1, 1)$. Montrer que $|f(x) - f(0)| \leqslant \gamma|x|$. En déduire la continuité de f en 0.

c) Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

8. Étudier les points de continuité des fonctions suivantes :

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{-3\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x-5}{x+3}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x\chi_{\mathbb{Q}}(x)$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leqslant 1 \\ \frac{x+2}{1+x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{si } x > 1 \\ 3 & \text{si } x \leqslant 1 \end{cases}$

e) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x^2+2|x|}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 2 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

f) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ impair, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} \frac{x-1}{x^n-1} & \text{si } x \neq 1 \\ \frac{1}{n} & \text{si } x = 1 \end{cases}$

9. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{1 - |x|}$.

a) La fonction f est-elle continue sur son domaine de définition ?

b) Calculer $\lim_{x\to-1} f(x)$ et $\lim_{x\to1} f(x)$.

c) Existe-t-il une fonction $g \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ coïncidant avec f sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$? Une telle fonction g est alors appelée le **prolongement par continuité** de la fonction f.

10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le but de cet exercice est de montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = cx$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Vérifier tout d'abord que (ii) implique (i), puis prouver que (i) implique (ii) en procédant comme suit :

a) Montrer que $f(0) = 0$.

b) Montrer que $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $f(nx) = nf(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

d) Montrer que $f(n) = nf(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose $c := f(1)$.

e) Montrer que $f(\frac{1}{n}) = c \cdot \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

f) Montrer que $f(q) = c \cdot q$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$.

g) Utiliser la continuité de f pour en conclure que $f(x) = c \cdot x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.8.3 Théorème des valeurs intermédiaires

Exercice 3.8

1. Soient $f, g \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telles que $f(0) = g(1) = 0$ et $f(1) = g(0) = 1$. Montrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, il existe $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = \lambda g(x)$.

2. Montrer que les équations suivantes admettent au moins une solution dans $\mathbb{R}$:

a) $\sqrt[3]{x} - \dfrac{1}{x^2+1} = 0$ b) $x^8 - 4x^6 + x^3 = -1$ c) $\lfloor 4x^2 \rfloor - \frac{11}{3}x = 1$

3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue se s'annulant jamais. Montrer que $f(x)$ a le même signe pour tous les $x \in \mathbb{R}$.

3.8.4 Continuité uniforme

Exercice 3.9

1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $x \mapsto ax + b$ est uniformément continue. Déterminer l'ensemble des valeurs de $k > 0$ pour lesquelles la fonction est k-Lipschitzienne.

2. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **$\boldsymbol{\alpha}$-Höldérienne** s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x, y \in I$, $|f(x) - f(y)| \leqslant C|x-y|^\alpha$.

a) Montrer qu'une fonction Höldérienne est uniformément continue sur I.

b) Montrer que $x \mapsto \sqrt{x}$ est $\frac{1}{2}$-Höldérienne sur $I = \mathbb{R}_+$ (Indication : pour vérifier la condition, on peut supposer, par symétrie, que $x \geqslant y$.).

c) Montrer qu'une fonction α-Höldérienne est constante si $\alpha > 1$ (Indication : considérer $x < y$ et borner $|f(x) - f(y)|$ en subdivisant l'intervalle $[x, y]$ en sous-intervalles de longueur $\delta > 0$.).

3. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ telle que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

a) Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus [-M, M]$, on a $|f(x)| < \epsilon/2$.

b) Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \epsilon$ pour tout $x, y \in [-M-1, M+1]$ tels que $|x - y| < \delta$.

c) Déduire des deux points précédents que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

d) Montrer que f est bornée.

4. Donner un exemple de fonction $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ qui soit continue mais pas uniformément continue.

5. Soit $E \subset \mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue.

a) Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Montrer que la suite $(f(u_n))$ est une suite de Cauchy.

b) Montrer, par un contre-exemple, que ceci n'est pas toujours vrai si f n'est que continue.

6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction périodique. Montrer que f est bornée et uniformément continue.

4 Calcul différentiel

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit la notion de fonction continue et étudié les propriétés de telles fonctions. Nous allons à présent introduire une notion de régularité plus forte, qui est au cœur de l'analyse : la différentiabilité. Formulé de façon informelle, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est différentiable en un point si elle peut être approximée par une droite dans un voisinage de ce point.

4.1 La dérivée d'une fonction

Définition 4.1. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. La fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **dérivable en $x_0 \in I$**, de **dérivée** $f'(x_0)$, si la limite*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*existe. La fonction f est **dérivable sur I** si elle est dérivable en chaque point de I. L'ensemble des fonctions dérivables sur I est noté $\mathscr{D}^1(I)$. La **(fonction) dérivée** de $f \in \mathscr{D}^1(I)$ est la fonction*

$$\begin{aligned} f' \colon I &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x). \end{aligned}$$

Exemple 4.2.

- ▷ Soit $c \in \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction constante $x \mapsto c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

  Ainsi, f' est identiquement nulle sur $\mathbb{R}$.

- ▷ Considérons la fonction identité $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

  Ainsi, $f'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- ▷ Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$. Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t) - f(x_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t)^2 - x_0^2}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{2x_0 t + t^2}{t} = 2x_0 + \lim_{t \to 0} t = 2x_0. \end{aligned}$$

  Ainsi, $f'(x) = 2x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. ◇

Exemple 4.3. La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$ n'est pas dérivable en 0. En effet, la fonction

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0, \end{cases}$$

n'admet pas de limite en 0. ◇

Remarque 4.4. ▷ *La dérivée en un point x_0 est une notion locale.*

▷ *Les notations suivantes, dues à Leibniz, sont également souvent employées :*

$$f'(x) \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \quad \textit{et} \quad f' \equiv \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}.$$

▷ *Pour $x \neq x_0$, la quantité*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

est la pente de la sécante au graphe de f passant par les points $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$. En particulier, dire que f est dérivable en x_0 revient à dire que les pentes de ces sécantes convergent lorsque $x \to x_0$. Dans ce cas, la limite des sécantes est la tangente au graphe de f en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $f'(x_0)$ est sa pente (cf. Figure 4.1). Cette tangente est donc la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. ◇

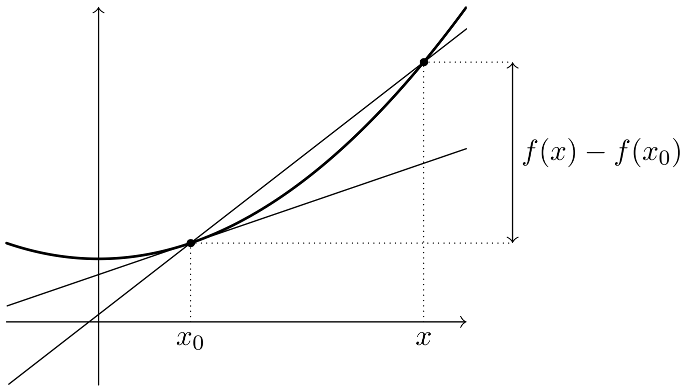


FIGURE 4.1: Lorsque la fonction f est dérivable en x_0, la sécante au graphe passant par les points $\big(x_0, f(x_0)\big)$ et $\big(x, f(x)\big)$ converge vers la tangente au graphe en $\big(x_0, f(x_0)\big)$ dans la limite $x \to x_0$.

L'exemple de la fonction $x \mapsto |x|$ montre qu'une fonction peut être continue et non dérivable.[1] Par contre, une fonction dérivable est toujours continue.

Proposition 4.5. *Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.*

Démonstration.

$$\lim_{x \to x_0} \big(f(x) - f(x_0)\big) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0) = \underbrace{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{= f'(x_0)} \underbrace{\lim_{x \to x_0} (x - x_0)}_{= 0} = 0.$$

□

1. En fait, on peut construire des fonctions qui sont continues en tout point de $\mathbb{R}$, mais dérivable en aucun point ; c'est par exemple le cas de la **fonction de Takagi**, représentée sur la page de titre de ce polycopié. La découverte de l'existence de telles fonctions avait beaucoup choqué certains mathématiciens ; citons, par exemple, Hermite qui écrivait en 1893 au sujet du premier exemple dû à Weierstrass : « Je me détourne avec effroi et horreur de cette plaie lamentable des fonctions continues qui n'ont point de dérivées ». Un exemple de telle fonction est le sujet du point **14.** de l'Exercice 4.7. La fonction de Takagi elle-même est discutée dans l'Appendice B.2.

On a vu que si une fonction f est dérivable en un point x_0, alors la tangente au graphe de f au point $\big(x_0, f(x_0)\big)$ est donnée par la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$. Le résultat suivant montre que f peut être approximée par cette droite dans un voisinage de x_0.

Proposition 4.6. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $x_0 \in I$ si et seulement si elle est* ***différentiable en x_0****, c'est-à-dire que l'on peut écrire, pour tout $x \in I$,*

$$f(x) = f(x_0) + a \cdot (x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0), \tag{4.1}$$

où $a \in \mathbb{R}$ et la fonction $r : I \to \mathbb{R}$ satisfait $\lim_{x\to x_0} r(x) = r(x_0) = 0$. Dans ce cas, $a = f'(x_0)$.

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f dérivable en x_0 et définissons $r(x) := \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} - f'(x_0)$ pour $x \neq x_0$ et $r(x_0) = 0$. Alors, (4.1) est trivialement vérifiée (avec $a = f'(x_0)$) et

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0 = r(x_0).$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons à présent que (4.1) soit satisfaite. Alors,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x - x_0) + r(x) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = a + \lim_{x\to x_0} r(x) = a,$$

ce qui montre que f est dérivable en x_0 et que $f'(x_0) = a$. □

Exemple 4.7. Déterminons la dérivée en $x_0 := 0$ de la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{1+x}$. On vérifie immédiatement que

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x} = f(x_0) + (-1) \cdot (x - x_0) + \frac{x}{1+x} \cdot (x - x_0).$$

Soit $r(x) := \frac{x}{1+x}$. Comme $\lim_{x\to 0} r(x) = 0 = r(0)$, f est différentiable en 0. f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = -1$. ◇

4.2 Propriétés des dérivées

Proposition 4.8 (Opérations arithmétiques sur les dérivées). *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. On considère $x_0 \in I$ et deux fonctions $f, g : I \to \mathbb{R}$ dérivables en x_0.*

(i) $f + g$ est dérivable en x_0 et $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$.

(ii) $f \cdot g$ est dérivable en x_0 et $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$.

(iii) Si $g(x_0) \neq 0$, f/g est dérivable en x_0 et $(f/g)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g(x_0)^2}$.

Démonstration. (i) $$\frac{(f+g)(x) - (f+g)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} + \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

(ii) $$\frac{(fg)(x) - (fg)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} + f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)}$$

(iii) $$\frac{(f/g)(x) - (f/g)(x_0)}{x - x_0} = \underbrace{\frac{1}{g(x)g(x_0)}}_{\to 1/g(x_0)^2} \left\{ \underbrace{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}_{\to f'(x_0)} g(x_0) - f(x_0) \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{\to g'(x_0)} \right\}$$

□

Exemple 4.9. ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons[2] que $(x^n)' = nx^{n-1}$. On procède par récurrence. On a déjà vu que $(x^1)' = 1$. Supposons donc que le résultat est vrai pour n et vérifions sa validité pour $n+1$:

$$(x^{n+1})' = (x \cdot x^n)' = (x)'x^n + x(x^n)' = 1 \cdot x^n + x \cdot nx^{n-1} = (n+1)x^n.$$

▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrons que la dérivée de $x \mapsto x^{-n}$ existe en chaque point de $\mathbb{R}^*$ et que $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$. En effet, par le point précédent,

$$(x^{-n})' = \Big(\frac{1}{x^n}\Big)' = \frac{-nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

▷ Une fonction polynomiale $x \mapsto P(x) := \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$ et sa dérivée est la fonction polynomiale

$$P'(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k k x^{k-1}.$$

▷ Une fonction rationnelle est dérivable en tout point de son domaine de définition. ◇

Proposition 4.10 (Dérivée d'une fonction composée). *Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles ouverts non vides. Soit $f : I \to J$ dérivable en $x_0 \in I$ et $g : J \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(x_0)$. Alors, la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0).$$

Démonstration. f étant dérivable en x_0, il suit de la Proposition 4.6 que

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0),$$

avec $\lim_{x \to x_0} r(x) = r(x_0) = 0$. De même, g étant dérivable en $f(x_0)$, on a

$$g(y) = g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(y - f(x_0)\big) + \tilde{r}(y)\big(y - f(x_0)\big),$$

avec $\lim_{y \to f(x_0)} \tilde{r}(y) = \tilde{r}\big(f(x_0)\big) = 0$. Par conséquent, en prenant $y = f(x)$,

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big) + \tilde{r}\big(f(x)\big)\big(f(x) - f(x_0)\big).$$

En substituant $f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + r(x)(x - x_0)$ deux fois dans la dernière expression, on obtient

$$g\big(f(x)\big) = g\big(f(x_0)\big) + g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)(x - x_0) + \hat{r}(x)(x - x_0),$$

où $\hat{r}(x) := g'\big(f(x_0)\big)r(x) + \tilde{r}\big(f(x)\big)f'(x_0) + \tilde{r}\big(f(x)\big)r(x)$. Les fonctions r et $\tilde{r} \circ f$ sont continues en x_0 et y prennent la valeur 0. La fonction $\hat{r}$ est donc continue en x_0 et telle que $\hat{r}(x_0) = 0$. Ceci montre que $g \circ f$ est différentiable en x_0. Par la Proposition 4.6, $g \circ f$ est donc dérivable en x_0 et $(g \circ f)'(x_0) = g'\big(f(x_0)\big) f'(x_0)$. □

Exercice 4.1

Donner une preuve alternative de la Proposition 4.8 reposant sur la Proposition 4.6.

2. Ici, et régulièrement par la suite, nous utilisons la notation abusive $(x^r)'$ pour la dérivée de la fonction $x \mapsto x^r$. Cela ne devrait pas prêter à confusion et allège considérablement l'écriture.

Proposition 4.11 (Dérivée de la réciproque). *Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles ouverts non vides. Soit $f : I \to J$ continue, bijective et dérivable en $x_0 \in I$ avec $f'(x_0) \neq 0$. Alors, f^{-1} est dérivable en $y_0 := f(x_0)$ et*

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

Démonstration. Par hypothèse, $\lim_{x\to x_0}(x - x_0)/\big(f(x) - f(x_0)\big) = 1/f'(x_0)$. Par l'Exercice 3.5, f^{-1} est continue, ce qui implique que $\lim_{y\to y_0} f^{-1}(y) = f^{-1}(y_0) = x_0$. Comme f^{-1} est bijective, $f^{-1}(y) \neq f^{-1}(y_0)$ pour tout $y \neq y_0$. Il suit donc de l'Exercice 3.1 que

$$\lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{y\to y_0} \frac{f^{-1}(y) - x_0}{f\big(f^{-1}(y)\big) - f(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(y_0)\big)}.$$

□

Remarque 4.12. *Un moyen mnémotechnique (mais qui n'est pas une preuve, car il présuppose la dérivabilité de f^{-1}) pour le résultat de la proposition précédente consiste à dériver les deux membres de l'identité $f \circ f^{-1}(x) = x$, ce qui donne $f'\big(f^{-1}(x)\big) \cdot (f^{-1})'(x) = 1$ et donc $(f^{-1})'(x) = 1/f'\big(f^{-1}(x)\big)$.* ◇

Exemple 4.13.

- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^n$. Sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, x \mapsto x^{1/n}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$(x^{1/n})' = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)} = \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} = \frac{1}{n}x^{(1/n)-1}.$$

- ▷ Considérons à présent $r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*, x \mapsto x^r$ peut être vue comme la composition des fonctions $x \mapsto x^{1/n}$ et $x \mapsto x^m$. Elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$(x^r)' = (x^{m/n})' = m(x^{1/n})^{m-1} \cdot \frac{1}{n}x^{(1/n)-1} = \frac{m}{n}x^{(m/n)-1} = rx^{r-1}.$$ ◇

4.3 Accroissements et dérivées

Définition 4.14. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, $x_0 \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$.*

- ▷ *La fonction f admet un **maximum local** en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) \geqslant f(x)$ pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ce maximum local est **strict** si l'inégalité est stricte (pour $x \neq x_0$).*
- ▷ *La fonction f admet un **minimum local** en x_0 s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(x_0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Ce minimum local est **strict** si l'inégalité est stricte (pour $x \neq x_0$).*
- ▷ *La fonction f admet un **extremum local** en x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en x_0.*

Lorsque f atteint son maximum en x_0, nous dirons occasionnellement qu'il s'agit d'un **maximum global** de f. On fera de même pour le minimum.

Proposition 4.15. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable en $x_0 \in I$ et admettant un extremum local en x_0. Alors, $f'(x_0) = 0$.*

Démonstration. On considère le cas où l'extremum est un maximum local (le cas d'un minimum local se traite de la même façon). Il existe donc $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. En particulier,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \leqslant 0 & \text{si } x_0 < x < x_0 + \delta, \\ \geqslant 0 & \text{si } x_0 > x > x_0 - \delta. \end{cases}$$

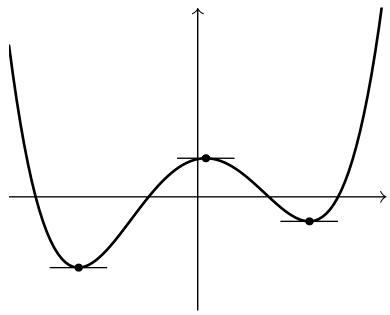


FIGURE 4.2: Une fonction possédant 3 extrema locaux : deux minima locaux (dont un global) et un maximum local.

Il suit donc de la Proposition 3.4 que

$$0 \geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0+\frac{1}{n})-f(x_0)}{1/n} = f'(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_0-\frac{1}{n})-f(x_0)}{-1/n} \geqslant 0. \qquad \square$$

Insistons sur le fait que la réciproque est fausse : la fonction $x \mapsto x^3$ a une dérivée nulle en 0, mais n'admet pas d'extremum local en ce point.

Définition 4.16. *Un **point critique** (ou **stationnaire**) de la fonction f est un point x tel que $f'(x) = 0$.*

Le résultat suivant possède de nombreuses applications (voir la Figure 4.3 pour une illustration).

Proposition 4.17 (Théorème de Rolle)**.** *Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que $f'(c) = 0$.*

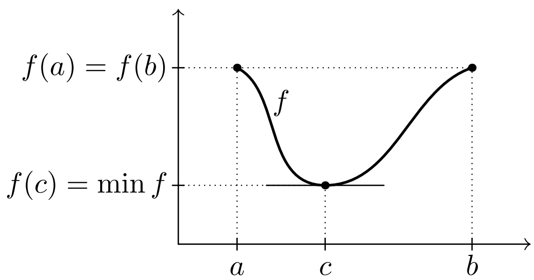


FIGURE 4.3: Théorème de Rolle : il existe un point $(c, f(c))$ du graphe de f auquel la tangente est horizontale.

Démonstration. Par le Corollaire 3.30, $f([a, b]) = [m, M]$. Si $m = M$, f est constante et $f'(c) = 0$ pour tout $c \in (a, b)$.

Supposons que $m < M$. Si $m < f(a)$, il existe $c \in (a, b)$ tel que $m = f(c)$ et, f ayant un minimum en c, $f'(c) = 0$ par la Proposition 4.15. Si $f(a) = m$, alors $M > f(a)$ et on conclut de façon similaire. $\square$

Remarque 4.18.

- ▷ *Il est essentiel que la fonction soit définie sur un intervalle. Considérez, par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|$.*
- ▷ *Il est également essentiel que f soit continue en a et b. Considérez, par exemple, la fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x$ pour tout $x \in (0, 1]$ et $f(0) := 1$.* ◇

Théorème 4.19 (Théorème des accroissements finis)**.** *Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Alors, il existe $c \in (a, b)$ tel que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

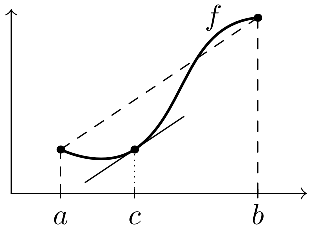


FIGURE 4.4: Par le théorème des accroissements finis, il existe un point $\big(c, f(c)\big)$ du graphe de f auquel la tangente au graphe de f est parallèle à la droite passant par les points $\big(a, f(a)\big)$ et $\big(b, f(b)\big)$.

Démonstration. On applique le théorème de Rolle à la fonction

$$\begin{aligned} g\colon [a,b] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a). \end{aligned}$$

g est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b) et satisfait $g(a) = g(b) = 0$. Il s'ensuit qu'il existe $c \in (a,b)$ tel que $0 = g'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ce qui conclut la preuve. □

- ☐ Soient $a < b$ deux réels. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b), alors il existe $c \in (a,b)$ tel que $f'(c) = 0$.
- ☐ Soient $a < b$ deux réels. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur (a,b), alors il existe $c \in (a,b)$ tel que $f'(c) = (f(b) - f(a))/(b-a)$.
- ☐ Soient $a < b$ deux réels. Si $f'(x) < c$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $f(b) < f(a) + c(b-a)$.
- ☐ Un véhicule ayant parcouru une distance de 100 km en une heure a dû rouler à exactement 100 km/h à un instant pendant cette heure.
- ☐ Un véhicule dont la vitesse a ponctuellement dépassé 100 km/h lors d'un trajet de 100 km a effectué ce trajet en moins d'une heure.

Corollaire 4.20. *Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b).*

(i) f est croissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in (a,b)$.

(ii) Si $f'(x) > 0$ pour tout $x \in (a,b)$, alors f est strictement croissante sur $[a,b]$.

(iii) f est décroissante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in (a,b)$.

(iv) Si $f'(x) < 0$ pour tout $x \in (a,b)$, alors f est strictement décroissante sur $[a,b]$.

(v) f est constante sur $[a,b]$ si et seulement si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a,b)$.

Démonstration. (Les points (iii) et (iv) suivent de (i) et (ii) en considérant $g = -f$.)

(i) $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons f croissante et soit $x_0 \in (a,b)$. Alors, pour tout $x \neq x_0$,

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0,$$

ce qui implique que $f'(x_0) \geqslant 0$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in (a,b)$. Soient $x < y$ dans $[a,b]$. Par le théorème des accroissements finis, il existe $c \in (x,y)$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

Comme $f'(c) \geqslant 0$, il suit que $f(y) \geqslant f(x)$.

(ii) suit du même argument que pour l'implication $\boxed{\Leftarrow}$ ci-dessus.

(v) $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est constante, alors elle est à la fois croissante et décroissante. Il suit donc des points (i) et (iii) que $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in (a, b)$, alors $f'(x) \geqslant 0$ et $f'(x) \leqslant 0$ pour tout $x \in (a, b)$. La conclusion suit à nouveau de (i) et (iii). $\square$

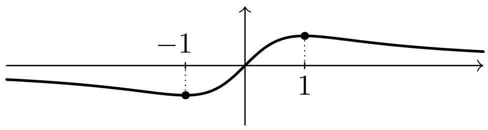
⚠ La réciproque aux points (ii) et (iv) est fausse : la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, mais $f'(0) = 0$.

Exemple 4.21. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$, qui est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Le corollaire précédent permet d'étudier les **variations** de f, à savoir les intervalles sur lesquels elle est croissante ou décroissante. Ceci est souvent fait à l'aide d'un **tableau de variations**. On calcule tout d'abord la dérivée de f,

$$f'(x) = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2},$$

puis on étudie le signe de cette fonction : f' s'annule en -1 et 1, est strictement négative sur $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ et strictement positive sur $(-1, 1)$. Elle admet donc un maximum local en 1 et un minimum local en -1. Les valeurs prises en ces points sont respectivement égales à $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$. Comme $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$, ce maximum et ce minimum sont en fait globaux. Finalement, f est impaire. On peut à présent facilement tracer l'allure du graphe de f.

		-1		1	
signe de f'	$-$		$+$		$-$
variations de f	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$



$\diamond$

Corollaire 4.22. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $f : I \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in I$. On suppose que f est continue en x_0 et dérivable sur $I \setminus \{x_0\}$. Si $\lim_{x \to x_0} f'(x)$ existe, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} f'(x)$.*

Démonstration. Par le Théorème des accroissements finis, pour tout $x \in I$, il existe c_x strictement entre x et x_0 tel que $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(c_x)$. Puisque $\lim_{x \to x_0} c_x = x_0$ et que $c_x \neq x_0$ pour tout x, il suit de l'Exercice 3.1 que

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = \lim_{x \to x_0} f'(c_x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

$\square$

Exercice 4.2

1. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a, b]$ et dérivable sur (a, b). Démontrer l'**inégalité des accroissements finis** : s'il existe $M > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant M$ pour tout $x \in (a, b)$, alors $|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|$ pour tout $x, y \in [a, b]$.
2. Soient $a < b$ deux réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b). Démontrer le **théorème des accroissements finis généralisé** : il existe $c \in (a, b)$ tel que
$$\big(f(b) - f(a)\big)g'(c) = \big(g(b) - g(a)\big)f'(c).$$

Exercice 4.3

Soient $a < b$ deux réels et $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[a, b]$ et dérivables sur (a, b).

a) Montrer que $f'(x) = g'(x)$ pour tout $x \in (a, b)$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $f(x) = g(x) + C$ pour tout $x \in [a, b]$. (Indication : utiliser le théorème des accroissements finis ou directement le Corollaire 4.20.)

b) Comment ce résultat se généralise-t-il si l'intervalle $[a, b]$ est remplacé par $[a, b] \cup [c, d]$ avec $a < b < c < d$?

4.4 Dérivées d'ordres supérieurs

Définition 4.23. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide. Soit $f : I \to \mathbb{R}$. On définit $f^{(0)} := f$. Pour $n \geqslant 1$, si $f^{(n-1)}$ est dérivable sur I, on définit $f^{(n)} := (f^{(n-1)})'$. Lorsque $f^{(n)}$ existe, on dit que la fonction f est **n fois dérivable**.*

On a donc $f^{(0)} = f$, $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = (f')'$, $f^{(3)} = ((f')')'$, etc.

Définition 4.24. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide.*

- ▷ *L'ensemble des fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ n fois dérivables est noté $\mathscr{D}^n(I)$.*
- ▷ *L'ensemble des fonctions $f \in \mathscr{D}^n(I)$ telles que $f^{(n)} \in \mathscr{C}^0(I)$ est noté $\mathscr{C}^n(I)$. Une fonction $f \in \mathscr{C}^n(I)$ est dite **de classe $\mathscr{C}^n$**.*
- ▷ *Une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(I) := \bigcap_{n\geqslant 1} \mathscr{C}^n(I)$ est dite **infiniment dérivable**.*

Remarque 4.25. *Observons que, la dérivabilité impliquant la continuité, on a les inclusions suivantes :*

$$\mathscr{C}^0(I) \supset \mathscr{D}^1(I) \supset \mathscr{C}^1(I) \supset \mathscr{D}^2(I) \supset \mathscr{C}^2(I) \supset \cdots \supset \mathscr{D}^k(I) \supset \mathscr{C}^k(I) \supset \cdots \supset \mathscr{C}^\infty(I).$$

Toutes ces inclusions sont strictes (voir, en particulier, l'Exercice 6.6, point 8). ◇

Exercice 4.4

Montrer que les fonctions $f + g$, $f \cdot g$, f/g, $g \circ f$ et f^{-1} sont de classe $\mathscr{C}^n$ sur leur domaine de définition si f et g le sont.

Exemple 4.26. Les fonctions polynomiales et rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition. ◇

Le résultat suivant fournit une généralisation très utile du Théorème des accroissements finis, applicable lorsque la fonction est plusieurs fois dérivable.

Théorème 4.27 (Théorème de Taylor–Lagrange)**.** *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $a \neq b$ dans I. Notons $J := (a, b)$ si $a < b$ et $J := (b, a)$ si $b < a$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ telle que*

- ▷ *f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I ;*
- ▷ *$f^{(n)}$ est dérivable sur J.*

Alors, il existe $c \in J$ tel que

$$f(b) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b - a)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(b - a)^{n+1}.$$

Démonstration. Comme mentionné plus haut, cet énoncé généralise celui du Théorème des accroissements finis : il suffit de l'appliquer avec $n = 0$. Comme pour ce dernier, la preuve repose sur l'application du Théorème de Rolle à une fonction appropriée.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ l'unique réel tel que

$$\frac{\lambda}{(n+1)!}(b-a)^{n+1} = f(b) - f(a) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(b-a)^k.$$

Nous allons montrer que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$ pour un $c \in J$, ce qui conclura la démonstration.

On vérifie aisément que la fonction

$$\Psi(x) \coloneqq f(b) - f(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(b-x)^k - \frac{\lambda}{(n+1)!}(b-x)^{n+1}$$

satisfait les hypothèses du Théorème de Rolle. Par conséquent, il existe $c \in J$ tel que $\Psi'(c) = 0$. Or,

$$\begin{aligned}
\Psi'(c) &= -f'(c) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{(k-1)!}(b-c)^{k-1} + \frac{\lambda}{n!}(b-c)^n \\
&= -f'(c) - \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k+1)}(c)}{k!}(b-c)^k + \frac{\lambda}{n!}(b-c)^n \\
&= -f'(c) - \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(b-c)^n + f'(c) + \frac{\lambda}{n!}(b-c)^n \\
&= \frac{(b-c)^n}{n!}\big(\lambda - f^{(n+1)}(c)\big).
\end{aligned}$$

Puisque $b - c \neq 0$, on conclut que $\lambda = f^{(n+1)}(c)$, comme désiré. □

On définit le **polynôme de Taylor d'ordre n de f en x_0** par

$$T_n f(x; x_0) \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

Ces polynômes fournissent des approximations de plus en plus précises de la fonction f dans un voisinage de x_0. La figure 4.5 fournit une illustration.

- ▷ Pour $n = 1$, on obtient l'approximation linéaire par la droite tangente au graphe de f en x_0 (que l'on a déjà rencontrée en (4.1)) :

$$T_1 f(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

- ▷ Pour $n = 2$, on obtient l'approximation quadratique par la parabole « tangente » au graphe de f en x_0 :

$$T_2 f(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(x-x_0)^2.$$

Exercice 4.5

Plus généralement, montrer que, pour $n \in \mathbb{N}$ donné, $P_n(x) \coloneqq T_n f(x; x_0)$ est l'unique fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à n satisfaisant $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$.

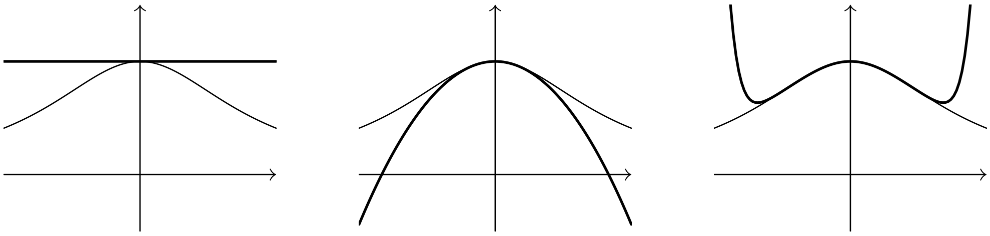


FIGURE 4.5: La fonction $f(x) = 1/(1+x^2)$ et quelques polynômes de Taylor associés : $T_1 f(x;0) = 1$, $T_2 f(x;0) = 1 - x^2$ et $T_{12} f(x;x_0) = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - x^{10} + x^{12}$.

En utilisant le théorème de Taylor–Lagrange, on peut quantifier la précision de cette approximation. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f \in \mathscr{D}^{n+1}(I)$. Alors pour tout $x, x_0 \in I$ tels que $x_0 < x$,

$$|f(x) - T_n f(x;x_0)| \leqslant \frac{|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{c \in (x_0, x)} |f^{(n+1)}(c)|. \tag{4.2}$$

Un résultat analogue est vrai lorsque $x_0 > x$: il suffit de prendre le supremum sur c dans (x, x_0).

Exemple 4.28. Calculons une valeur approchée de $\sqrt{2}$. On considère la fonction $f(x) \coloneqq \sqrt{x}$. On a

$$f'(x) = \frac{1}{2} x^{-1/2}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4} x^{-3/2}, \quad f'''(x) = \frac{3}{8} x^{-5/2}.$$

L'idée est de partir d'une valeur pas trop éloignée de 2 et dont on connait la racine carrée, par exemple $x_0 \coloneqq 16/9$. Pour ce choix, $f(x_0) = 4/3$, $f'(x_0) = 3/8$, $f''(x_0) = -27/256$ et $2 - x_0 = 2/9$. On a donc

$$T_2 f(2;x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(2 - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0)(2 - x_0)^2 = \frac{181}{128} \cong 1{,}41406.$$

Comme $\sup_{[x_0,2]} |f'''(x)| = f'''(x_0)$, il suit de (4.2) que

$$\left|\sqrt{2} - \frac{181}{128}\right| \leqslant \frac{|2 - x_0|^3}{3!} f'''(x_0) = \frac{1}{3!} \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^3 \cdot \frac{3}{8} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{1}{6144}.$$

On obtient donc finalement

$$1{,}41389 < \frac{8687}{6144} \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{8689}{6144} < 1{,}41423,$$

ce que l'on peut comparer avec la valeur exacte $\sqrt{2} \cong 1{,}41421$. ◇

4.5 Comparaison asymptotique

On est souvent amené à comparer deux fonctions au voisinage d'un point x_0, ou au « voisinage de l'infini », c'est-à-dire lorsque $x \to +\infty$ ou $x \to -\infty$. Dans cette section, nous introduisons une notation pratique pour parler de telles comparaisons asymptotiques : la notation de Landau. Nous présentons ensuite une version du théorème de Taylor–Lagrange reposant sur cette notation et expliquons comment il peut être utilisé, en particulier, pour déterminer certaines limites donnant lieu à des formes indéterminées.

4.5.1 La notation de Landau

Soit $E \subset \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ et x_0 un point limite de E.

Petit o. On suppose que f ne s'annule pas au voisinage de x_0. On note $g = \mathsf{o}_{x\to x_0}(f)$ (« g est un petit o de f au voisinage de x_0 ») si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Intuitivement, la fonction g est négligeable devant la fonction f proche du point x_0.

On utilise la même notation lorsqu'on s'intéresse au comportement « à l'infini ». Par exemple, on note $g = \mathsf{o}_{x\to+\infty}(f)$ lorsque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0.$$

Quand le point auquel on est intéressé est rendu clair par le contexte, on omet en général les indices, et on écrit simplement $g = \mathsf{o}(f)$.

Finalement, avec $h : E \to \mathbb{R}$, l'écriture $f = g + \mathsf{o}(h)$ signifie $f - g = \mathsf{o}(h)$.

Exemple 4.29. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n > m$. Alors, $x^{-m} = \mathsf{o}_{x\to 0}(x^{-n})$. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^{-m}}{x^{-n}} = \lim_{x\to 0} x^{n-m} = 0.$$

De façon similaire, $x^m = \mathsf{o}_{x\to+\infty}(x^n)$. ◇

Exemple 4.30. $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ si et seulement si $f = \mathsf{o}_{x\to x_0}(1)$. ◇

Exemple 4.31. $x/(1+x^2) = x - x^3 + \mathsf{o}_{x\to 0}(x^4)$. En effet,

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\Big(\frac{x}{1+x^2} - (x - x^3)\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^3}\Big(\frac{1-(1-x^4)}{1+x^2}\Big) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1+x^2} = 0.$$ ◇

Grand O. On note $g = \mathsf{O}_{x\to x_0}(f)$ (« g est un grand O de f au voisinage de x_0 ») s'il existe $\delta > 0$ et $C \in \mathbb{R}$ tels que

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leqslant C|f(x)|.$$

On utilise la même notation lorsqu'on s'intéresse au comportement « à l'infini ». Par exemple, on notera $g = \mathsf{O}_{x\to+\infty}(f)$ s'il existe $N, C \in \mathbb{R}$ tels que

$$x > N \quad \Rightarrow \quad |g(x)| \leqslant C|f(x)|.$$

Quand le point auquel on est intéressé est rendu clair par le contexte, on omet en général les indices, et on écrit simplement $g = \mathsf{O}(f)$.

Finalement, avec $h : E \to \mathbb{R}$, l'écriture $f = g + \mathsf{O}(h)$ signifie $f - g = \mathsf{O}(h)$.

Exemple 4.32.
- ▷ f est bornée au voisinage de x_0 si et seulement si $f = \mathsf{O}_{x\to x_0}(1)$.
- ▷ $\sqrt{3x^2+2} = \mathsf{O}_{x\to+\infty}(x)$. En effet, pour tout $x \geqslant \sqrt{2}$, $\sqrt{3x^2+2} \leqslant \sqrt{4x^2} = 2x$. ◇

Équivalence asymptotique. On note $g \sim_{x\to x_0} f$ si

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On utilise la même notation lorsqu'on s'intéresse au comportement « à l'infini ». Par exemple, on notera $g \sim_{x\to+\infty} f$ si

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Comme avant, on écrit simplement $g \sim f$ si le point auquel on est intéressé est rendu clair par le contexte.

Exemple 4.33. $\sqrt{x^2+1} \sim_{x\to+\infty} x$, puisque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 1. \qquad \diamond$$

Exercice 4.6

Soit $f, \tilde{f}, g, h$ des fonctions définies au voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}$. Démontrer les affirmations suivantes (lorsque $x \to x_0$) :

a) Si $g = \mathsf{o}(f)$, alors $g = \mathsf{O}(f)$.

b) Si $g \sim f$, alors $g = \mathsf{O}(f)$.

c) $g \sim f \;\Leftrightarrow\; g = f + \mathsf{o}(f)$.

d) Si $f = \mathsf{o}(g)$, alors $f \cdot h = \mathsf{o}(g \cdot h)$.

e) Si $f = \mathsf{o}(g)$ et $g = \mathsf{o}(h)$, alors $f = \mathsf{o}(h)$.

f) Si $f = \mathsf{o}(h)$ et $g = \mathsf{o}(h)$, alors $f + g = \mathsf{o}(h)$.

g) Si $f = \mathsf{O}(h)$ et $g = \mathsf{O}(h)$, alors $f + g = \mathsf{O}(h)$.

h) Si $f = \mathsf{o}(g+h)$ et $h = \mathsf{O}(g)$, alors $f = \mathsf{o}(g)$.

i) Si $f = \mathsf{o}(g)$ et $\tilde{f} = \mathsf{o}(h)$, alors $f \cdot \tilde{f} = \mathsf{o}(g \cdot h)$.

4.5.2 Formule de Taylor–Young et formes indéterminées

Proposition 4.34 (Formule de Taylor–Young)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide, $f \in \mathscr{C}^n(I)$ et $x_0 \in I$. Alors, lorsque x tend vers x_0,*

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + \mathsf{o}\big((x-x_0)^n\big).$$

Démonstration. Par le Théorème de Taylor–Lagrange, il existe c_x entre x_0 et x tel que

$$f(x) = T_{n-1} f(x; x_0) + \frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n = T_n f(x; x_0) + \frac{f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$

Notons

$$R_n(x; x_0) \coloneqq |f(x) - T_n f(x; x_0)| = \frac{|x-x_0|^n}{n!} |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)|.$$

$f^{(n)}$ étant supposée continue,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x; x_0)}{|x-x_0|^n} = \frac{1}{n!} \lim_{x\to x_0} |f^{(n)}(c_x) - f^{(n)}(x_0)| = 0.$$

On conclut que $R_n(x; x_0) = \mathsf{o}\big((x-x_0)^n\big)$. $\square$

La formule de Taylor–Young fournit un outil très efficace pour analyser les limites lorsque des formes indéterminées font leur apparition. En effet, elle permet de comparer les vitesses relatives avec lesquelles les différentes limites sont atteintes.

Exemple 4.35. Considérons la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+8x+3x^2} - (2x+1)^2}{x^2}.$$

Le numérateur et le dénominateur prennent la valeur 0 lorsque $x = 0$ et on se retrouve donc avec une forme indéterminée du type $\frac{0}{0}$. Afin de déterminer la limite, développons la racine dans le numérateur à l'aide la formule de Taylor–Young. Tout d'abord, observons que

$$\sqrt{1+y} = 1 + \frac{1}{2}y - \frac{1}{8}y^2 + \mathsf{o}_{y\to 0}(y^2).$$

On a donc, pour le numérateur, lorsque x s'approche de 0,

$$\sqrt{1+8x+3x^2}-(2x+1)^2 = \underbrace{1+\frac{1}{2}(8x+3x^2)-\frac{1}{8}(8x+3x^2)^2}_{=4x-\frac{13}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)}+\mathrm{o}(x^2)-(4x^2+4x+1)$$

$$= -\frac{21}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2).$$

Ainsi, on obtient

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{21}{2}x^2+\mathrm{o}(x^2)}{x^2} = -\frac{21}{2}+\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{o}(x^2)}{x^2} = -\frac{21}{2}.$$ ◇

4.6 Extrema locaux

Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f\in\mathscr{D}^1(I)$. Par la Proposition 4.15, on sait que si f admet un extremum local en x_0, alors x_0 est un point critique : $f'(x_0)=0$. Mais qu'en est-il de la réciproque ? En d'autres termes, comment déterminer si un point critique correspond à un extremum local (ainsi que son type : maximum local, minimum local, strict ou pas) ?

Proposition 4.36. *Soit $I\subset\mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f\in\mathscr{C}^n(I)$. Soit $x_0\in I$ tel que $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$ et $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.*

(i) Si n est impair, alors f n'admet pas d'extremum local en x_0.

(ii) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0)>0$, alors f admet un minimum local strict en x_0.

(iii) Si n est pair et $f^{(n)}(x_0)<0$, alors f admet un maximum local strict en x_0.

Démonstration. Pour tout $x\in I$, par le Théorème de Taylor–Lagrange, il existe c_x entre x_0 et x tel que

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(n)}(c_x)}{n!}(x-x_0)^n.$$

En particulier, par continuité de $f^{(n)}$, $f^{(n)}(x_0)=\lim_{x\to x_0}f^{(n)}(c_x)=n!\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$.

(i) On procède par l'absurde. Supposons donc que n est impair et que f ait un extremum local en x_0. On considère le cas où il s'agit d'un minimum local, le cas d'un maximum local se traitant de façon analogue. Soit $x\neq x_0$ suffisamment proche de x_0. Alors, $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^n}$ est $\geqslant 0$ si $x>x_0$ et $\leqslant 0$ si $x<x_0$, ce qui implique que $f^{(n)}(x_0)=0$. Ceci contredit l'hypothèse que $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

(ii) Pour $x\neq x_0$, $(x-x_0)^n>0$. Puisque $f^{(n)}(x_0)>0$, on doit avoir $f(x)-f(x_0)>0$ au voisinage de x_0 ; f admet donc un minimum local strict en x_0.

(iii) Même argument que pour le point précédent. □

La proposition précédente fournit une stratégie pour trouver les extrema locaux et déterminer leur type :

▷ Identifier les points critiques de la fonction.

▷ Analyser chacun des points critiques à l'aide de la Proposition 4.36 afin de déterminer si la fonction y admet un maximum local, un minimum local ou ni l'un ni de l'autre.

Exemple 4.37. On considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$. Comme $f'(x)=3x^2$, 0 est le seul point critique. De plus, comme $f'(0)=f''(0)=0$, mais $f'''(0)=6\neq 0$, le point (i) de la Proposition 4.36 implique que f n'admet pas un extremum local en 0. (Voir Figure 4.6.) ◇

Exemple 4.38. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^4 - x^2 + \frac{1}{2}$. Tout d'abord,

$$f'(x) = 4x^3 - 2x = 2x(2x^2 - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \Big\{-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\}.$$

D'autre part, $f''(x) = 12x^2 - 2$, et donc $f''(\pm 1/\sqrt{2}) = 4$ et $f''(0) = -2$. Il suit donc des points (ii) et (iii) de la Proposition 4.36 que f admet deux minima locaux stricts en $\pm 1/\sqrt{2}$ et un maximum local strict en 0. (Voir Figure 4.6.) ◇

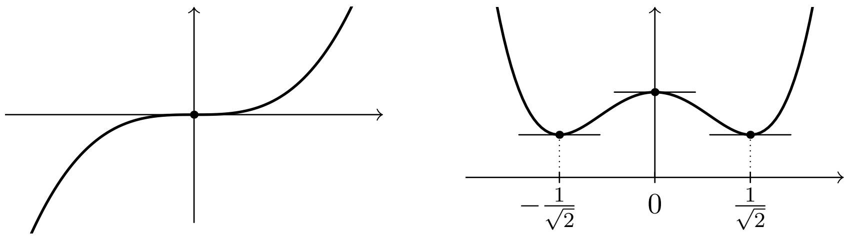


FIGURE 4.6: Les fonctions des Exemples 4.37 et 4.38. Les points critiques sont indiqués.

4.7 Exercices supplémentaires

4.7.1 Dérivée

Exercice 4.7

1. (**Formulation de Weierstrass–Carathéodory de la dérivée**) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $x_0 \in I$. Montrer que $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en x_0 si et seulement si il existe $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue en x_0 et telle que $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\varphi(x)$ pour tout $x \in I$. Dans ce cas, $f'(x_0) = \varphi(x_0)$.
2. Soient $a < b$ deux réels et $f_1, \ldots, f_n \in \mathscr{D}^1((a,b))$. Montrer que
$$(f_1 \cdots f_n)' = \sum_{k=1}^{n} f_1 \cdots f_{k-1} \cdot f_k' \cdot f_{k+1} \cdots f_n.$$
3. Déterminer, pour chacune des fonctions suivantes, si elle est dérivable en x_0 en utilisant directement la définition de la dérivabilité. Lorsque c'est le cas, déterminer $f'(x_0)$.
   a) $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^3}$, $x_0 = -1$ b) $x \mapsto \sqrt{1 + x^2}$, $x_0 = 1$
   c) $x \mapsto \sqrt{x + |x - 1|}$, $x_0 = 1$
4. Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2 \cdot \chi_{\mathbb{Q}}(x)$ est dérivable en zéro et nulle part ailleurs.
5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer, à partir de la définition de la dérivée, les implications suivantes :
   a) f paire $\Rightarrow f'$ impaire   b) f impaire $\Rightarrow f'$ paire
   c) f t-périodique $\Rightarrow f'$ t-périodique
6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et telle que $\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty$. Montrer que f n'est pas dérivable en 0.
7. Soit f une fonction dérivable en $x_0 \in \mathbb{R}$.
   a) Calculer $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0 - \beta h)}{h}$ en fonction de α, $\beta \in \mathbb{R}$.
   b) En conclure que $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} = f'(x_0)$.
   c) Réciproquement, si la limite $\lim_{h \to 0}\big(f(x_0 + h) - f(x_0 - h)\big)/(2h)$ existe, peut-on en déduire que f est dérivable en x_0 ?

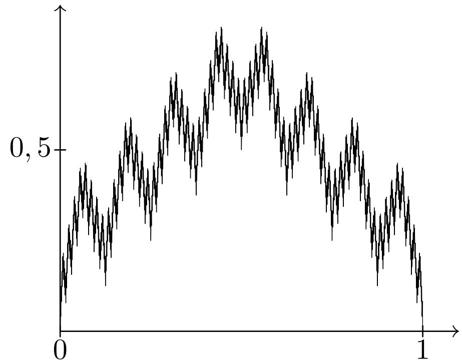


FIGURE 4.7: Une portion de la fonction du point **14.** de l'Exercice 4.7, continue partout, dérivable nulle part.

8. Calculer les dérivées des fonctions suivantes et donner les domaines de définition de la fonction et de sa dérivée.

a) $x \mapsto \dfrac{5x+2}{3x^2-1}$ b) $x \mapsto \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

9. Déterminer le domaine de définition, puis calculer la dérivée en tout point de ce domaine pour la fonction $x \mapsto \sqrt{x+\sqrt{1+x^2}}$.

10. Soit $a > 0$ rationnel. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^a$. Déterminer, en fonction de a, si f est continue et si elle est dérivable.

11. Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en x_0, que $f(x_0) = 0$ et que g possède une limite lorsque x tend vers x_0. La fonction fg est-elle dérivable en x_0 ?

12. (**Théorème de Darboux**) Soit I un intervalle ouvert non vide et $f \in \mathscr{D}^1(I)$. Le but de cet exercice est de montrer que f' possède la propriété des valeurs intermédiaires : pour tout $a < b$ dans I et pour tout y strictement entre $f'(a)$ et $f'(b)$, il existe $x \in (a,b)$ tel que $f'(x) = y$.

a) On suppose, sans perte de généralité, que $f'(a) > y > f'(b)$. Soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(t) - yt$. Montrer qu'il existe $x \in [a,b]$ tel que $\varphi(t) \leqslant \varphi(x)$ pour tout $t \in [a,b]$.

b) En considérant $\varphi'(a)$ et $\varphi'(b)$, montrer que x ne peut coïncider ni avec a ni avec b.

c) Conclure à l'aide de la Proposition 4.15.

13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et telle que $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. Montrer que $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

14. Le but de cet exercice est de donner un exemple de fonction continue et nulle-part dérivable. Posons $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} 4^n g_n(x)$, où l'on a introduit les fonctions $g_n(x) := \min_{k\in\mathbb{Z}} |x - k \cdot 8^{-n}|$ (*cf.* Figure 4.7).

a) Montrer que f est continue en chaque $x \in \mathbb{R}$. (Indication : borner $|f(y) - f(x)|$ en tronquant la somme dans la définition de f et en estimant le reste.)

b) Montrer que f n'est dérivable en aucun $x \in \mathbb{R}$. (Indication : observer que, pour chaque $n \in \mathbb{N}$ tel que $x \in [k \cdot 8^{-n}, (k+1) \cdot 8^{-n}]$, on peut choisir $y_n \in \{k \cdot 8^{-n}, (k+1) \cdot 8^{-n}\}$ de sorte à ce que $\frac{|f(y_n)-f(x)|}{|y-x|} \geqslant \frac{|f((k+1)\cdot 8^{-n}) - f(k\cdot 8^{-n})|}{(k+1)\cdot 8^{-n} - k \cdot 8^{-n}}$.)

15. Soient $a < b$ deux réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur (a,b). Montrer que f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$ si et seulement si $|f'(x)| \leqslant k$ pour tout $x \in (a,b)$.

16. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\dfrac{1}{2\sqrt{n^2+1}} \leqslant \sqrt{n^2+1} - n \leqslant \dfrac{1}{2n}$.

(Indication : Utiliser le point 1 de l'Exercice 4.2.)

b) En déduire que
$$n + \frac{n}{2n^2+1} \leqslant \sqrt{n^2+1} \leqslant n + \frac{1}{2n}.$$

c) En déduire une valeur approchée de $\sqrt{401}$ (avec un contrôle de la précision).

17. **(Étude de suites données par récurrence)** Soit $f \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ et ℓ un point fixe de f (c'est-à-dire tel que $f(\ell) = \ell$). On définit une suite (u_n) par la relation de récurrence $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$.

a) Supposons $|f'(\ell)| < 1$.

i) Soit $\epsilon > 0$ tel que $|f'(\ell)| < 1 - \epsilon$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $|f'(x)| \leqslant 1 - \epsilon$ pour tout $x \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$. On fixe δ avec cette propriété.

ii) Montrer que si $u_N \in [\ell - \delta, \ell + \delta]$, alors $|u_{n+1} - \ell| \leqslant (1 - \epsilon)|u_n - \ell|$ pour tout $n \geqslant N$.

iii) Montrer que $|u_n - \ell| \leqslant (1 + \epsilon)^n |u_0 - \ell|$ si u_0 est suffisamment proche de ℓ. En déduire que, pour tout u_0 suffisamment proche de ℓ, (u_n) tend vers ℓ. On dit que le point fixe ℓ est **attractif** (*cf.* Fig. 4.8, gauche).

b) Supposons $|f'(\ell)| > 1$. Montrer, en raisonnant par l'absurde, que (u_n) converge vers ℓ si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \ell$ pour tout $n \geqslant N$. On dit que le point fixe ℓ est **répulsif** (*cf.* Fig. 4.8, droite).

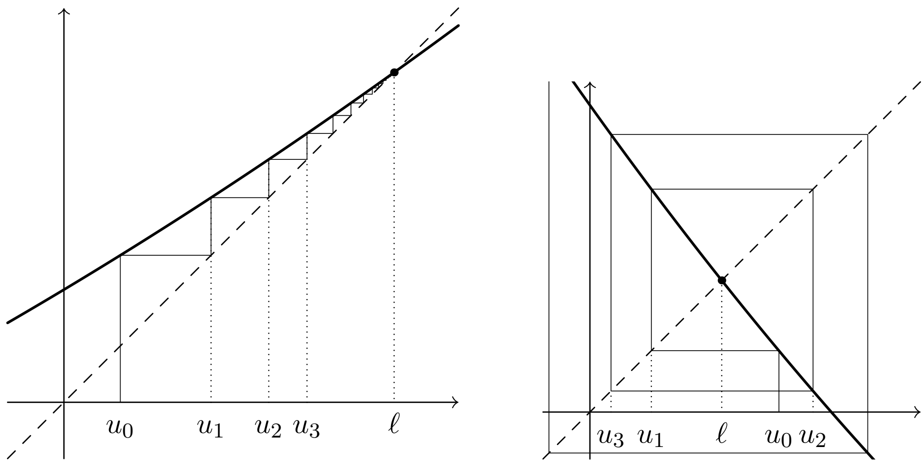


FIGURE 4.8: Suites du type $u_{n+1} \coloneqq f(u_n)$. **Gauche :** ℓ est un point fixe attractif. **Droite :** ℓ est un point fixe répulsif.

4.7.2 Dérivées d'ordres supérieurs

Exercice 4.8

1. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f, g \in \mathscr{D}^n(I)$.

a) Montrer la **formule de Leibniz** : $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.

(Indication : s'inspirer de la preuve de la formule du binôme de Newton.)

b) Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2/(x-1)$. Calculer $f^{(4)}(2)$ en utilisant le point précédent.

c) Établir l'identité
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$
en calculant la dérivée d'ordre n de la fonction $x \mapsto x^n(1+x)^n$ de deux façons différentes.

2. Calculer la dérivée $n^{\text{ème}}$ des fonctions suivantes :

a) $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ b) $x \mapsto x^2(1+x)^n$ c) $x \mapsto x^n(1+x)^n$

3. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $a < b$ dans I.

a) Soit $f \in \mathscr{D}^2(I)$ telle qu'il existe $x_1 < x_2 < x_3$ dans $[a, b]$ avec $f(x_1) = f(x_2) = f(x_3) = 0$. Montrer que f'' s'annule en au moins un point de (a, b).

b) Généraliser le résultat précédent : soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{D}^n(I)$ telle que f s'annule en $n+1$ points $x_1 < x_2 < \cdots < x_{n+1}$ dans $[a, b]$. Montrer, par récurrence, que $f^{(n)}$ s'annule au moins une fois sur (a, b).

4.7.3 Extrema, étude de fonctions

Exercice 4.9

1. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes dans les domaines spécifiés.

a) $x \mapsto 5x^2 - 10x + 15$ sur $\mathbb{R}$ b) $x \mapsto \dfrac{x^2 - 5x}{x^2 - 1}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

c) $x \mapsto x^2 - |x + \frac{1}{4}| + 1$ sur $\mathbb{R}$ d) $x \mapsto (x-1)^2 - 2|2-x|$ sur $(2, 3)$

2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{10}x^{10} - \frac{2}{9}x^9 + \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{2}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 2x$. Montrer que 1 et -1 sont deux points stationnaires de f, déterminer s'il s'agit d'extrema et, le cas échéant, de quel type.

3. Parmi tous les rectangles d'aire 1, déterminer ceux dont le périmètre est minimal.

4. Déterminer le ou les points de la parabole d'équation $y = x^2 + 1$ minimisant la distance euclidienne au point de coordonnées $(0, 2)$.

5. On considère deux couloirs se rencontrant à angle droit, de 8 mètres et 1 mètre de largeur respectivement. On souhaite faire passer une tige droite (rigide et très lourde) en la poussant à même le sol du premier au second couloir. Quelle longueur maximale la tige peut-elle avoir pour que cela soit possible ?

4.7.4 Formule de Taylor, comparaison asymptotique

Exercice 4.10

1. Déterminer les limites suivantes à l'aide de la formule de Taylor–Young.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1 - 3x + x^2} - \sqrt{1 - 2x + x^2}}{1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3}x^2}}$ b) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} x\left(\sqrt{x^2 + x + 1} - x - \tfrac{1}{2}\right)$

2. Déterminer le polynôme de Taylor $T_2 f(x; 1)$ de la fonction $f(x) \coloneqq x^{1/3}$. En déduire une approximation de $\sqrt[3]{1/2}$, puis donner un majorant de l'erreur commise à l'aide du Théorème de Taylor–Lagrange (*cf.* (4.2)).

3. Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} = f''(x_0).$$

4. (***f''* $\geqslant$ 0 $\Rightarrow$ *f* convexe**) Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert non vide et $f \in \mathcal{D}^2(I)$ telle que $f''(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. Le but est de montrer que f est convexe sur I.

a) Montrer que $f(u) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(u - x_0)$ pour tout $x_0, u \in I$.
(Indication : utiliser le théorème de Taylor–Lagrange.)

b) Soient $x, y \in I$ et $\alpha \in [0,1]$. En appliquant l'inégalité précédente avec $x_0 = \alpha x + (1-\alpha)y$ et $u = x$, respectivement $u = y$, montrer que $\alpha f(x) + (1-\alpha)f(y) \geqslant f\big(\alpha x + (1-\alpha)y\big)$.

5 Calcul intégral

Dans le chapitre précédent, nous avons introduit et étudié la notion de dérivée d'une fonction f. Il est naturel de se poser la question suivante : sous quelle condition sur la fonction f est-il possible de trouver une fonction F telle que $f = F'$ (on dira que F est une *primitive* de f) ? Et lorsque cela est possible, la fonction F est-elle unique ?

La réponse à la seconde question est facile : comme on l'a vu dans l'Exercice 4.3, $F' = G'$ si et seulement si il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $G = F + c$.

La réponse à la première question est beaucoup plus subtile. Dans ce chapitre, nous déterminerons certaines classes de fonctions pour lesquelles ceci est possible.

En dépit de la motivation précédente, la construction de l'intégrale de Riemann dans ce chapitre se fait indépendamment de la notion de dérivée (et donc de primitive). Ceci est important, car définir l'intégrale d'une fonction f via ses primitives limiterait considérablement la classe des fonctions intégrables : on peut en effet montrer (Exercice 4.7 point **12.**) que la dérivée d'une fonction possède toujours la propriété des valeurs intermédiaires. Par exemple, la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := 0$ si $x < 0$ et $f(x) := 1$ si $x \geqslant 0$ ne peut pas être la dérivée d'une fonction définie sur $[-1, 1]$ et ne possède donc pas de primitive sur cet intervalle.

Une fois la notion d'intégrale précisée, les liens fondamentaux entre le calcul différentiel et le calcul intégral seront abordés dans la Section 5.3.

5.1 Intégrabilité au sens de Riemann

Remarque 5.1. *Dans toute cette section, nous nous restreindrons à des fonctions* bornées f *définies sur un intervalle* fermé et borné $[a, b]$*, avec* $a < b$. ◇

5.1.1 Subdivisions et sommes de Darboux

Soient $a < b$ deux réels. Une **subdivision** de l'intervalle $[a, b]$ est un ensemble fini de nombres réels $\sigma := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ tel que

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b.$$

On note $\Delta_{a,b}$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$ (notez que n n'est pas fixé).

Étant donné $\sigma = \{x_0, x_1, \dots, x_n\} \in \Delta_{a,b}$, on définit $I_j := [x_{j-1}, x_j]$, $\delta_j := x_j - x_{j-1}$ et $\delta(\sigma) := \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction <u>bornée</u>. Introduisons

$$m_j := \inf_{x \in I_j} f(x) \qquad \text{et} \qquad M_j := \sup_{x \in I_j} f(x).$$

Définition 5.2. *Les* ***sommes de Darboux inférieure et supérieure*** *de f relativement à σ sont définies, respectivement, par*

$$S_-(f;\sigma) := \sum_{j=1}^n m_j\delta_j \qquad \text{et} \qquad S_+(f;\sigma) := \sum_{j=1}^n M_j\delta_j.$$

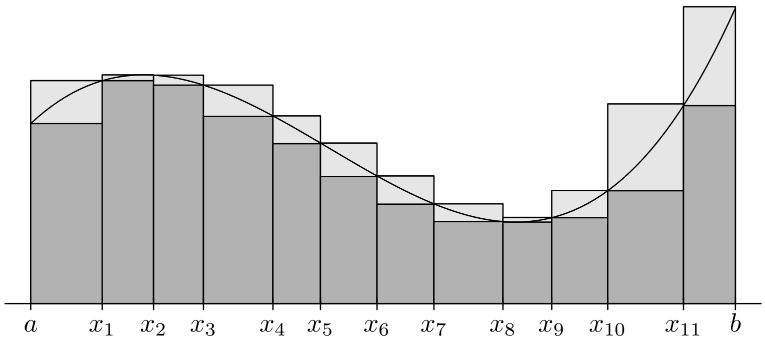


FIGURE 5.1: Dans le cas d'une fonction positive, comme ici, la somme de Darboux inférieure correspond à l'aire des rectangles représentés en gris foncé, la somme de Darboux supérieure correspond à l'aire totale des rectangles grisés (clairs et foncés), et ces sommes fournissent donc, respectivement, un minorant et un majorant de l'aire de la région délimitée par le graphe de la fonction f et l'axe des abscisses.

On a évidemment

$$S_-(f;\sigma) \leqslant S_+(f;\sigma).$$

De plus, si $\sigma, \sigma' \in \Delta_{a,b}$ satisfont $\sigma \subset \sigma'$ (on dit alors que σ' est un **raffinement** de σ), on a nécessairement

$$S_-(f;\sigma) \leqslant S_-(f;\sigma') \leqslant S_+(f;\sigma') \leqslant S_+(f;\sigma). \tag{5.1}$$

Exercice 5.1

Démontrer (5.1). (Indication : considérer d'abord le cas où σ' est obtenue en ajoutant un point à σ, puis procéder par récurrence.)

Lemme 5.3. *Soient $\sigma, \sigma' \in \Delta_{a,b}$. Alors, $S_-(f;\sigma) \leqslant S_+(f;\sigma')$.*

Démonstration. $\sigma \cup \sigma'$ est un raffinement à la fois de σ et de σ'. Il suit donc de (5.1) que

$$S_-(f;\sigma) \leqslant S_-(f;\sigma\cup\sigma') \leqslant S_+(f;\sigma\cup\sigma') \leqslant S_+(f;\sigma'). \qquad \square$$

5.1.2 Définition de l'intégrale et critères d'intégrabilité

Il suit du Lemme 5.3 que $\{S_-(f;\sigma)\,|\,\sigma \in \Delta_{a,b}\}$ est majoré (par $S_+(f;\sigma')$ pour n'importe quelle subdivision σ' de $[a,b]$). De même, $\{S_+(f;\sigma)\,|\,\sigma \in \Delta_{a,b}\}$ est minoré. On peut donc définir

$$S_-(f) := \sup\{S_-(f;\sigma)\,|\,\sigma\in\Delta_{a,b}\} \qquad \text{et} \qquad S_+(f) := \inf\{S_+(f;\sigma)\,|\,\sigma\in\Delta_{a,b}\}.$$

On a, pour tout $\sigma, \sigma' \in \Delta_{a,b}$,

$$S_+(f;\sigma) \geqslant S_+(f) \geqslant S_-(f) \geqslant S_-(f;\sigma'). \tag{5.2}$$

La première et la dernière inégalité suivent immédiatement des définitions. Pour montrer l'inégalité $S_+(f) \geqslant S_-(f)$, on fixe $\epsilon > 0$ et on observe que, par le Lemme 1.12, il existe σ et $\sigma' \in \Delta_{a,b}$ telles que $S_+(f;\sigma) \leqslant S_+(f) + \epsilon$ et $S_-(f;\sigma') \geqslant S_-(f) - \epsilon$. Par conséquent, il suit du Lemme 5.3 que $S_+(f) - S_-(f) \geqslant S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma') - 2\epsilon \geqslant -2\epsilon$. ϵ étant arbitraire, l'inégalité est démontrée.

Définition 5.4. *Soient $a < b$ deux réels. On dit que la fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* ***intégrable sur*** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ *(au sens de Riemann) si $S_-(f) = S_+(f)$. Dans ce cas, on écrit*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := S_-(f) = S_+(f).$$

*Cette quantité est appelée l'***intégrale (de Riemann) de $\boldsymbol{f}$ sur** $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$.

Si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b]$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ correspond à l'aire délimitée par le graphe de f, l'axe des abscisses et les deux segments joignant, respectivement, a à $f(a)$ et b à $f(b)$ (*cf.* Figure 5.1).

Introduisons un peu de terminologie : dans l'écriture $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$:

- ▷ a est appelé la **borne inférieure** de l'intégrale et b la **borne supérieure** ;
- ▷ f est l'**intégrande** [1] ;
- ▷ x est la **variable d'intégration** ;
- ▷ $[a,b]$ est l'**intervalle d'intégration**.

Remarque 5.5. *Évidemment, dans l'expression $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, la variable x est muette, c'est-à-dire qu'elle peut être substituée par n'importe quel autre symbole sans changer la valeur de l'intégrale ; par exemple, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour cette raison, lorsque cela ne risque pas de prêter à confusion, on utilisera la notation simplifiée*

$$\int_a^b f \equiv \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \diamond$$

Nous pouvons à présent énoncer un premier critère d'intégrabilité, qui se révèlera utile plus tard.

Lemme 5.6. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors, f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \sigma \in \Delta_{a,b},\ S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) < \epsilon.$$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Fixons $\epsilon > 0$. Il existe $\sigma \in \Delta_{a,b}$ telle que $S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) < \epsilon$. Par conséquent, il suit de (5.2) que

$$0 \leqslant S_+(f) - S_-(f) \leqslant S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) < \epsilon.$$

ϵ étant arbitraire, on conclut que $S_+(f) = S_-(f)$ ce qui démontre que f est intégrable.
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit f intégrable sur $[a,b]$. Fixons $\epsilon > 0$. Il suit du Lemme 1.12 que l'on peut trouver $\sigma_1, \sigma_2 \in \Delta_{a,b}$ telles que

$$S_-(f;\sigma_1) > S_-(f) - \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad S_+(f;\sigma_2) < S_+(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

La subdivision $\sigma := \sigma_1 \cup \sigma_2$ étant un raffinement des subdivisions σ_1 et σ_2, il suit de (5.1) que

$$S_-(f;\sigma) > S_-(f) - \frac{\epsilon}{2} \qquad \text{et} \qquad S_+(f;\sigma) < S_+(f) + \frac{\epsilon}{2}.$$

On a donc bien

$$S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) = \overbrace{S_+(f;\sigma) - S_+(f)}^{<\epsilon/2} + \overbrace{S_+(f) - S_-(f)}^{=0} + \overbrace{S_-(f) - S_-(f;\sigma)}^{<\epsilon/2} < \epsilon. \qquad \square$$

1. Notons que c'est un mot masculin.

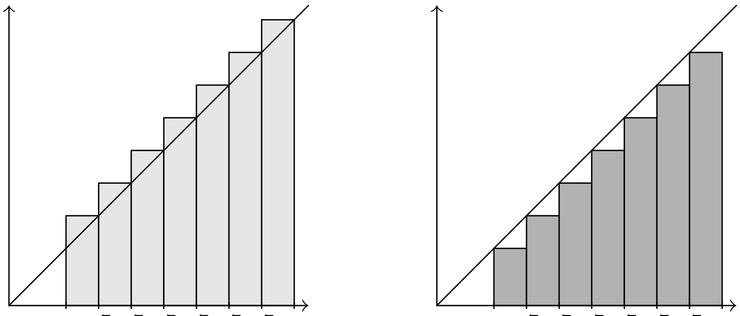


FIGURE 5.2: Les sommes de Darboux supérieures et inférieure de l'Exemple 5.7 (avec $n = 7$).

Exemple 5.7. Utilisons ce critère pour intégrer notre première fonction. Soit $b > a \geqslant 0$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la **subdivision uniforme** $\sigma_n := \{x_0^n, \ldots, x_n^n\}$ avec $x_k^n := a + k\frac{b-a}{n}$. Clairement, $\delta_j = \frac{b-a}{n}$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$. On a alors (*cf.* Figure 5.2),

$$\begin{aligned} S_+(f;\sigma_n) &= \sum_{k=1}^{n} x_k^n \delta_k = \sum_{k=1}^{n} (a + k\frac{b-a}{n})\frac{b-a}{n} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \\ &= a(b-a) + \frac{1}{2}(b-a)^2 + \frac{1}{2n}(b-a)^2 = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2n}(b-a)^2 \end{aligned}$$

et

$$S_-(f;\sigma_n) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^n \delta_{k+1} = a(b-a) + \frac{(b-a)^2}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2n}(b-a)^2.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Alors, pour tout $n > (b-a)^2/\epsilon$, on a $S_+(f;\sigma_n) - S_-(f;\sigma_n) = \frac{(b-a)^2}{n} < \epsilon$. L'intégrabilité de f suit donc du Lemme 5.6 et on obtient $\int_a^b x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{2}a^2$. ◇

À ce stade, la question naturelle est évidemment : sous quelles conditions une fonction est-elle intégrable ? Commençons par donner un exemple de fonction non intégrable.

Exemple 5.8. La fonction caractéristique des rationnels $\chi_{\mathbb{Q}}$ sur n'est pas intégrable sur $[0, 1]$. En effet, quelle que soit la subdivision σ de $[0, 1]$, ses intervalles I_j contiennent tous des rationnels et des irrationnels. Par conséquent, pour tout σ,

$$S_-(\chi_{\mathbb{Q}};\sigma) = 0 \qquad \text{et} \qquad S_+(\chi_{\mathbb{Q}};\sigma) = 1.$$ ◇

Nous verrons plus tard, dans la section 5.2.1, que l'intégrabilité est assurée dès que f est monotone ou continue. L'exemple suivant montre que des fonctions beaucoup plus « sauvages » peuvent parfois être intégrées.

Exemple 5.9. Considérons la fonction [2] $T : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$T(x) := \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

où la fraction p/q est supposée irréductible. Alors, T est intégrable sur $[0, 1]$. En effet, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble $\mathscr{B} := \{x \in [0, 1] \mid T(x) > \epsilon\}$ contient un nombre fini d'éléments ; notons-le N_ϵ. On choisit $\sigma \in \Delta_{0,1}$ telle que $\delta(\sigma) < \epsilon/N_\epsilon$. Avec ce choix, au plus N_ϵ intervalles de σ contiennent au moins un

2. Il s'agit d'une extension de la fonction de Thomae, introduite dans l'Exercice 3.4, à l'intervalle $[0, 1]$.

point de $\mathscr{B}$; sur ces intervalles, $\sup T \leqslant 1$. Sur les autres intervalles, $\sup T \leqslant \epsilon$. On a donc (chaque intervalle étant de longueur au plus $\delta(\sigma)$)

$$S_+(T;\sigma) \leqslant \epsilon + N_\epsilon \cdot \delta(\sigma) \cdot 1 < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Comme on a évidemment $S_-(T;\sigma) = 0$, l'intégrabilité suit du Lemme 5.6 et on a $\int_0^1 T = 0$. $\diamond$

Donnons à présent un second critère d'intégrabilité. Notons $\Delta_{a,b;\delta} := \{\sigma \in \Delta_{a,b} \,|\, \delta(\sigma) \leqslant \delta\}$.

Lemme 5.10. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. Alors, f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \sigma \in \Delta_{a,b;\delta}, \quad S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) < \epsilon.$$

Démonstration. $\boxed{\Leftarrow}$ Cette implication suit immédiatement du Lemme 5.6.
$\boxed{\Rightarrow}$ Fixons $\epsilon > 0$. Par le Lemme 5.6, on peut trouver une subdivision $\sigma' := \{x'_0, \dots, x'_{n'}\} \in \Delta_{a,b}$ telle que $S_+(f;\sigma') - S_-(f;\sigma') < \epsilon/2$. Soit $\delta > 0$, que l'on fixera plus tard. Considérons à présent une subdivision $\sigma := \{x_0, \dots, x_n\} \in \Delta_{a,b;\delta}$ et notons $\sigma'' := \sigma \cup \sigma'$. Observons que $\sigma'' \setminus \sigma$ contient moins de n' points. Par conséquent, la longueur des intervalles de σ n'excédant pas δ, on a (voir la Figure 5.3)

$$\begin{aligned} S_+(f;\sigma) &\leqslant S_+(f;\sigma'') + (n'-1)\delta M \leqslant S_+(f;\sigma') + 2n'\delta M, \\ S_-(f;\sigma) &\geqslant S_-(f;\sigma'') - (n'-1)\delta M \geqslant S_-(f;\sigma') - 2n'\delta M, \end{aligned}$$

où l'on a introduit $M := \sup_{[a,b]}|f|$. On a donc

$$S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma) \leqslant S_+(f;\sigma') - S_-(f;\sigma') + 4n'\delta M < \frac{\epsilon}{2} + 4n'\delta M = \epsilon,$$

si l'on choisit $\delta := \epsilon/\big(8n'M\big)$. $\square$

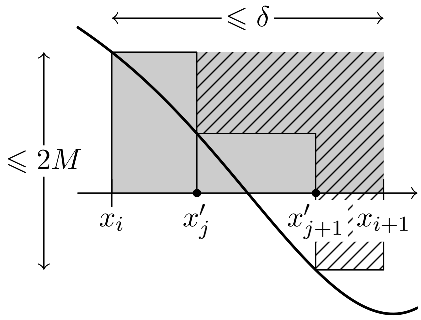


FIGURE 5.3: Deux points successifs x_i et x_{i+1} de la subdivision σ. x'_j et x'_{j+1} sont les deux seuls points de la subdivision σ' tombant dans l'intervalle (x_i, x_{i+1}). La région grisée correspond à la contribution de cet intervalle à $S_+(f;\sigma)$. L'aire de la région hachurée correspond à $S_+(f;\sigma) - S_+(f;\sigma'')$. Observez que cette aire est nécessairement inférieure ou égale à $\delta \cdot 2M$, car $x_{i+1} - x_i \leqslant \delta$ et $|\sup_{[x_i,x_{i+1}]} f - \inf_{[x_i,x_{i+1}]} f| \leqslant 2M$. De plus, le nombre d'intervalles affectés par un tel changement est inférieur à n'.

5.2 Propriétés de l'intégrale

Soit $\sigma = (x_0, \dots, x_n) \in \Delta_{a,b}$ et $\boldsymbol{\xi} := \{\xi_1, \dots, \xi_n\} \subset \mathbb{R}$ tel que $\xi_j \in I_j$ pour chaque $j \in [\![1,n]\!]$. La quantité

$$R(f;\sigma,\boldsymbol{\xi}) := \sum_{j=1}^n f(\xi_j)\delta_j$$

est appelée une **somme de Riemann**. Par définition, $\inf_{I_j} f \leqslant f(\xi_j) \leqslant \sup_{I_j} f$, et on a donc

$$S_-(f;\sigma) \leqslant R(f;\sigma,\boldsymbol{\xi}) \leqslant S_+(f;\sigma). \tag{5.3}$$

Théorème 5.11. *Soit f une fonction intégrable sur $[a,b]$, soit $(\delta_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$ et, pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\sigma_n \in \Delta_{a,b;\delta_n}$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} S_-(f;\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} S_+(f;\sigma_n) = \lim_{n\to\infty} R(f;\sigma_n,\boldsymbol{\xi}_n) = \int_a^b f,$$

pour tout choix des points $\boldsymbol{\xi}_n$ associés à σ_n.

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. Par le Lemme 5.10, il existe N tel que $0 \leqslant S_+(f;\sigma_n) - S_-(f;\sigma_n) < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $S_-(f;\sigma_n) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_+(f;\sigma_n)$ pour tout n, il suit que $\lim_{n\to\infty} S_-(f;\sigma_n) = \int_a^b f$ et $\lim_{n\to\infty} S_+(f;\sigma_n) = \int_a^b f$. On déduit finalement de (5.3) que $\lim_{n\to\infty} R(f;\sigma_n,\boldsymbol{\xi}_n) = \int_a^b f$. □

On verra ci-dessous que le théorème précédent permet de démontrer simplement de nombreuses propriétés de l'intégrale de Riemann. Avant cela, il nous faut un résultat de stabilité de la classe des fonctions intégrables sous certaines opérations.

Théorème 5.12. *Soient f et g deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors,*

$$f+g, \quad f\cdot g, \quad f/g, \quad \lambda f, \quad |f|$$

sont intégrables sur $[a,b]$ (dans le cas de f/g, on suppose que $\inf_{[a,b]}|g| > 0$).

Démonstration. ▷ La preuve repose sur une observation simple. Soit $\sigma \in \Delta_{a,b}$ et I_j un des intervalles associés. Fixons $\epsilon > 0$. Par le Lemme 1.12, il existe $\xi, \xi' \in I_j$ tels que $f(\xi) \leqslant m_j + \epsilon$ et $f(\xi') \geqslant M_j - \epsilon$. Par conséquent,

$$M_j - m_j \geqslant \sup_{x,y\in I_j} \bigl(f(x) - f(y)\bigr) \geqslant f(\xi') - f(\xi) \geqslant M_j - m_j - 2\epsilon.$$

On en conclut que

$$\sup_{x,y\in I_j} |f(x) - f(y)| = \sup_{x,y\in I_j} \bigl(f(x) - f(y)\bigr) = M_j - m_j. \tag{5.4}$$

Passons à présent à la preuve des différentes affirmations.

▷ Soit $h := f + g$. On définit $M_j^f := \sup_{I_j} f$; M_j^g, M_j^h, m_j^f, m_j^g et m_j^h sont définis de façon similaire. Il suit alors de l'inégalité triangulaire que, pour tout $x, y \in I_j$,

$$|h(x) - h(y)| \leqslant |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leqslant \bigl(M_j^f - m_j^f\bigr) + \bigl(M_j^g - m_j^g\bigr). \tag{5.5}$$

Par conséquent, on déduit de (5.4) que

$$M_j^h - m_j^h \leqslant \bigl(M_j^f - m_j^f\bigr) + \bigl(M_j^g - m_j^g\bigr),$$

et donc

$$\begin{aligned} S_+(f+g;\sigma) - S_-(f+g;\sigma) &= \sum_{j=1}^n (M_j^h - m_j^h)\delta_j \\ &\leqslant \bigl(S_+(f;\sigma) - S_-(f;\sigma)\bigr) + \bigl(S_+(g;\sigma) - S_-(g;\sigma)\bigr). \end{aligned}$$

Soit $\epsilon > 0$. Par le Lemme 5.10, on peut trouver $\delta > 0$ et $\sigma \in \Delta_{a,b;\delta}$ de sorte à ce que le membre de droite soit inférieur à ϵ. L'intégrabilité de $f + g$ suit donc du Lemme 5.6.

▷ Dans le cas de $h \coloneqq f \cdot g$, on pose $M \coloneqq \max\{\sup_{[a,b]}|f|, \sup_{[a,b]}|g|\}$ et on remplace (5.5) par

$$\begin{aligned}|h(x) - h(y)| = \big|f(x)\big(g(x) - g(y)\big) + g(y)\big(f(x) - f(y)\big)\big| &\leqslant M|g(x) - g(y)| + M|f(x) - f(y)| \\ &\leqslant M(M_j^g - m_j^g) + M(M_j^f - m_j^f),\end{aligned}$$

pour tout $x, y \in I_j$. On conclut ensuite comme précédemment.

▷ Pour le cas de f/g, observez que, puisque $f/g = f \cdot (1/g)$, il suit du cas précédent qu'il suffit de montrer l'intégrabilité de $h \coloneqq 1/g$. Dans ce cas, on remplace (5.5) par

$$|h(x) - h(y)| = \frac{|g(y) - g(x)|}{|g(x)| \cdot |g(y)|} \leqslant (\inf_{[a,b]}|g|)^{-2}\, |g(x) - g(y)| \leqslant (\inf_{[a,b]}|g|)^{-2}\, (M_j^g - m_j^g),$$

pour tout $x, y \in I_j$. La conclusion suit comme avant.

▷ Lorsque $h \coloneqq \lambda f$, on remplace (5.5) par

$$|h(x) - h(y)| = |\lambda| \cdot |f(x) - f(y)| \leqslant |\lambda|(M_j^f - m_j^f),$$

pour tout $x, y \in I_j$ et on conclut comme ci-dessus.

▷ Finalement, lorsque $h \coloneqq |f|$, on remplace (5.5) par

$$|h(x) - h(y)| = \big||f(x)| - |f(y)|\big| \leqslant |f(x) - f(y)| \leqslant (M_j^f - m_j^f),$$

pour tout $x, y \in I_j$ et on conclut comme auparavant. □

Nous sommes à présent en mesure de démontrer quelques propriétés importantes de l'intégrale de Riemann.

Proposition 5.13 (Linéarité de l'intégrale)**.** *Soient $a < b$ deux réels, f, g bornées et intégrables sur $[a, b]$. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

Démonstration. Clairement, pour toute subdivision $\sigma \in \Delta_{a,b}$ et tout $\boldsymbol{\xi}$ compatible,

$$R(\alpha f + \beta g; \sigma, \boldsymbol{\xi}) = \alpha R(f; \sigma, \boldsymbol{\xi}) + \beta R(g; \sigma, \boldsymbol{\xi}).$$

L'affirmation suit donc immédiatement du Théorème 5.11, puisque l'intégrabilité de f, g et $\alpha f + \beta g$ (par le Théorème 5.12) implique que ces trois sommes de Riemann convergent vers les intégrales correspondantes lorsque $\delta(\sigma) \to 0$. □

Proposition 5.14 (Monotonicité de l'intégrale)**.** *Soient $a < b$ deux réels et f, g bornées et intégrables sur $[a, b]$ et telles que $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a, b]$. Alors,*

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g. \tag{5.6}$$

Démonstration. C'est à nouveau une conséquence immédiate du Théorème 5.11, puisque

$$R(f; \sigma, \boldsymbol{\xi}) \leqslant R(g; \sigma, \boldsymbol{\xi}).$$ □

Exercice 5.2

Déduire de la Proposition 5.14 l'**inégalité triangulaire** : pour tout $a < b$ et f bornée et intégrable sur $[a, b]$,

$$\Big|\int_a^b f\Big| \leqslant \int_a^b |f|.$$

Proposition 5.15 (Additivité de l'intégrale)**.** *Soient $a < c < b$ trois réels et f bornée et intégrable sur $[a, c]$ et sur $[c, b]$. Alors, f est intégrable sur $[a, b]$ et*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f. \tag{5.7}$$

Démonstration. Pour toute paire $\sigma' \in \Delta_{a,c}$ et $\sigma'' \in \Delta_{c,b}$, $\sigma := \sigma' \cup \sigma''$ est une subdivision de $[a, b]$. On en déduit immédiatement que les sommes de Darboux sur $[a, b]$ sont égales à la somme des sommes de Darboux sur $[a, c]$ et $[c, b]$. □

Il est utile de définir, pour $a < b$,

$$\int_b^a f := -\int_a^b f \qquad \text{et} \qquad \int_a^a f := 0.$$

Avec ces conventions, l'identité (5.7) s'applique à tout triplet $a, b, c \in \mathbb{R}$. (Par contre, (5.6) ne s'applique que si $a < b$, l'inégalité étant renversée si $b < a$.)

5.2.1 Deux classes de fonctions intégrables

Dans cette section, nous établissons l'intégrabilité de deux classes de fonctions. La première est celle des fonctions monotones.

Théorème 5.16. *Soit $a < b$ deux réels. Toute fonction monotone sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. On suppose f croissante, le cas d'une fonction décroissante se traitant de la même façon. Dans ce cas, pour tout $\sigma \in \Delta_{a,b}$,

$$m_j := \inf_{I_j} f = f(x_{j-1}) \qquad \text{et} \qquad M_j := \sup_{I_j} f = f(x_j).$$

Soit $\epsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, considérons la subdivision $\sigma_n = \{x_j := a + j(b-a)/n \,|\, 0 \leqslant j \leqslant n\}$. Alors,

$$S_+(f; \sigma_n) - S_-(f; \sigma_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{j=1}^{n} \bigl(f(x_j) - f(x_{j-1})\bigr) = \frac{b-a}{n} \bigl(f(b) - f(a)\bigr) < \epsilon,$$

dès que n est choisi suffisamment grand. La conclusion suit donc du Lemme 5.6. □

Une seconde classe de fonctions intégrables est celle des fonctions continues.

Théorème 5.17. *Soit $a < b$ deux réels. Toute fonction continue sur $[a, b]$ est intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$. Fixons $\epsilon > 0$. Par le Théorème 3.44, la fonction f est uniformément continue sur $[a, b]$. Par conséquent, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in [a, b], \Bigl[|y - x| \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad |f(y) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}\Bigr].$$

Fixons une subdivision $\sigma \in \Delta_{a,b;\delta}$. Alors, par (5.4), $M_j - m_j \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi,

$$S_+(f; \sigma) - S_-(f; \sigma) = \sum_{j=1}^{n} (M_j - m_j)\delta_j \leqslant \frac{\epsilon}{2(b-a)} \sum_{j=1}^{n} \delta_j = \frac{1}{2}\epsilon < \epsilon. \tag{5.8}$$

La conclusion suit donc du Lemme 5.6. □

Remarque 5.18. *En combinant les Théorèmes 5.16 et 5.17, on peut immédiatement déduire que toute fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bornée et possédant un nombre fini de discontinuités est intégrable, puisqu'elle peut alors être écrite $f = g_1 + g_2 + g_3$ avec g_1 continue, g_2 croissante et g_3 décroissante (cf. Figure 5.4). Alternativement, on peut adapter la preuve du théorème précédent en raisonnant de la même façon que dans l'Exemple 5.9.*

Mentionnons également qu'il est possible de caractériser exactement l'ensemble des fonctions intégrables au sens de Riemann. Pour des raisons de temps, nous ne discuterons pas ce sujet ici. ◇

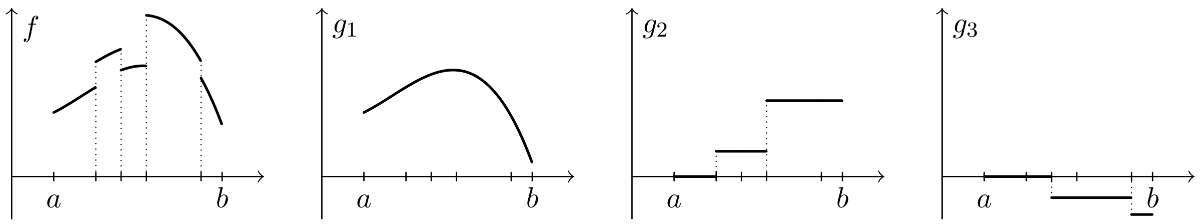


FIGURE 5.4: La décomposition de la Remarque 5.18 : $f = g_1 + g_2 + g_3$. La fonction g_2 est constante par morceaux et ses sauts correspondent aux discontinuités de f où la fonction « saute vers le haut ». g_3 est construite de façon similaire et prend en compte les «sauts vers le bas » de f.

Proposition 5.19 (Théorème de la moyenne). *Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$. Il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b f = f(c)(b - a)$.*

Démonstration. Soient $m := \min_{x\in[a,b]} f(x)$ et $M := \max_{x\in[a,b]} f(x)$. Par le Corollaire 3.30, f atteint toutes les valeurs dans l'intervalle $[m, M]$. Or, en considérant la subdivision σ composée uniquement des points a et b, on a $m(b - a) = S_-(f; \sigma) \leqslant \int_a^b f \leqslant S_+(f; \sigma) = M(b - a)$. On en déduit que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f \in [m, M]$. Il doit donc exister $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f$. □

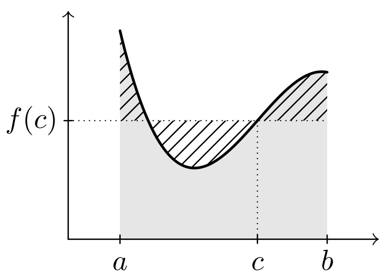


FIGURE 5.5: Théorème de la moyenne : l'aire des régions hachurées situées sous le graphe de f est égale à l'aire de la région hachurée située au-dessus du graphe de f.

5.3 Primitives et théorème fondamental de l'analyse

Le théorème fondamental de l'analyse joue un rôle essentiel à la fois sur un plan conceptuel, en faisant le lien entre dérivées et intégrales, et sur un plan pratique, en fournissant une façon d'évaluer certaines intégrales.

Définition 5.20. *Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}^0([a, b])$. On dit que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une **primitive de f** si F est continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in (a, b)$.*

Théorème 5.21 (Théorème fondamental de l'analyse, partie 1)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. La fonction $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \int_a^x f$ est une primitive de f. De plus, G est une primitive de f si et seulement si il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $G(x) = F(x) + c$ pour tout $x \in [a,b]$.*

Démonstration. Fixons $x_0 \in [a,b]$. Pour tout $x \in (a,b)$, distinct de x_0, le théorème de la moyenne garantit l'existence de $c_{x_0}(x)$ entre x_0 et x tel que $\int_{x_0}^x f = f\big(c_{x_0}(x)\big)(x - x_0)$. Par conséquent,

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f = f\big(c_{x_0}(x)\big)(x - x_0).$$

Ainsi,

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0) + \lim_{x \to x_0} f\big(c_{x_0}(x)\big)(x - x_0) = F(x_0),$$

ce qui montre que F est continue sur $[a,b]$.

D'autre part, f étant continue, on obtient, pour tout $x_0 \in (a,b)$,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} f\big(c_{x_0}(x)\big) = f(x_0),$$

ce qui montre que F est dérivable en x_0 et que $F'(x_0) = f(x_0)$.

Finalement, la dernière affirmation du théorème suit de l'Exercice 4.3. □

Notation. Au vu du résultat précédent, la notation suivante est souvent utilisée pour représenter une primitive quelconque de f : $F = \int f \equiv \int f(x)\,\mathrm{d}x$. On parle alors d'**intégrale indéfinie**. Insistons bien sur le fait que $\int f$ est alors une fonction (en fait, une famille de fonctions) et non pas un nombre !

Corollaire 5.22 (Théorème fondamental de l'analyse, partie 2)**.** *Soient $a < b$ deux réels, $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$ et F une primitive de f. Alors, $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.*

Démonstration. Par le Théorème 5.21, $G(x) := \int_a^x f$ est une primitive de f et il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = G(x) + c$ pour tout $x \in [a,b]$. Puisque $G(a) = 0$, on a $c = F(a)$ et donc $G(x) = F(x) - F(a)$. Par conséquent,

$$\int_a^b f = G(b) = F(b) - F(a).$$ □

Notation. Afin de raccourcir les notations, on écrira parfois $F\Big|_a^b \equiv F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$.

Le théorème précédent fournit une méthode pour calculer une intégrale : trouver une primitive de l'intégrande.

Exemple 5.23. Pour $r \in \mathbb{Q}$, on a vu que $(x^{r+1})' = (r+1)x^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par conséquent, si $r \neq -1$, la fonction $x \mapsto \frac{1}{r+1}x^{r+1}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto x^r$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a donc, pour tout $0 < a < b$,

$$\int_a^b x^r\,\mathrm{d}x = \frac{b^{r+1} - a^{r+1}}{r+1}.$$

Il est évidemment naturel de se demander ce qu'il se passe lorsque $r = -1$. Nous retournerons à cette question au chapitre 6. ◇

Exercice 5.3

Montrer que la version suivante, légèrement plus forte, du théorème de la moyenne suit directement du Corollaire 5.22 et du théorème des accroissements finis : si $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$, alors il existe $c \in (a,b)$ tel que $\int_a^b f = f(c)(b-a)$.

5.4 Propriétés supplémentaires

Le théorème fondamental de l'analyse permet de transférer des propriétés de la dérivée à l'intégrale. Le premier résultat fait partie des outils standards pour évaluer une intégrale.

Proposition 5.24 (Intégration par parties)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f, g \in \mathscr{C}^1([a,b])$. Alors,*

$$\int_a^b fg' = fg\Big|_a^b - \int_a^b f'g.$$

Démonstration. Puisque $(fg)' = f'g + fg'$, il suit du Corollaire 5.22 que

$$\int_a^b f'g + \int_a^b fg' = \int_a^b (f'g + fg') = fg\Big|_a^b. \qquad \square$$

Exemple 5.25. On souhaite évaluer $\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x$. Posons $f'(x) := \sqrt{x+1}$ et $g(x) := x$. On a alors $f(x) = \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}$ et $g'(x) = 1$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\sqrt{x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 f'g = fg\Big|_0^1 - \int_0^1 fg' &= \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}x\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3}(x+1)^{3/2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{3}2^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(x+1)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{4(\sqrt{2}+1)}{15}. \qquad \diamond\end{aligned}$$

Proposition 5.26 (Dérivation par rapport aux bornes)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Soient $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $g, h : I \to (a,b)$ deux fonctions dérivables sur I. Soit $K : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par*

$$K(x) := \int_{h(x)}^{g(x)} f.$$

Alors, K est dérivable sur I et

$$K'(x) = g'(x)f\big(g(x)\big) - h'(x)f\big(h(x)\big).$$

Démonstration. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ une primitive de f. Alors,

$$K(x) = F\big(g(x)\big) - F\big(h(x)\big).$$

Il suit donc de la Proposition 4.10 que K est dérivable sur I et que

$$K'(x) = F'\big(g(x)\big)g'(x) - F'\big(h(x)\big)h'(x) = f\big(g(x)\big)g'(x) - f\big(h(x)\big)h'(x). \qquad \square$$

Le prochain résultat fait également partie des outils classiques pour évaluer une intégrale.

Proposition 5.27 (Changement de variable)**.** *Soient $a < b$ deux réels et $f \in \mathscr{C}^0([a,b])$. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et $\varphi \in \mathscr{C}^1(I)$. On suppose qu'il existe $\alpha < \beta$ dans I tels que $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ et $\varphi((\alpha,\beta)) = (a,b)$. Alors,*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{5.9}$$

Démonstration. Pour $t \in [\alpha,\beta]$, on définit

$$G(t) := \int_a^{\varphi(t)} f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad g(t) := f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t).$$

Il suit de la Proposition 5.26 que $G'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = g(t)$ pour tout $t \in (\alpha, \beta)$. G est donc une primitive de g sur $[\alpha, \beta]$, car $G \in \mathscr{C}^0([\alpha, \beta])$ (c'est la composée de deux fonctions continues). De plus, g est continue. Il suit donc du Corollaire 5.22 que

$$\int_\alpha^\beta g(t)\,\mathrm{d}t = G(\beta) - G(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \qquad \square$$

Exemple 5.28. On veut évaluer $\int_0^1 x\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x$. On pose $f(t) := \sqrt{t}$ et on considère $\varphi : [0,1] \to [1,2]$, $\varphi(t) := t^2 + 1$. On a alors $\varphi'(t) = 2t$ et donc

$$\int_0^1 t\sqrt{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_{\varphi(0)}^{\varphi(1)} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}x^{3/2}\Big|_1^2 = \frac{2\sqrt{2}-1}{3}.$$

$\diamond$

Exemple 5.29. On veut évaluer $\int_1^4 \big(\sqrt{x}+1\big)^{-3}\,\mathrm{d}x$. On pose $f(x) := \big(\sqrt{x}+1\big)^{-3}$ et on considère $\varphi : [2,3] \to [1,4]$, $\varphi(t) := (t-1)^2$ (ainsi, on a $\sqrt{x}+1 = t$ lorsque $x = \varphi(t)$). On a donc $\varphi'(t) = 2(t-1)$ et donc

$$\int_1^4 \big(\sqrt{x}+1\big)^{-3}\,\mathrm{d}x = \int_{\varphi(2)}^{\varphi(3)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_2^3 f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_2^3 \frac{2(t-1)}{t^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1-2t}{t^2}\Big|_2^3 = \frac{7}{36}. \quad \diamond$$

Observez que, dans l'Exemple 5.28, nous avons interprété l'intégrale à évaluer comme le membre de droite de (5.9), alors que, dans l'Exemple 5.29, nous l'avons interprétée comme le membre de gauche de (5.9). Les deux approches sont utiles dans la pratique. Nous verrons d'autres exemples de changements de variable plus tard, lorsque nous aurons enrichi notre palette de fonctions élémentaires.

On peut évidemment également utiliser un changement de variable pour déterminer les primitives d'une fonction et, comme ci-dessus, une telle approche prend deux formes. On laisse les preuves en exercice.

Exercice 5.4

Soit $I, J \subset \mathbb{R}$ deux intervalles ouverts. Soit $f : I \to J$ continue et $\varphi : J \to \mathbb{R}$ dérivable. On pose $g := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

a) Montrer que si F est une primitive de f, alors $F \circ \varphi$ est une primitive de g.

b) Montrer que si G est une primitive de g et φ est inversible, alors $G \circ \varphi^{-1}$ est une primitive de f.

Exemple 5.30. Déterminons les primitives de la fonction $x \mapsto \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$. Introduisons les fonctions $f(x) := 1/x^2$, $\varphi(x) := 1 + x^3$. Une primitive de f est donc $F(x) := -1/x$ et $\varphi'(x) = 3x^2$. Par l'exercice précédent, une primitive de $g := (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ est donnée par $F \circ \varphi$. On a donc

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int (f\circ\varphi)\cdot\varphi' = \frac{1}{3}\int g = \frac{1}{3}F \circ \varphi = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}. \qquad \diamond$$

Remarque 5.31. *Le calcul dans l'exemple précédent est un peu lourd. Une fois bien comprises sa logique et les raisons de sa validité, on procède souvent, dans la pratique, de façon beaucoup plus informelle, en appliquant la recette suivante :*

(i) On identifie la transformation appropriée $t = \psi(x)$.

(ii) On écrit « $\mathrm{d}t = \psi'(x)\,\mathrm{d}x$ *».*

(iii) On calcule $\int [\dots]\,\mathrm{d}t$ *comme fonction de* t *(aucun* x *ne doit apparaître dans ce calcul !).*

(iv) On remplace t *par* $\psi(x)$ *dans le résultat.*

Dans le cas de l'exemple précédent, on poserait donc $t = 1 + x^3$, *puis «* $\mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x$ *», et donc*

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{3t^2}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}\frac{1}{t} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1+x^3}. \qquad \diamond$$

5.5 Intégrales impropres

Définition 5.32. *Soient $\ell \in \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}$, x_0 un point limite de E et $f : E \to \mathbb{R}$.*

- ▷ *f **tend vers ℓ en x_0 par la droite** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[x_0 < x < x_0 + \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big].$$

*Dans ce cas, on écrit $\lim_{x \downarrow x_0} f(x) = \ell$ et ℓ est appelée la **limite à droite de f en x_0**.*

- ▷ *f **tend vers ℓ en x_0 par la gauche** si*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in E, \big[x_0 > x > x_0 - \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon\big].$$

*Dans ce cas, on écrit $\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \ell$ et ℓ est appelée la **limite à gauche de f en x_0**.*

On rencontre également les notations $x \to x_0^+$ au lieu de $x \downarrow x_0$ et $x \to x_0^-$ au lieu de $x \uparrow x_0$.

Exercice 5.5

1. Soient $a < x_0 < b$ des réels. Montrer que $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ est continue en x_0 si et seulement si ses limites à droite et à gauche en x_0 existent et sont toutes deux égales à $f(x_0)$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$. Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée. Montrer que $\lim_{x \uparrow b} f(x)$ existe.

Définition 5.33. *Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle de longueur strictement positive. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **localement intégrable** sur I si elle est intégrable sur $[c, d]$ pour tout $[c, d] \subset I$.*

Définition 5.34.

- ▷ *Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $a \in (-\infty, b)$. On dit que f est **intégrable sur $[a, b)$** si f est localement intégrable sur $[a, b)$ et si la limite*

$$\int_a^b f := \lim_{d \uparrow b} \int_a^d f$$

*existe. Dans ce cas, celle-ci est appelée l'**intégrale impropre de f sur $[a, b)$**.*

- ▷ *Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et $b \in (a, +\infty)$. On dit que f est **intégrable sur $(a, b]$** si f est localement intégrable sur $(a, b]$ et si la limite*

$$\int_a^b f := \lim_{c \downarrow a} \int_c^b f$$

*existe. Dans ce cas, celle-ci est appelée l'**intégrale impropre de f sur $(a, b]$***

- ▷ *Soit $a < b$ dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. On dit que f est **intégrable sur (a, b)** s'il existe $c \in (a, b)$ tel que f soit intégrable sur $(a, c]$ et sur $[c, b)$. Dans ce cas*

$$\int_a^b f := \int_a^c f + \int_c^b f$$

*est appelée l'**intégrale impropre de f sur (a, b)**.*

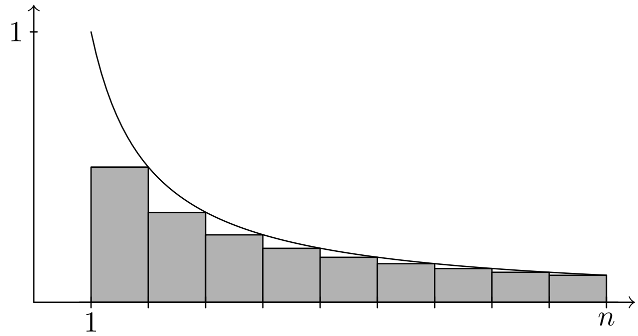


FIGURE 5.6: Minoration de $\int_1^n x^{-1}\,\mathrm{d}x$.

Exemple 5.35. Soit $r \in \mathbb{Q}$.

▷ Si $r < -1$,

$$\int_1^\infty x^r\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to+\infty} \int_1^d x^r\,\mathrm{d}x = \lim_{d\to+\infty} \frac{1}{r+1} x^{r+1}\Big|_1^d = \lim_{d\to+\infty} \frac{d^{r+1}-1}{r+1} = -\frac{1}{r+1}.$$

Si $r > -1$, l'intégrale impropre $\int_1^\infty x^r\,\mathrm{d}x$ n'existe pas.

▷ Si $r > -1$,

$$\int_0^1 x^r\,\mathrm{d}x = \lim_{c\downarrow 0} \int_c^1 x^r\,\mathrm{d}x = \lim_{c\downarrow 0} \frac{1-c^{r+1}}{r+1} = \frac{1}{r+1}.$$

Si $r < -1$, l'intégrale impropre $\int_0^1 x^r\,\mathrm{d}x$ n'existe pas.

▷ Finalement, si $r = -1$, les intégrales impropres $\int_1^\infty x^r\,\mathrm{d}x$ et $\int_0^1 x^r\,\mathrm{d}x$ n'existent ni l'une ni l'autre. En effet, on a d'une part (*cf.* Figure 5.6) que, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_1^n \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=2}^n \int_{k-1}^k \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \xrightarrow{n\to+\infty} +\infty,$$

par la divergence de la série harmonique, prouvée dans l'Exemple 2.45. D'autre part, le changement de variable $x = 1/t$ conduit à (toujours pour $n \in \mathbb{N}^*$)

$$\int_{1/n}^1 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \int_n^1 t\Big(-\frac{1}{t^2}\Big)\mathrm{d}t = \int_1^n \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \xrightarrow{n\to\infty} +\infty. \qquad \diamond$$

Nous allons à présent établir divers critères permettant de démontrer l'existence (ou la non existence) d'intégrales impropres sans avoir à les calculer explicitement. Afin de simplifier l'exposition, nous ne considérerons que le cas d'intégrales impropres sur un intervalle $[a, b) \subset \mathbb{R}$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$), mais toute la discussion qui suit s'étend sans difficulté au cas d'intervalles de la forme $(a, b]$ ou (a, b).

Lemme 5.36. *Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $[a, b)$ et soit $c \in (a, b)$. Alors,*

$$f \text{ intégrable sur } [a,b) \iff f \text{ intégrable sur } [c,b).$$

Démonstration. Pour tout $d \in [c, b)$, $\int_a^d f = \int_a^c f + \int_c^d f$. Par conséquent, la limite $\lim_{d\uparrow b} \int_a^d f$ existe si et seulement si la limite $\lim_{d\uparrow b} \int_c^d f$ existe. □

Théorème 5.37 (Critère de Cauchy pour les intégrales impropres)**.** *Soit $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ localement intégrable sur $[a, b)$. Alors f est intégrable sur $[a, b)$ si et seulement si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $a' \in [a, b)$ tel que, pour tout $[u, v] \subset (a', b)$,*

$$\Big|\int_u^v f\Big| < \epsilon.$$

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $\lim_{d\uparrow b}\int_a^d f = \ell$ et fixons $\epsilon > 0$. Il existe $a' \in [a,b)$ tel que

$$\forall d \in (a',b), \qquad \left|\ell - \int_a^d f\right| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Soit $[u,v] \subset (a',b)$. On a donc bien

$$\left|\int_u^v f\right| = \left|\int_a^v f - \int_a^u f\right| \leqslant \left|\ell - \int_a^v f\right| + \left|\ell - \int_a^u f\right| < \epsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Fixons $\epsilon > 0$ et soit $a' \in [a,b)$ comme dans l'énoncé. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,b)^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to\infty} u_n = b$. On définit $\alpha_n := \int_a^{u_n} f$. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > a'$ pour tout $n \geqslant N$. On a alors

$$\forall n,m \geqslant N, \quad |\alpha_n - \alpha_m| = \left|\int_a^{u_n} f - \int_a^{u_m} f\right| = \left|\int_{u_m}^{u_n} f\right| < \epsilon,$$

ce qui montre que la suite (α_n) est de Cauchy et donc convergente ; on note sa limite ℓ.

Fixons $\epsilon > 0$ et soit $a' \in [a,b)$ comme dans l'énoncé. Choisissons n suffisamment grand pour que $|\alpha_n - \ell| < \epsilon$ et $u_n > a'$. Alors,

$$\forall d \in (a',b), \quad \left|\ell - \int_a^d f\right| \leqslant \left|\ell - \int_a^{u_n} f\right| + \left|\int_a^{u_n} f - \int_a^d f\right| = |\ell - \alpha_n| + \left|\int_d^{u_n} f\right| < 2\epsilon,$$

ce qui montre que l'intégrale impropre existe. □

Théorème 5.38. *Soit f localement intégrable sur $[a,b)$. Alors, l'intégrabilité de $|f|$ sur $[a,b)$ implique l'intégrabilité de f sur $[a,b)$.*

Démonstration. Soit $\epsilon > 0$. On suppose $|f|$ intégrable sur $[a,b)$. Par le Théorème 5.37, il existe donc $a' \in [a,b)$ tel que

$$\forall [u,v] \subset (a',b), \qquad \int_u^v |f| = \left|\int_u^v |f|\right| < \epsilon.$$

On a donc, par l'inégalité triangulaire,

$$\forall [u,v] \subset (a',b), \qquad \left|\int_u^v f\right| \leqslant \int_u^v |f| < \epsilon,$$

et la conclusion suit du Théorème 5.37. □

Théorème 5.39 **(Test de comparaison pour les intégrales impropres).** *Soient f et g localement intégrables sur $[a,b)$ et telles que $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b)$. Alors,*

$$g \text{ intégrable sur } [a,b) \;\Rightarrow\; f \text{ intégrable sur } [a,b).$$

Démonstration. On suppose g intégrable sur $[a,b)$. Considérons la fonction $F : (a,b) \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) := \int_a^x f$. Par hypothèse, F est croissante et

$$F(x) = \int_a^x f \leqslant \int_a^x g \leqslant \int_a^b g.$$

F étant croissante et majorée, $\lim_{x\uparrow b} F(x)$ existe (Exercice 5.5) et f est donc intégrable sur $[a,b)$. □

Théorème 5.40 (Test de comparaison asymptotique)**.** *Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $[a,b)$ telles que $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,b)$. On suppose que $\ell := \lim_{x \uparrow b} \frac{f(x)}{g(x)}$ existe. Alors,*

$$g \text{ intégrable sur } [a,b) \;\Rightarrow\; f \text{ intégrable sur } [a,b). \tag{5.10}$$

Si $\ell \neq 0$, la réciproque de (5.10) est également vraie.

Démonstration. Par hypothèse, il existe $c \in [a,b)$ tel que $f(x) \leqslant (\ell+1)g(x)$ pour tout $x \in [c,b)$. De plus, il suit du Lemme 5.36 que $(\ell+1)g$ est intégrable sur $[c,b)$. Par conséquent, le Théorème 5.39 implique que f est intégrable sur $[c,b)$. Finalement, l'intégrabilité de f sur $[a,b)$ suit du Lemme 5.36.

La seconde affirmation est une conséquence de la première puisque

$$\lim_{x \uparrow b} \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{1}{\ell}. \qquad \square$$

Exemple 5.41. Montrons que la fonction définie par $f(x) := \frac{\sqrt[3]{x+1}}{x^2+7}$ est intégrable sur $[1,+\infty)$. Pour cela, considérons la fonction définie par $g(x) := \frac{x^{1/3}}{x^2} = x^{-5/3}$. Par l'Exemple 5.35, g est intégrable sur $[1,+\infty)$. Puisque

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{7}{x^2}} = 1,$$

l'intégrabilité de f sur $[1,+\infty)$ suit du Théorème 5.40. ◇

Remarque 5.42. *Dans les deux derniers théorèmes, f est supposée ne prendre que des valeurs positives. Lorsque ce n'est pas le cas, on peut d'abord appliquer ces théorèmes à la fonction $|f|$ pour conclure à l'intégrabilité de cette dernière, puis utiliser le Théorème 5.38 pour en déduire l'intégrabilité de f.* ◇

5.6 Exercices supplémentaires

5.6.1 Intégrale de Riemann, primitives

Exercice 5.6

1. Soit $b > 0$ et $f : [0,b] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$. On considère la subdivision $\sigma_n := \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de l'intervalle $[0,b]$ définie par $x_k := bk^2/n^2$ pour $k \in [\![0,n]\!]$.

a) Calculer explicitement les sommes de Darboux $S_+(f;\sigma_n)$ et $S_-(f;\sigma_n)$.

b) Déterminer les limites de ces deux quantités lorsque n tend vers l'infini.

c) En déduire une formule pour $\int_0^b \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.

2. Soient $a < c < b$ et h_1, h_2 des réels. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) := \begin{cases} h_1 & \text{si } a \leqslant x \leqslant c, \\ h_2 & \text{si } c < x \leqslant b. \end{cases}$$

a) Montrer que f est intégrable sur $[a,b]$.

b) Calculer $\int_a^b f$.

c) Existe-t-il $x_* \in [a,b]$ tel que $\int_a^b f = (b-a)f(x_*)$?

3. En les interprétant comme des sommes de Riemann, déterminer la limite des suites définie par

a) $u_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n^2}$ b) $v_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^6}{n^7}$ c) $w_n := \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{n}{(n+i)^2}$

4. Déterminer les dérivées des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto \displaystyle\int_a^{x^3} \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t$ b) $x \mapsto \displaystyle\int_2^x \left(\int_4^y \sqrt{t^2 - t^3}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}y$

c) $x \mapsto \displaystyle\int_{x^2}^{10} (t+t^2)^{1/3}\,\mathrm{d}t$

5. Pour chacune des questions suivantes, trouver une fonction f vérifiant l'identité.

a) $\displaystyle\int_0^x t f(t)\,\mathrm{d}t = x + x^2$ b) $\displaystyle\int_0^{x^2} t f(t)\,\mathrm{d}t = x + x^2$

6. Calculer les intégrales suivantes.

a) $\displaystyle\int_0^1 x^2(3+x)^{1/3}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^1 x(3+x^2)^{1/3}\,\mathrm{d}x$

7. Montrer que

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

ne dépend pas de $x \in \mathbb{R}_+^*$.

8. Soient $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue telle que $\int_a^b f = 0$. Montrer que $f(x) = 0$ pour tout $x \in [a,b]$.

9. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\{x \in [a,b] \mid g(x) \neq f(x)\}$ est fini. Montrer que g est intégrable et que

$$\int_a^b g = \int_a^b f.$$

(Indication : montrer l'intégrabilité de $h := g - f$ et en déduire celle de g.)

10. Soient $0 < a < b$ deux réels. Montrer que

$$\int_a^b \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{b-a}{\sqrt{ab}}.$$

(Indication : considérer la fonction $x \mapsto \int_a^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t - \frac{x-a}{\sqrt{ax}}$.)

11. Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$ telle que $\int_0^1 f = \frac{1}{2}$. En utilisant le théorème de la moyenne, montrer qu'il existe $x_* \in [0,1]$ tel que $f(x_*) = x_*$. (Indication : considérer la fonction $x \mapsto f(x) - x$.)

12. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

a) Si f est t-périodique et intégrable sur $[0,t]$, montrer que

$$\int_0^t f = \int_a^{a+t} f$$

pour tout $a \in \mathbb{R}$.

b) Donner une fonction f qui n'est pas périodique, mais dont la dérivée est périodique.

c) Supposons f' soit t-périodique. Montrer que f est t-périodique si et seulement si $f(t) = f(0)$.

13. (**Formule de Taylor avec reste intégral**) Soient $a < b$ deux réels, $x_0, x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ et $f \in \mathscr{C}^{n+1}([a,b])$. En utilisant l'intégration par parties, montrer par récurrence que

$$f(x) = T_n f(x; x_0) + \int_{x_0}^x f^{n+1}(t) \frac{(x-t)^n}{n!}\,\mathrm{d}t.$$

(Un avantage de cette version est que le terme d'erreur est complètement explicite.)

14. (**Intégration d'une fonction réciproque**) Soit $f : [a,b] \to [f(a), f(b)]$ une fonction continue et strictement croissante et soit f^{-1} sa réciproque. Le but de cet exercice est de montrer que

$$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1} = bf(b) - af(a) - \int_a^b f. \qquad (\star)$$

a) Soit $\sigma := \{x_0, \ldots, x_n\} \in \Delta_{a,b}$. Montrer que $\sigma' = \{f(x_0), \ldots, f(x_n)\} \in \Delta_{f(a),f(b)}$.

b) Vérifier que $S_+(f;\sigma) + S_-(f^{-1};\sigma') = bf(b) - af(a)$. (Remarque : faire un dessin du cas où $a \geqslant 0$ et $f(a) \geqslant 0$ pour comprendre intuitivement ce résultat ; toutefois, ne pas baser votre preuve sur un argument géométrique !)

c) En déduire que

$$\sup\left\{S_-(f^{-1};\sigma') \,\middle|\, \sigma' \in \Delta_{f(a),f(b)}\right\} = bf(b) - af(a) - \inf\left\{S_+(f;\sigma) \,\middle|\, \sigma \in \Delta_{a,b}\right\}$$

et conclure la preuve de ($\star$).

d) Déduire de ($\star$) que si F est une primitive de f, alors la fonction $x \mapsto xf^{-1}(x) - F\big(f^{-1}(x)\big)$ est une primitive de f^{-1}.

15. (**Inégalité de Cauchy–Schwarz**) Soient $a < b$ deux réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions bornées et intégrables sur $[a,b]$. Montrer que

$$\left|\int_a^b fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2}\,.$$

(Indication : utiliser l'observation que $\int_a^b (f+\lambda g)^2 \geqslant 0$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.)

16. (**Inégalité de Minkowski**) Soient $a < b$ deux réels et $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Montrer que

$$\sqrt{\int_a^b (f+g)^2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2} + \sqrt{\int_a^b g^2}\,.$$

(Indication : utiliser l'inégalité de Cauchy–Schwarz.)

5.6.2 Intégrale impropre

Exercice 5.7

1. Déterminer, sans les calculer, si les intégrales impropres suivantes existent.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x}{1+x^{3/2}}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{1}{x\sqrt{1+x}}\,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ e) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$ f) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin x}}\,\mathrm{d}x$

g) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$

(Indication : pour le dernier point, penser à intégrer par parties.)

2. Soit $a \in \mathbb{R}$ et $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale impropre $\int_a^\infty f$ existe et s'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = c$, alors $c = 0$.

6 Fonctions élémentaires

Dans ce chapitre, on introduit plusieurs fonctions jouant un rôle crucial dans de nombreux domaines des mathématiques et des sciences : les fonctions trigonométriques, le logarithme, l'exponentielle, les puissances réelles, etc.

6.1 Les fonctions trigonométriques

Remarque 6.1. ***Intuition géométrique.*** *Vous avez vu lors de vos études secondaires que le périmètre d'un cercle de rayon 1 est égal à 2π et que l'aire du disque de rayon 1 est égal à π. Si l'on considère un secteur d'angle θ, la longueur de l'arc correspondant est égal à θ (par définition des radians). On en déduit que l'aire A du secteur est donnée par $A = \frac{\theta}{2\pi} \cdot \pi = \frac{\theta}{2}$. Notons $x \in [-1, 1]$ la longueur (signée) de l'intervalle représenté en gras dans la figure suivante :*

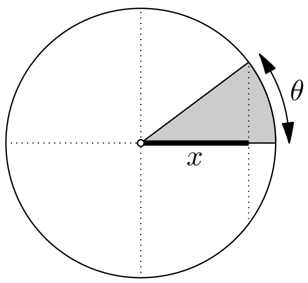


FIGURE 6.1: L'aire du secteur grisé est égale à $\theta/2$.

Alors, comme vous l'avez également vu lors de vos études secondaires, $x = \cos\theta$, que l'on peut reformuler $\arccos x = \theta$. *En particulier,* $\arccos x = 2A$. *Ci-dessous, nous allons donner une définition purement analytique de l'aire A du secteur comme fonction de x, et ainsi obtenir une définition analytique de la fonction* arccos, *à partir de laquelle les autres fonctions trigonométriques pourront être définies.* ◇

Le nombre π est défini comme étant l'aire d'un disque de rayon 1.

Définition 6.2. *Le nombre π est défini par*

$$\pi := 2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, \mathrm{d}t.$$

L'aire d'un secteur comme discuté dans la remarque ci-dessus peut également être facilement exprimée en termes de la grandeur x, à l'aide d'une intégrale (voir la Figure 6.2) :

$$A(x) = \underbrace{\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}}_{\text{aire (signée) du triangle}} + \int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

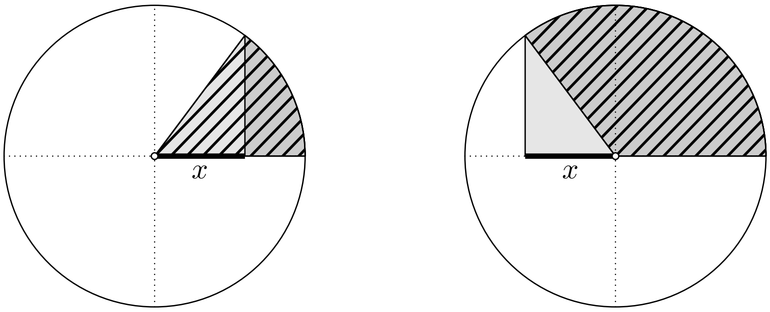


FIGURE 6.2: Le cercle est de rayon 1 ; x correspond à la longueur (signée) du segment représenté en gras. La fonction $A(x)$ correspond à l'aire du secteur hachuré. **Gauche :** $A(x)$ est la somme de l'aire d'un triangle (en gris clair) et de la région en gris foncé. **Droite :** $A(x)$ est égale à la différence entre l'aire grisée totale et l'aire du triangle en gris clair.

La discussion en début de section nous conduit ainsi à poser la définition suivante.

Définition 6.3. *L'**arccosinus** est la fonction* $\arccos : [-1,1] \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\arccos(x) := 2A(x) = x\sqrt{1-x^2} + 2\int_x^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

Il suit de cette définition que $\arccos$ est continue sur $[-1,1]$ et dérivable sur $(-1,1)$, avec une dérivée égale à

$$\arccos'(x) = \big(x\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2}\big) - 2\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{6.1}$$

Cette dérivée étant strictement négative, il suit du point (iv) du Corollaire 4.20 que $\arccos$ est strictement décroissante sur $[-1,1]$. De plus, on a $\arccos(-1) = \pi$ et $\arccos(1) = 0$. Donc $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ est bijective par le Théorème 3.33 et sa réciproque $\arccos^{-1} : [0,\pi] \to [-1,1]$ est continue et strictement décroissante.

Définition 6.4. *Pour* $\theta \in [0,\pi]$, *on définit le **cosinus** de* θ *par* $\cos(\theta) := \arccos^{-1}(\theta)$ *et le **sinus** de* θ *par* $\sin(\theta) := \sqrt{1-\cos^2(\theta)}$.

Ces fonctions sont étendues à $\mathbb{R}$ tout entier en deux étapes : tout d'abord, on définit, pour $\theta \in (-\pi, 0)$,

$$\cos(\theta) := \cos(-\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) := -\sin(-\theta).$$

La fonction cosinus est donc paire, alors que la fonction sinus est impaire. Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et tout $\theta \in (-\pi,\pi]$, on pose

$$\cos(\theta + 2\pi n) := \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta + 2\pi n) := \sin(\theta).$$

Ainsi, ces deux fonctions sont périodiques, de période 2π et continues sur $\mathbb{R}$. En fait, elles sont même infiniment dérivables.

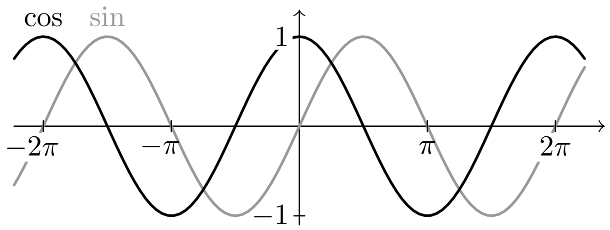


FIGURE 6.3: Les fonctions cos et sin.

Proposition 6.5. $\cos, \sin \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ *et, pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\cos'(\theta) = -\sin(\theta), \qquad \sin'(\theta) = \cos(\theta), \qquad \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1.$$

Démonstration. La Proposition 4.11 implique la dérivabilité de cos sur $(0, \pi)$. De plus, cette proposition et (6.1) impliquent que, pour tout $0 < \theta < \pi$,

$$\cos'(\theta) = \frac{1}{\arccos'(\cos(\theta))} = -\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} = -\sin(\theta).$$

Ce résultat s'étend immédiatement à l'intervalle $(-\pi, 0)$, puisque, pour tout $\theta \in (0, \pi)$,

$$\cos'(-\theta) = -\cos'(\theta) = \sin(\theta) = -\sin(-\theta).$$

Le cosinus étant étendu à $\mathbb{R}$ par périodicité, cette propriété reste valable pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Finalement, le résultat pour $\theta \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ suit alors immédiatement du Corollaire 4.22.

L'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$ suit directement de la définition de ces fonctions. Il suit donc, par dérivation de fonctions composées, que, pour tout $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$,

$$\sin'(\theta) = \frac{-2\cos(\theta)(-\sin(\theta))}{2\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}} = \cos(\theta).$$

Le Corollaire 4.22 permet à nouveau d'étendre cette identité à $\mathbb{R}$ tout entier. □

Avant de continuer, nous allons démontrer un résultat intéressant, qui suit des propriétés déjà établies des fonctions sinus et cosinus.

Théorème 6.6. π *est irrationnel.*

Démonstration. Supposons, par l'absurde, qu'il existe $a, b \in \mathbb{N}^*$ tels que $\pi = a/b$. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et considérons les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x) := b^n \frac{x^n(\pi - x)^n}{n!} = \frac{x^n(a - bx)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k (-b)^{n-k} \frac{x^{2n-k}}{n!} \tag{6.2}$$

et

$$F(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k f^{(2k)}(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

On a alors

$$0 < \int_0^\pi f(x) \sin(x)\, \mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{n!} \Big(\frac{b\pi^2}{4}\Big)^n.$$

En effet, la première inégalité suit de la stricte positivité de l'intégrande lorsque $x \in (0, \pi)$ et la seconde du fait que $\max_{x\in[0,\pi]} x(\pi - x) = \pi^2/4$ et $\int_0^\pi \sin = 2$. Étant donné que $\lim_{n\to\infty} c^n/n! = 0$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ (point **4.** de l'Exercice 2.6), on en déduit que

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x \in (0,1) \quad \text{pour tout } n \text{ suffisamment grand.} \tag{6.3}$$

Nous allons dériver une contradiction en montrant que cette intégrale est en fait un nombre entier.

Montrons tout d'abord que $F(0)$ et $F(\pi)$ sont des entiers. Pour ce faire, on observe que $f^{(\ell)}(0) = 0$ pour tout $\ell \in [\![0, n-1]\!]$, puisque chaque terme de la somme dans (6.2) est une fonction monomiale de degré au moins n. D'autre part, lorsque $\ell \in [\![n, 2n]\!]$,

$$f^{(\ell)}(0) = \binom{n}{2n-\ell} a^{2n-\ell}(-b)^{\ell-n}\frac{\ell!}{n!} \in \mathbb{Z},$$

puisque $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}^*$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$ et que $0 \leqslant 2n-\ell \leqslant n$ et $n \leqslant \ell$. On conclut que $f^{(\ell)}(0) \in \mathbb{Z}$ pour tout $\ell \in [\![0, 2n]\!]$. Comme $f(\pi - x) = f(x)$ pour tout $x \in [0, \pi]$, on conclut que $f^{(\ell)}(\pi) = (-1)^\ell f^{(\ell)}(0)$ appartient également à $\mathbb{Z}$ pour tout $\ell \in [\![0, 2n]\!]$. On a donc bien $F(0), F(\pi) \in \mathbb{Z}$.

Finalement, comme $f^{(2n+2)}(x) = 0$ pour tout x,

$$\big(F' \cdot \sin - F \cdot \cos\big)' = F'' \cdot \sin + F \cdot \sin = f \cdot \sin\,.$$

Par conséquent,

$$\int_0^\pi f(x)\sin(x)\,\mathrm{d}x = \big(F' \cdot \sin - F \cdot \cos\big)\Big|_0^\pi = F(\pi) + F(0) \in \mathbb{Z},$$

ce qui contredit (6.3). □

On peut à présent définir d'autres fonctions trigonométriques.

Définition 6.7. *Les fonctions* ***sécante***, ***tangente***, ***cosécante*** *et* ***cotangente*** *sont définie par*

$$\sec := \frac{1}{\cos}, \qquad \tan := \frac{\sin}{\cos}, \qquad \csc := \frac{1}{\sin}, \qquad \cot := \frac{\cos}{\sin}.$$

Le domaine de définition de ces fonctions est clair à partir de leur définition (il faut éviter les points où le dénominateur s'annule). Par exemple, le domaine de définition de la tangente est $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

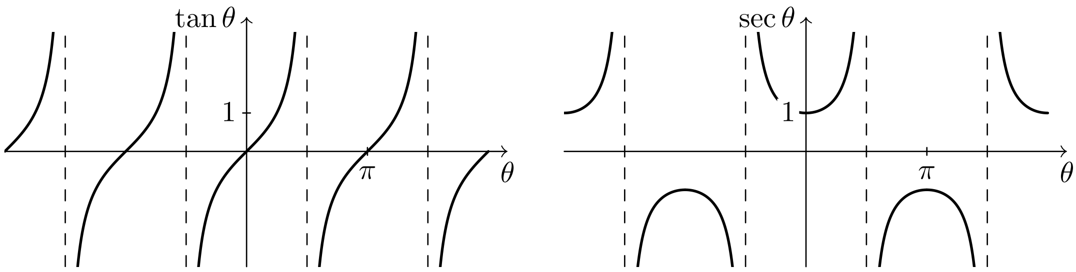


FIGURE 6.4: Les fonctions $\tan$ et $\sec$.

On a déjà défini la fonction inverse de $\cos$ (c'est-à-dire $\arccos$). Pour définir celles du sinus et de la tangente, on doit choisir des intervalles maximaux sur lesquels ces fonctions sont injectives. La définition ci-dessous donne le choix usuel.

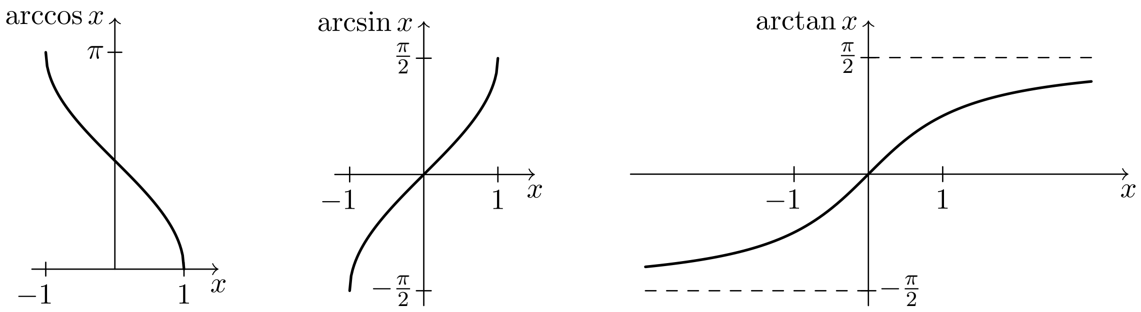


FIGURE 6.5: Les fonctions arccos, arcsin et arctan.

Définition 6.8. *La fonction **arcsinus** est définie par* $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}],\ \arcsin(x) \coloneqq \sin^{-1}(x)$. *La fonction **arctangente** est définie par* $\arctan : \mathbb{R} \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ \arctan(x) \coloneqq \tan^{-1}(x)$.

Exercice 6.1

1. Montrer que tan est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \,\middle|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$ et que $\tan'(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$.
2. Montrer que arcsin est dérivable sur $(-1,1)$ et que $\arcsin'(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$.
3. Montrer que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\arctan'(x) = 1/(1+x^2)$.
4. Déterminer les primitives des fonctions arcsin et arccos.

Proposition 6.9. *Les fonctions* sin *et* cos *sont solutions de l'**équation différentielle***

$$f'' + f = 0. \tag{6.4}$$

De plus, si $f \in \mathscr{D}^2(\mathbb{R})$ *est solution de* (6.4)*, alors* $f = f(0) \cdot \cos + f'(0) \cdot \sin$.

Démonstration. La première affirmation est immédiate. Pour démontrer la seconde, considérons la fonction $g \coloneqq f - f(0)\cos - f'(0)\sin$. Alors,

$$g'' + g = f'' + f = 0 \qquad \text{et} \qquad g(0) = g'(0) = 0.$$

Soit $h \coloneqq g^2 + (g')^2$. Comme $h' = 2g'(g''+g) = 0$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $h(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Or, $h(0) = g(0)^2 + g'(0)^2 = 0$, ce qui implique que $c = 0$ et donc $h = 0$. On conclut que $g = 0$, ce qui démontre l'affirmation. □

Proposition 6.10. *Pour tout* $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$,

$$\sin(\theta+\theta') = \sin(\theta)\cos(\theta') + \cos(\theta)\sin(\theta') \quad \textit{et} \quad \cos(\theta+\theta') = \cos(\theta)\cos(\theta') - \sin(\theta)\sin(\theta').$$

Démonstration. Fixons $\theta' \in \mathbb{R}$. La fonction $f(\theta) \coloneqq \sin(\theta+\theta')$ est solution de (6.4). Par conséquent, $f(\theta) = f(0)\cos(\theta) + f'(0)\sin(\theta) = \sin(\theta')\cos(\theta) + \cos(\theta')\sin(\theta)$. La seconde identité se démontre de façon similaire. □

Exemple 6.11. Comme application des identités précédentes, dérivons la très belle **formule de Viète** [1] **pour π** :

$$\frac{2}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2} \cdots .$$

1. Il semble que cette formule, publiée par Viète en 1593, soit le premier exemple connu de produit infini en mathématiques, ainsi que le premier exemple de formule explicite pour le calcul de π. Viète utilisa sa formule pour calculer les 9 premières décimales de π.

Commençons par écrire cette identité de manière plus précise. On considère la suite définie par $u_0 := 0$ et $u_{n+1} := \sqrt{(2+2u_n)}/2 = \sqrt{(1+u_n)/2}$. On vérifie alors facilement que l'identité précédente peut s'écrire

$$\frac{2}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k.$$

Afin de démontrer cette dernière identité, observons tout d'abord que, par la Proposition 6.10, $\cos(\theta) = \cos^2(\theta/2) - \sin^2(\theta/2) = 2\cos^2(\theta/2) - 1$, ce qui peut s'écrire, pour tout $\theta \in [-\pi, \pi]$,

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{(1+\cos(\theta))/2}.$$

Cette relation est identique à celle reliant u_{n+1} à u_n. Puisque $\cos(\pi/2) = 0 = u_0$, on doit avoir $u_k = \cos(\pi/2^{k+1})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On peut donc écrire

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} u_k = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos(\pi/2^{k+1}).$$

Ainsi, le résultat sera établi si l'on parvient à démontrer l'identité suivante, plus générale (il suffit de l'appliquer avec $\theta = \pi/2$) :

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k).$$

Or, celle-ci est également une conséquence assez directe de la Proposition 6.10 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\sin(\theta) &= 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) \\
&= 2^2 \sin(\theta/2^2)\cos(\theta/2^2)\cos(\theta/2) \\
&= 2^3 \sin(\theta/2^3)\cos(\theta/2^3)\cos(\theta/2^2)\cos(\theta/2) \\
&= \cdots \\
&= 2^n \sin(\theta/2^n)\cos(\theta/2^n)\cos(\theta/2^{n-1})\cdots\cos(\theta/2^2)\cos(\theta/2).
\end{aligned} \tag{6.5}$$

On a donc montré que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{\sin(\theta)}{\theta}\,\frac{\theta/2^n}{\sin(\theta/2^n)} = \prod_{k=1}^{n} \cos(\theta/2^k).$$

Comme $\lim_{x\to 0} \sin(x)/x = \sin'(0) = \cos(0) = 1$, on obtient le résultat désiré en laissant $n \to \infty$.

Finalement, donnons quelques applications numériques de cette formule : pour $n = 2$, on obtient $\pi \cong 3{,}14$; pour $n = 10$, on obtient $\pi \cong 3{,}14159$; pour $n = 25$, on obtient $\pi \cong 3{,}14159265358979$. $\diamond$

Notation. Il est usuel d'écrire (lorsque cela ne prête pas à confusion) $\sin x$ plutôt que $\sin(x)$, $\arccos x$ plutôt que $\arccos(x)$, etc.

6.2 Les fonctions logarithme et exponentielle

6.2.1 Le logarithme

On a vu dans l'Exemple 5.23 que $\int x^r \,\mathrm{d}x = \frac{x^{r+1}}{r+1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $r \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$. La fonction logarithme est définie comme primitive de x^{-1}.

Définition 6.12. *Le **logarithme** est la fonction* $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ *définie par*

$$\log(x) := \int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Notation. À nouveau, si cela ne conduit pas à des ambiguïtés, on écrit souvent $\log x$ plutôt que $\log(x)$. Une notation alternative commune pour cette fonction est $\ln$ (pour logarithme *naturel* ou *népérien*).

Remarque 6.13. *Ci-dessus, le logarithme a été introduit comme une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Cependant, cette dernière fonction est bien définie sur $\mathbb{R}^*$. Les primitives de cette fonction sur $\mathbb{R}^*$ peuvent être obtenues facilement. En effet, si $x < 0$, $\log(-x)$ est bien défini et $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log(-x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$. Par conséquent, $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log(-x)$ lorsque $x < 0$. On peut donc finalement écrire*

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \log|x|, \qquad \forall x \neq 0.$$

Cette primitive est valide sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ ne contenant pas 0.

Plus généralement, si $f \in \mathscr{C}^1$, la dérivée en x de la fonction $\log(\pm f)$ (le signe étant choisi de façon à ce que $\pm f(x) > 0$) est donnée par $f'(x)/f(x)$ (quel que soit le signe choisi) et donc

$$\int \frac{f'}{f} = \log|f|,$$

cette primitive étant valide sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel f ne s'annule pas. ◇

Par définition, on a, pour tout $x > 0$,

$$\log' x = \frac{1}{x}.$$

Sa dérivée étant strictement positive, le logarithme est une fonction strictement croissante. Clairement, $\log 1 = 0$. De plus, au vu de l'Exemple 5.35, elle satisfait

$$\lim_{x \downarrow 0} \log x = -\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty.$$

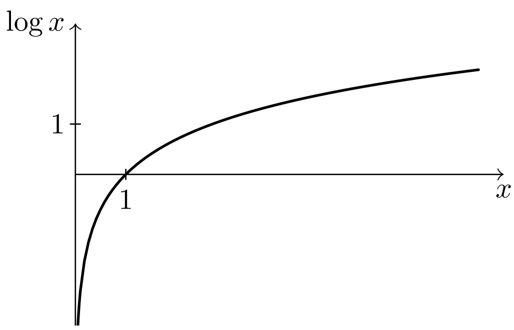


FIGURE 6.6: La fonction log.

On verra plus bas (Proposition 6.23) que le logarithme tend extrêmement lentement vers l'infini : à titre d'illustration, le nombre d'atomes dans l'univers observable est généralement estimé à environ 10^{80} ; or, $\log(10^{80}) \cong 184$.

Le résultat suivant énonce une propriété essentielle du logarithme.

Proposition 6.14. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,*

$$\log(xy) = \log x + \log y. \tag{6.6}$$

*De plus, si $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}_+^*)$ est solution de l'**équation fonctionnelle***

$$f(xy) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \tag{6.7}$$

alors $f(x) = f'(1)\log x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Démonstration. Fixons $y \in \mathbb{R}_+^*$ et introduisons la fonction $\phi(x) := \log(xy) - \log y$. Alors, puisque

$$\phi'(x) = \frac{1}{x} = \log' x \qquad \text{et} \qquad \phi(1) = 0 = \log 1,$$

on doit avoir $\phi(x) = \log(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, ce qui démontre la première affirmation.

Pour démontrer la seconde, considérons une solution $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R}_+^*)$ de (6.7). Alors, en fixant $y \in \mathbb{R}_+^*$ et en dérivant (6.7) par rapport à x, on obtient

$$yf'(xy) = f'(x).$$

En prenant $x = 1$, on en déduit que $yf'(y) = f'(1)$, c'est-à-dire $f'(y) = \frac{f'(1)}{y}$. En passant aux primitives, on obtient

$$f(y) = f'(1) \log y + K$$

pour une constante $K \in \mathbb{R}$. Or, l'équation fonctionnelle (6.7) avec $x = y = 1$ implique que $f(1) = 2f(1)$ et donc $f(1) = 0$. Il s'ensuit que $K = 0$ et l'affirmation est démontrée. □

Exercice 6.2

Montrer que $\log(x^r) = r \log x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $r \in \mathbb{Q}$.

Dans les Exemples 2.24 et 2.26, nous avons introduit deux expressions pour le nombre d'Euler e. Celui-ci est intimement lié au logarithme.

Proposition 6.15. $\log e = 1$.

Démonstration. On a vu que $e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Par continuité du logarithme, on a donc

$$\begin{aligned}\log e = \log\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) &= \lim_{n\to\infty} \log\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{n}) - \overbrace{\log(1)}^{=0}}{\frac{1}{n}} = \log'(1) = 1.\end{aligned}$$ □

6.2.2 L'exponentielle

On a vu que la fonction $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ est surjective (par le théorème des valeurs intermédiaires) et injective (elle est strictement croissante). Par conséquent, elle possède une réciproque, que l'on nomme l'exponentielle.

Définition 6.16. *L'**exponentielle** est la fonction* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ *définie par* $\exp := \log^{-1}$.

Notons quelques valeurs particulières importantes : $\exp 0 = 1$ (puisque $\log 1 = 0$) et $\exp 1 = e$ (puisque $\log e = 1$).

Il suit de la définition et de la Proposition 4.11 que $\exp$ est strictement croissante et dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisque $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \log'(x) > 0$), et que $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty$.

Proposition 6.17. *La fonction* $\exp$ *est solution de l'équation différentielle*

$$f' - f = 0.$$

De plus, si $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ *est solution de l'équation différentielle*

$$f' - af = 0,$$

avec $a \in \mathbb{R}$*, alors* $f(x) = f(0)\exp(ax)$.

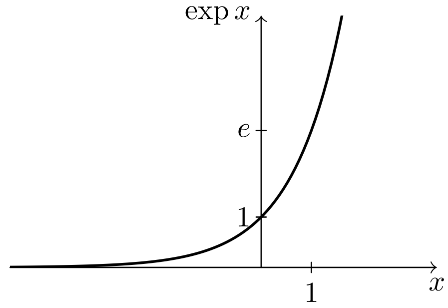


FIGURE 6.7: La fonction exp.

Démonstration. Par la formule de dérivation d'une fonction réciproque,

$$\exp' x = \frac{1}{\log'(\exp x)} = \exp x,$$

ce qui établit la première affirmation. Pour montrer la seconde, on considère la fonction

$$g(x) := f(x)\exp(-ax).$$

On a alors

$$g'(x) = f'(x)\exp(-ax) - af(x)\exp(-ax) = \big(f'(x) - af(x)\big)\exp(-ax) = 0.$$

On en conclut qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x)\exp(-ax) = c$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, on trouve $c = f(0)$. La conclusion suit donc de l'identité (6.8) ci-dessous. □

La propriété (6.6) du logarithme a également une conséquence primordiale pour la fonction exponentielle.

Proposition 6.18. *Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y). \tag{6.8}$$

De plus, si $f \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ est solution de l'équation fonctionnelle

$$f(x+y) = f(x)f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R},$$

alors soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) = \exp\big(f'(0)x\big)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Posons $a := \exp x$ et $b := \exp y$. On a alors,

$$\exp(x+y) = \exp\big(\log(a) + \log(b)\big) \overset{(6.6)}{=} \exp\big(\log(ab)\big) = ab = \exp(x)\exp(y).$$

Pour la seconde partie, il est évident que la fonction identiquement nulle est solution. Supposons donc que f ne soit pas identiquement nulle. Dans ce cas, l'équation fonctionnelle implique que $f(x) = f(x + 0) = f(x)f(0)$, pour tout x, et donc $f(0) = 1$. Il suit de la dérivabilité de f que

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x)f(h) - f(x)}{h} = f(x)\lim_{h\to 0}\frac{f(h) - 1}{h} = f(x)f'(0).$$

La conclusion suit donc de la Proposition 6.17. □

6.2.3 Exposants irrationnels

Jusqu'à présent, nous n'avons défini les fonctions $x \mapsto x^r$ que pour $r \in \mathbb{Q}$. Les fonctions logarithme et exponentielle vont nous permettre d'étendre aisément ces définitions à des exposants $r \in \mathbb{R}$ arbitraires. L'observation cruciale est la suivante : pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $r \in \mathbb{Q}$,

$$x^r = \exp\bigl(\log(x^r)\bigr) = \exp\bigl(r \log x\bigr),$$

où la seconde identité suit de l'Exercice 6.2.

Définition 6.19. *Soit $a \in \mathbb{R}$. La fonction $x \mapsto x^a$ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$ est définie par*

$$x^a := \exp(a \log x).$$

Il suit immédiatement de la définition que $x \mapsto x^a$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+^*$, strictement croissante si $a > 0$ et strictement décroissante si $a < 0$. De plus, $\lim_{x\downarrow 0} x^a = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = +\infty$ si $a > 0$, alors que $\lim_{x\downarrow 0} x^a = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} x^a = 0$ si $a < 0$.

Notons également qu'il suit de la Proposition 6.15 que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\exp a = \exp(a \log e) = e^a.$$

On utilisera donc indifféremment $\exp x$ et e^x pour dénoter l'exponentielle de x.

Les propriétés établies lorsque l'exposant est rationnel restent vraies dans ce contexte plus général.

Exercice 6.3

Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $p, q \in \mathbb{R}$.

a) Démontrer les identités suivantes :

$$(xy)^p = x^p y^p, \qquad x^{p+q} = x^p x^q, \qquad x^{pq} = (x^p)^q.$$

b) Montrer que $x \mapsto x^p$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que $(x^p)' = px^{p-1}$.

Remarque 6.20. *Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$, $b \neq 1$. La fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$, $x \mapsto b^x$ satisfait $(b^x)' = b^x \log b$ et est donc strictement monotone (croissante si $b > 1$ et décroissante si $b < 1$). La fonction réciproque est appelée* ***logarithme de base b*** *et est dénotée $\log_b$. Observons que*

$$y = \log_b x \quad\Leftrightarrow\quad b^y = x \quad\Leftrightarrow\quad e^{y\log b} = x \quad\Leftrightarrow\quad y\log b = \log x \quad\Leftrightarrow\quad y = \frac{\log x}{\log b},$$

c'est-à-dire $\log_b x = \frac{\log x}{\log b}$. ◇

6.2.4 Fonctions hyperboliques

Les fonctions hyperboliques sont de proches cousines des fonctions trigonométriques (la nature de la relation entre ces fonctions se comprend plus naturellement en travaillant avec les nombres complexes et ne sera pas discutée ici).

Définition 6.21. *Les fonctions* $\cosh : \mathbb{R} \to [1, +\infty)$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ *définies par*

$$\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x := \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \tanh x := \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

sont appelées, respectivement, ***cosinus hyperbolique****,* ***sinus hyperbolique*** *et* ***tangente hyperbolique****.*

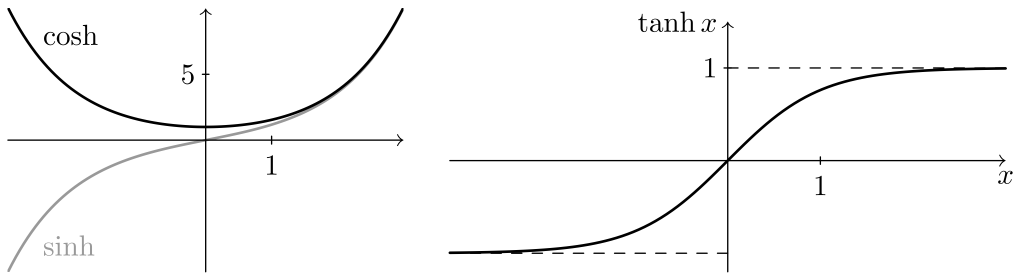


FIGURE 6.8: Les fonctions cosh, sinh et tanh.

Exercice 6.4

Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Établir les propriétés suivantes :

a) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

b) $\cosh' x = \sinh x$

c) $\sinh' x = \cosh x$

d) $\tanh' x = \cosh^{-2} x$

e) $\cosh(x + y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

f) $\sinh(x + y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

Les fonctions $\cosh : \mathbb{R}_+ \to [1, +\infty)$, $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\tanh : \mathbb{R} \to (-1, 1)$ sont strictement croissantes et surjectives. Elles admettent donc les réciproques suivantes.

Définition 6.22. *Les fonctions* arcosh : $[1, +\infty) \to \mathbb{R}_+$, arsinh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *et* artanh : $(-1, 1) \to \mathbb{R}$ *définies par*

$$\operatorname{arcosh} := \cosh^{-1}, \qquad \operatorname{arsinh} := \sinh^{-1}, \qquad \operatorname{artanh} := \tanh^{-1}$$

sont appelées, respectivement, ***argument cosinus hyperbolique****,* ***argument sinus hyperbolique*** *et* ***argument tangente hyperbolique****.*

Exercice 6.5

Établir les identités suivantes (pour x dans le domaine de définition des fonctions) :

a) $\operatorname{arcosh} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr)$

b) $\operatorname{arsinh} x = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 + 1}\bigr)$

c) $\operatorname{artanh} x = \frac{1}{2} \log\bigl((1 + x)/(1 - x)\bigr)$

d) $\operatorname{arcosh}' x = 1/\sqrt{x^2 - 1}$

e) $\operatorname{arsinh}' x = 1/\sqrt{x^2 + 1}$

f) $\operatorname{artanh}' x = 1/(1 - x^2)$

6.2.5 Comportement asymptotique

Pour clore ce chapitre, analysons le comportement lorsque $x \to +\infty$ de certaines des fonctions introduites dans cette section. Étant donné deux fonctions f et g, notons $f \gg g$ si $g = \mathsf{o}_{x \to +\infty}(f)$ (cette dernière notation a été introduite dans la Section 4.5.1).

Proposition 6.23. *Pour tout $a, b, p, q \in \mathbb{R}$ satisfaisant $a > b > 0$ et $p > q > 0$, on a*

$$x^x \gg e^{ax} \gg e^{bx} \gg x^p \gg x^q \gg \log x.$$

Démonstration. Tout d'abord,

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{bx}}{e^{ax}} = \lim_{x \to +\infty} e^{(b-a)x} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^q}{x^p} = \lim_{x \to +\infty} x^{(q-p)} = 0,$$

ce qui montre que $e^{ax} \gg e^{bx}$ et $x^p \gg x^q$. Comme $x^x = e^{x \log x} > e^{2ax}$ pour tout $x > e^{2a}$, on a également $x^x \gg e^{ax}$.

Montrons à présent que $x^q \gg \log x$. Fixons $\epsilon \in (0, q)$. Alors,

$$\frac{\log x}{x^q} = \frac{1}{x^q}\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x^{q-\epsilon}}\int_1^x \frac{1}{t}\cdot\frac{1}{x^\epsilon}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{x^{q-\epsilon}}\int_1^x \frac{1}{t^{1+\epsilon}}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{C}{x^{q-\epsilon}},$$

où $C := \lim_{x\uparrow+\infty}\int_1^x \frac{1}{t^{1+\epsilon}}\,\mathrm{d}t < \infty$ (*cf.* Exemple 5.35). La conclusion suit, car $\lim_{x\to+\infty} x^{\epsilon-q} = 0$.

La dernière affirmation, $e^{bx} \gg x^p$, suit de

$$\frac{x^p}{e^{bx}} = \frac{e^{p\log x}}{e^{bx}} = \exp\Bigl(\Bigl(\frac{p\log x}{x} - b\Bigr)x\Bigr) \leqslant \exp\Bigl(-\frac{b}{2}x\Bigr),$$

puisque $(p\log x)/x < b/2$ pour tout x suffisamment grand. □

6.3 Exercices supplémentaires

6.3.1 Fonctions trigonométriques

Exercice 6.6

1. Démontrer les identités suivantes.
   a) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-x^2}$
   b) $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$
   c) $\tan(\arcsin x) = x/\sqrt{1-x^2}$
   d) $\tan(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}/x$
   e) $\sin(\arctan x) = x/\sqrt{1+x^2}$
   f) $\cos(\arctan x) = 1/\sqrt{1+x^2}$

2. Déterminer les primitives des fonctions sin, cos et tan.
3. Calculer les primitives des fonctions suivantes (en supposant que $a \neq 0$) :
   a) $\tan^2 x$
   b) $(a^2+x^2)^{-1}$
   c) $(a^2-x^2)^{-1/2}$

4. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes de Taylor $T_{2n-1}\sin(x;0)$ et $T_{2n}\cos(x;0)$.
5. Calculer les limites suivantes, en utilisant la formule de Taylor–Young :
   a) $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}$
   b) $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$
   c) $\lim_{x\to 0}\Bigl(\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{\sin^2 x}\Bigr)$

6. Répondre aux questions suivantes à l'aide de la Proposition 6.10 :
   a) Exprimer $\sin(2x)$, $\cos(2x)$, $\sin(3x)$ et $\cos(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.
   b) Exprimer $\sin^2 x$ et $\cos^2 x$ en fonction de $\cos(2x)$. En déduire les primitives de $\sin^2$ et $\cos^2$.
   c) Montrer les identités suivantes (lorsque $x+y, x, y$ sont dans le domaine de définition de tan et $uv < 1$) :
      i) $\tan(x+y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
      ii) $\arctan u + \arctan v = \arctan\Bigl(\dfrac{u+v}{1-uv}\Bigr)$
   d) Déduire du point précédent que si $x = 2\arctan y$, alors
   $$\sin x = \frac{2y}{1+y^2} \quad \text{et} \quad \cos x = \frac{1-y^2}{1+y^2}.$$
   À l'aide de ce changement de variable, calculer les primitives de sec et csc.

7. Calculer la primitive de sec directement (écrire $\sec x = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}$, écrire le dénominateur comme un produit de deux facteurs, puis la fraction comme une somme de deux fractions.)

8. Soient $m, n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer les identités suivantes :

i) $2\sin(mx)\sin(nx) = \cos\big((m-n)x\big) - \cos\big((m+n)x\big)$

ii) $2\sin(mx)\cos(nx) = \sin\big((m+n)x\big) + \sin\big((m-n)x\big)$

iii) $2\cos(mx)\cos(nx) = \cos\big((m+n)x\big) + \cos\big((m-n)x\big)$

b) Montrer les identités suivantes, essentielles dans la théorie des **séries de Fourier** :

i) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

ii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ \pi & \text{si } m = n \end{cases}$

iii) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$

9. Considérer la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $f(0) := 0$. Vérifier que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, mais que sa dérivée n'est pas continue en 0. Que peut-on en déduire sur la relation entre les ensembles $\mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et $\mathscr{C}^1(\mathbb{R})$?

10. Considérer la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $g(x) := x + 2x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$ et $g(0) := 0$. Montrer que $g \in \mathscr{D}^1(\mathbb{R})$ et calculer sa dérivée. Vérifier que $g'(0) = 1$, mais qu'il est impossible de trouver $\delta > 0$ tel que g soit monotone sur $(-\delta, \delta)$. (Ceci démontre que pour établir la stricte croissance d'une fonction au voisinage d'un point, il ne suffit en général pas de montrer que sa dérivée en ce point est strictement positive.)

11. Le théorème de Darboux (*cf.* Exercice 4.7, point **12.**) affirme que si $f \in \mathcal{D}^1(I)$, avec $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle fermé, alors f' possède la propriété des valeurs intermédiaires. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par

$$g(x) := \begin{cases} \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0, \\ 1 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

possède la propriété des valeurs intermédiaires, mais ne possède pas de primitive. (Indication : Montrer que la fonction h définie de la même façon, mais avec $h(0) := 0$ admet une primitive, puis que la fonction $g - h$ ne peut pas admettre de primitive.)

12. Calculer l'aire de l'ellipse d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

6.3.2 Exponentielle, logarithme et puissances réelles

Exercice 6.7

1. Résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

2. En utilisant le point **14.** de l'Exercice 5.6, déterminer les primitives des fonctions log, arcsin, arccos, arctan, arcosh, arsinh et artanh.

3. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les polynômes de Taylor $T_n \log(x;1)$ et $T_n \exp(x;0)$.

4. Calculer la limite suivante, en utilisant la formule de Taylor–Young :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$$

5. Dessiner le graphe de la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^x$.

6. Soit $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$. Montrer que si $f(x) = \int_0^x f$, alors $f = 0$.

7. Trouver les fonctions $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+)$ telles que $\int_0^{x^2} f = 1 - e^{2x^2}$.

8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \exp(-1/x^2)$ si $x \neq 0$ et $f(0) := 0$.

a) Montrer que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^*)$ et que, pour tout $x \neq 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = P_k(x)x^{-3k}e^{-1/x^2}$ avec P_k une fonction polynomiale de degré au plus $2k-2$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} f^{(k)}(x) = 0$ et en conclure que $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$. (Indication : utiliser le Corollaire 4.22.)

c) Calculer le polynôme de Taylor $T_n f(x; 0)$ de f en 0 pour tout $n \in \mathbb{N}$. Que peut-on en conclure ?

9. Exprimer $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ en termes de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$. Puis, pour $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, calculer

$$\frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}x}.$$

Cette dernière quantité est la **variance de la loi normale** $\mathscr{N}(0,\sigma^2)$.

10. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Exprimer $\int (\log x)^n\,\mathrm{d}x$ en fonction des primitives $\int (\log x)^m\,\mathrm{d}x$ avec $m < n$.

11. Le but de cet exercice est de montrer que l'hypothèse de dérivabilité dans les Propositions 6.14 et 6.18 peut être remplacée par de la continuité.

a) Montrer que si $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+^*)$ est solution de l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^*, \qquad f(xy) = f(x) + f(y),$$

alors il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = c\log x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
(Indication : introduire la fonction $g := f \circ \exp$ et utiliser le résultat du point **10.** de l'Exercice 3.7.)

b) Montrer que toute solution $f \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ de l'équation fonctionnelle

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad f(x+y) = f(x)f(y)$$

satisfait soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Dans ce dernier cas, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \exp(cx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
(Indication : procéder de façon analogue à ce qui a été fait au point précédent.)

12. Le but de cet exercice est de démontrer l'existence de la **constante d'Euler–Mascheroni**

$$\gamma := \lim_{n\to\infty}\Bigl(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\Bigr).$$

Cette constante apparaît de façon récurrente en analyse, en théorie des nombres et dans de nombreux autres domaines des mathématiques. Ses premières décimales sont $\gamma \cong 0{,}5772156649$. On sait très peu de chose sur cette constante (pas même si elle est irrationnelle !).

a) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $1/k \geqslant \log\bigl((k+1)/k\bigr) \geqslant 1/(k+1)$.

b) Soit $u_k := 1/k - \log\bigl((k+1)/k\bigr)$. Montrer que la suite $v_n := u_1 + \cdots + u_n$ est croissante et bornée.

c) Conclure.

13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une marche auto-évitante de longueur n sur $\mathbb{Z}^2$ est une collection ordonnée (x_0, y_0), $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ telle que (i) $x_i, y_i \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, (ii) $|x_k - x_{k-1}| + |y_k - y_{k-1}| = 1$ pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, (iii) $(x_0, y_0) = (0, 0)$, (iv) $(x_k, y_k) \neq (x_\ell, y_\ell)$ pour tout $k \neq \ell$. La Figure 6.9 donne un exemple pour $n = 20$. On note c_n le nombre de marches auto-évitantes de longueur n.

a) Vérifier que la suite $(\log c_n)$ est sous-additive (*cf.* Exercice 2.6, point **21.**).

b) À l'aide du lemme de Fekete, montrer que $\mu := \lim_{n\to\infty} c_n^{1/n}$ est bien définie. μ est appelée **constante de connectivité de $\mathbb{Z}^2$**.

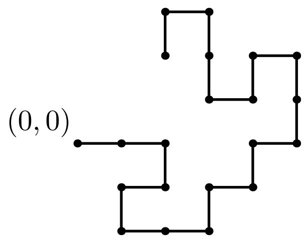


FIGURE 6.9: Une marche auto-évitante de longueur $n = 20$ sur $\mathbb{Z}^2$.

c) Montrer que $\mu \in [2, 3]$. (La valeur exacte de μ n'est pas connue ; une valeur approchée est $\mu \cong 2{,}63815853$.)

6.3.3 Comportement asymptotique

Exercice 6.8

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver les limites :

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{(\log x)^n}$ b) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x(\log x)^n$ c) $\displaystyle\lim_{x\downarrow 0} x^x$

7 Topologie de la droite réelle

Dans ce chapitre, nous introduisons diverses notions fondamentales de topologie associées aux parties de $\mathbb{R}$.

7.1 Ensembles ouverts

7.1.1 Définition et exemples

Définition 7.1. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est* **ouvert** *si, pour tout $x \in E$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset E$.*

Ainsi, depuis tout point d'un ensemble ouvert, il est possible de se déplacer sur une distance strictement positive dans n'importe quelle direction tout en restant dans l'ensemble.

Exemple 7.2. Soit $a < b$ deux réels. Vérifions que l'intervalle (a, b) est ouvert. Soit $x \in (a, b)$. En posant $\epsilon := \min\{x - a, b - x\}$, on a $x - \epsilon \geqslant a$ et $x + \epsilon \leqslant b$, et donc $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset (a, b)$. ◇

Exercice 7.1

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

a) Vérifier que les intervalles $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$ et $\varnothing$ sont ouverts.

b) Vérifier que l'intervalle $(a, b]$ n'est pas ouvert.

Proposition 7.3. *Soit $\{E_i \mid i \in I\}$ une famille d'ensembles ouverts indexés par un ensemble I. Alors,*

1. *$\bigcup_{i\in I} E_i$ est ouvert;*
2. *$\bigcap_{i\in I} E_i$ est ouvert si I est un ensemble fini.*

Démonstration.

1. Soit $x \in \bigcup_{i\in I} E_i$. Il existe donc $i \in I$ tel que $x \in E_i$. E_i étant ouvert, on peut trouver $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset E_i \subset \bigcup_{i\in I} E_i$.
2. Soit $x \in \bigcap_{i\in I} E_i$. x appartient donc à chacun des E_i. E_i étant ouvert, il existe $\epsilon_i > 0$ tel que $(x - \epsilon_i, x + \epsilon_i) \subset E_i$. En prenant $\epsilon := \min\{\epsilon_i \mid i \in I\} > 0$, on a bien $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset \bigcap_{i\in I} E_i$. □

La restriction à I fini lorsque l'on considère l'intersection est essentielle, comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 7.4. Soit $E_n := (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Ces ensembles sont ouverts, mais leur intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} E_n = \{0\}$ n'est pas un ensemble ouvert. ◇

7.1.2 Voisinages

Définition 7.5. *Un sous-ensemble $V \subset \mathbb{R}$ est un **voisinage** du point $x_0 \in \mathbb{R}$ s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon) \subset V$. On notera $\mathscr{V}(x_0)$ l'ensemble des voisinages de x_0.*

Insistons sur le fait que l'on ne demande pas à un voisinage de x_0 d'être lui-même un intervalle ouvert, mais seulement de contenir un tel intervalle contenant x_0.

Exemple 7.6. L'intervalle $[0, 2]$ est un voisinage de 1, mais pas un voisinage de 2. ◇

Exercice 7.2

Soit $x \in \mathbb{R}$. Démontrer les affirmations suivantes.

a) $\mathbb{R} \in \mathscr{V}(x)$.

b) $V \neq \varnothing$ pour tout $V \in \mathscr{V}(x)$.

c) Si $V \in \mathscr{V}(x)$ et $V \subset V'$, alors $V' \in \mathscr{V}(x)$.

d) Si $V, V' \in \mathscr{V}(x)$, alors $V \cap V' \in \mathscr{V}(x)$.

e) $V \in \mathscr{V}(x)$ si et seulement si il existe un ouvert E tel que $x \in E \subset V$.

f) Si $V \in \mathscr{V}(x)$, alors il existe $V' \in \mathscr{V}(x)$ tel que $V \in \mathscr{V}(y)$ pour tout $y \in V'$.

g) Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x \neq y$, il existe $V \in \mathscr{V}(x)$ et $V' \in \mathscr{V}(y)$ tels que $V \cap V' = \varnothing$ (on dit que $\mathbb{R}$ est **séparé**).

La proposition suivante fournit une caractérisation alternative d'un ensemble ouvert en termes de voisinages.

Proposition 7.7. *$E \subset \mathbb{R}$ est ouvert si et seulement si E est un voisinage de chacun de ses points.*

Démonstration. Cela suit immédiatement des définitions. □

La notion de voisinage permet de reformuler de façon naturelle de nombreuses propriétés topologiques. Par exemple, la proposition suivante montre comment la convergence d'une suite peut être reformulée en ces termes.

Proposition 7.8. *Une suite $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si et seulement si, pour tout voisinage V de ℓ, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in V$ pour tout $n \geqslant N$.*

Démonstration.
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit V un voisinage de ℓ. Par définition, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon) \subset V$. Comme $u_n \to \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc bien $u_n \in V$ pour tout $n \geqslant N$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $\epsilon > 0$. L'ensemble $V := (\ell - \epsilon, \ell + \epsilon)$ est un voisinage de ℓ. Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $u_n \in V$ pour tout $n \geqslant N$. On a donc $|u_n - \ell| < \epsilon$ pour tout $n \geqslant N$, ce qui montre que u_n tend vers ℓ. □

7.2 Ensembles fermés

Définition 7.9. *Un sous-ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est **fermé** si $\mathbb{R} \setminus E$ est ouvert.*

Exemple 7.10. Soit $a \leqslant b$ dans $\mathbb{R}$. L'intervalle $[a, b]$ est fermé. En effet, l'ensemble $\mathbb{R} \setminus [a, b] = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ est ouvert, car c'est l'union de deux ouverts (voir l'Exercice 7.1 et la Proposition 7.3). ◇

Exemple 7.11. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ne sont pas ouverts, car tout intervalle ouvert non vide contient à la fois des points de $\mathbb{Q}$ et de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Ces deux ensembles étant complémentaires l'un de l'autre, ils ne sont pas fermés non plus. ◇

Exercice 7.3

Soient $a < b$ dans $\mathbb{R}$.

1. Vérifier que les intervalles $[a, +\infty)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, +\infty)$ et $\varnothing$ sont fermés.

2. Vérifier que l'intervalle $(a, b]$ n'est pas fermé.

3. Les ensembles suivants sont-ils ouverts ? Sont-ils fermés ?

a) $\mathbb{N}$ b) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$

⚠ La terminologie ouvert/fermé peut donner l'impression qu'un ensemble est nécessairement de l'un ou l'autre type. Les Exercices 7.1 et 7.3 montrent que ce n'est pas le cas. D'une part, les sous-ensembles $\mathbb{R}$ et $\varnothing$ sont à la fois ouverts et fermés (ce sont en fait les seuls avec cette propriété, par l'Exercice 7.4). D'autre part, les ensembles $(a, b]$ (avec $a < b$), $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont des exemples d'ensembles ni ouverts ni fermés.

Proposition 7.12. *Soit $\{E_i \mid i \in I\}$ une famille d'ensembles fermés indexés par un ensemble I.*

1. *$\bigcap_{i \in I} E_i$ est fermé.*
2. *$\bigcup_{i \in I} E_i$ est fermé si I est un ensemble fini.*

Notez bien que les conditions sur I sont interverties par rapport à celles de la Proposition 7.3.

Démonstration. Par les lois de De Morgan (Proposition 0.14),

$$\Big(\bigcup_{i \in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcap_{i \in I} E_i^{\mathrm{c}} \qquad \text{et} \qquad \Big(\bigcap_{i \in I} E_i\Big)^{\mathrm{c}} = \bigcup_{i \in I} E_i^{\mathrm{c}}.$$

La conclusion suit donc immédiatement de la définition d'ensemble fermé et de la Proposition 7.3. □

Exemple 7.13. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, considérons l'ensemble fermé $E_n := \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$. L'ensemble $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} E_n = [0, 1)$ n'est pas fermé. ◇

La proposition suivante fournit une caractérisation alternative des ensembles fermés en termes du comportement des suites à valeurs dans E.

Proposition 7.14. *Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si et seulement si toute suite convergente $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ a sa limite dans E.*

Démonstration. On procède par contraposition, c'est-à-dire que l'on va démontrer :

$$E \text{ n'est pas fermé} \quad \Leftrightarrow \quad \exists (u_n) \in E^{\mathbb{N}}, u_n \to \ell \notin E.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Si E n'est pas fermé, alors $\mathbb{R} \setminus E$ n'est pas ouvert : il existe $x \in \mathbb{R} \setminus E$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap E \neq \varnothing$ pour tout $\epsilon > 0$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on peut donc trouver $u_n \in E$ tel que $u_n \in (x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1})$. La suite (u_n) est composée d'éléments de E mais converge vers $x \notin E$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R} \setminus E$. Pour tout $\epsilon > 0$, $(\ell - \epsilon, \ell + \epsilon) \cap E \neq \varnothing$, puisqu'il contient des points de la suite. Ceci montre que $\mathbb{R} \setminus E$ n'est pas ouvert et donc que E n'est pas fermé. □

Exercice 7.4

1. Soient $a < b$ deux réels. Montrer que $[a, b]$ est fermé et que $[a, b)$ ne l'est pas en utilisant la Proposition 7.14.

2. Montrer que tout ensemble non vide, fermé et majoré $E \subset \mathbb{R}$ possède un maximum.

3. Soit $E \subset \mathbb{R}$ à la fois ouvert et fermé. Montrer que $E = \mathbb{R}$ ou $E = \varnothing$.

7.3 Frontière, adhérence, intérieur et extérieur

Intuitivement, les ensembles ouverts et fermés diffèrent dans leur comportement « au bord » de l'ensemble. Dans cette section, nous expliquons comment rendre précise cette intuition. Commençons par introduire la terminologie appropriée.

7.3.1 Intérieur et extérieur d'un ensemble

Définition 7.15. *Soit $E \subset \mathbb{R}$.*

- ▷ *$x \in \mathbb{R}$ est un **point intérieur** à E si E est un voisinage de x.*
- ▷ *L'ensemble de tous les points intérieurs à E est appelé l'**intérieur** de E et est noté $\mathring{E}$ ou $(E)^\circ$.*
- ▷ *L'**extérieur** de E est défini par $(\mathbb{R} \setminus E)^\circ$.*

Exercice 7.5

a) Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\mathring{[a,b]} = \mathring{[a,b)} = \mathring{(a,b]} = \mathring{(a,b)} = (a,b)$.

b) Montrer que $\mathring{\mathbb{N}} = \mathring{\mathbb{Q}} = (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^\circ = \varnothing$.

Exercice 7.6

Soit $E, F \subset \mathbb{R}$. Démontrer les affirmations suivantes.

a) $\mathring{E} \subset E$.

b) $\mathring{\mathring{E}} = \mathring{E}$.

c) Si $E \subset F$, alors $\mathring{E} \subset \mathring{F}$.

d) $(E \cap F)^\circ = \mathring{E} \cap \mathring{F}$.

e) $(\bigcup_{i \in I} E_i)^\circ \supset \bigcup_{i \in I} \mathring{E}_i$.

f) $(\bigcap_{i \in I} E_i)^\circ \subset \bigcap_{i \in I} \mathring{E}_i$.

La proposition suivante montre que l'intérieur d'un ensemble E est le plus grand ensemble ouvert contenu dans E.

Proposition 7.16. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Alors $\mathring{E}$ est ouvert et tout ouvert $F \subset E$ satisfait $F \subset \mathring{E}$. En particulier, E est ouvert si et seulement si $E = \mathring{E}$.*

Démonstration. Montrons que $\mathring{E}$ est ouvert. Il n'y a rien à démontrer si $\mathring{E} = \varnothing$. Dans le cas contraire, considérons $x \in \mathring{E}$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $I := (x - \epsilon, x + \epsilon) \subset E$. Soit $y \in I$ et $\epsilon' := \min\{y - (x - \epsilon), (x + \epsilon) - y\} > 0$. Comme $(y - \epsilon', y + \epsilon') \subset I \subset E$, $y \in \mathring{E}$. On en conclut que $I \subset \mathring{E}$ et $\mathring{E}$ est donc ouvert.

Considérons à présent un ensemble ouvert $F \subset E$. Alors, pour tout $x \in F$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset F \subset E$, ce qui montre que $E \in \mathscr{V}(x)$ et donc $x \in \mathring{E}$. On conclut que $F \subset \mathring{E}$.

Finalement, si $E = \mathring{E}$, alors E est évidemment ouvert. Inversement, si E est ouvert, alors $E \subset \mathring{E}$, ce qui montre que $E = \mathring{E}$. □

Exercice 7.7

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\mathring{E} = \bigcup_{F \in \mathscr{O}} F$, où $\mathscr{O} := \{F \subset \mathbb{R} \,|\, F \subset E,\ F \text{ ouvert}\}$.

7.3.2 Adhérence d'un ensemble

Définition 7.17. *Soit $E \subset \mathbb{R}$.*

- ▷ *x est un **point adhérent** à E si tout voisinage de x contient un point de E.*
- ▷ *L'ensemble de tous les points adhérents à E est appelé l'**adhérence** de E et est noté $\overline{E}$.*

Exercice 7.8

1. Soit $a < b$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\overline{[a,b]} = \overline{[a,b)} = \overline{(a,b]} = \overline{(a,b)} = [a,b]$.

2. Montrer que $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N}$ et que $\overline{\mathbb{Q}} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.

Exercice 7.9

Soit $E, F \subset \mathbb{R}$. Démontrer les affirmations suivantes.

a) $E \subset \overline{E}$.

b) $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

c) Si $E \subset F$, alors $\overline{E} \subset \overline{F}$.

d) $\overline{E \cup F} = \overline{E} \cup \overline{F}$.

e) $\overline{\bigcup_{i\in I} E_i} \supset \bigcup_{i\in I} \overline{E}_i$.

f) $\overline{\bigcap_{i\in I} E_i} \subset \bigcap_{i\in I} \overline{E}_i$.

g) $\mathbb{R} \setminus \mathring{E} = \overline{\mathbb{R} \setminus E}$.

La proposition suivante montre que l'adhérence d'un ensemble E est le plus petit ensemble fermé contenant E.

Proposition 7.18. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Alors $\overline{E}$ est fermé et tout fermé $F \supset E$ satisfait $F \supset \overline{E}$. En particulier, $E \subset \mathbb{R}$ est fermé si et seulement si $E = \overline{E}$.*

Démonstration. Montrons que $\overline{E}$ est fermé. Il n'y a rien à démontrer si $\overline{E} = \mathbb{R}$. Dans le cas contraire, soit $x \in \mathbb{R} \setminus \overline{E}$. Il existe donc $\epsilon > 0$ tel que $I := (x-\epsilon, x+\epsilon) \cap E = \varnothing$. Pour tout $y \in I$, $I \in \mathscr{V}(y)$ et $I \cap E = \varnothing$. Par conséquent, $y \notin \overline{E}$. On a donc $I \subset \mathbb{R} \setminus \overline{E}$, ce qui montre que $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$ est ouvert.

Considérons un fermé $F \supset E$. Alors, $\mathbb{R} \setminus F$ est ouvert et contenu dans $\mathbb{R} \setminus E$; $\mathbb{R} \setminus F$ ne contient donc aucun point adhérent à E et, par conséquent, est un sous-ensemble de $\mathbb{R} \setminus \overline{E}$.

Finalement, si $E = \overline{E}$, alors E est évidemment fermé. Inversement, si E est fermé, alors $E \supset \overline{E}$, ce qui montre que $E = \overline{E}$. □

Exercice 7.10

Soit $E \subset \mathbb{R}$. Montrer que $\overline{E} = \bigcap_{F\in\mathscr{F}} F$, où $\mathscr{F} := \{F \subset \mathbb{R} \,|\, F \supset E,\ F \text{ fermé}\}$.

La proposition suivante établit le lien entre les notions de valeur d'adhérence d'une suite et la notion d'adhérence d'un ensemble.

Lemme 7.19. *Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite. Alors a est une valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement si $a \in \bigcap_{N\geqslant 0} \overline{\{u_k \,|\, k \geqslant N\}}$.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit a une valeur d'adhérence de (u_n). Fixons $N \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \{u_k \,|\, k \geqslant N\} \neq \varnothing$, ce qui montre que $a \in \overline{\{u_k \,|\, k \geqslant N\}}$. N étant arbitraire, la conclusion suit.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $a \in \bigcap_{N\geqslant 0} \overline{\{u_k \,|\, k \geqslant N\}}$. Soit $N \in \mathbb{N}$ et $\epsilon > 0$. Alors, $(a-\epsilon, a+\epsilon) \cap \{u_k \,|\, k \geqslant N\} \neq \varnothing$. On peut donc trouver $k \geqslant N$ tel que $|u_k - a| < \epsilon$, ce qui montre que a est une valeur d'adhérence de la suite. □

Finalement, montrons qu'il est possible de caractériser l'adhérence d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ en termes des suites à valeurs dans E.

Proposition 7.20. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. Alors $x \in \overline{E}$ si et seulement si il existe une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $x \in \overline{E}$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap E \neq \varnothing$ et on peut donc trouver $u_n \in E$ tel que $|u_n - x| < \frac{1}{n}$. La suite (u_n) converge donc vers x.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ convergeant vers x. Par la Proposition 7.8, tout voisinage de x contient des points de la suite. Ces derniers appartenant à E, on conclut que $x \in \overline{E}$. □

7.3.3 Frontière d'un ensemble

Définition 7.21. *Soit $E \subset \mathbb{R}$. La **frontière** de E est l'ensemble $\partial E := \overline{E} \setminus \mathring{E}$.*

La frontière de E correspond à l'idée intuitive de « bord de E », dans le sens que tout voisinage d'un point de la frontière contient à la fois au moins un point de E et un point hors de E.

Exemple 7.22. En combinant les résultats vus précédemment, on obtient

$$\partial[a,b] = \partial[a,b) = \partial(a,b] = \partial(a,b) = [a,b] \setminus (a,b) = \{a,b\},$$
$$\partial\mathbb{N} = \mathbb{N} \setminus \varnothing = \mathbb{N}, \qquad \partial\mathbb{Q} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \mathbb{R} \setminus \varnothing = \mathbb{R}.$$ ◇

Exercice 7.11

Soit $E \subset \mathbb{R}$.

1. Démontrer les affirmations suivantes.
a) $\partial E = \overline{E} \cap \overline{\mathbb{R} \setminus E}$ b) $\overline{E} = E \cup \partial E$ c) $\mathring{E} = E \setminus \partial E$ d) $\partial E = \partial(\mathbb{R} \setminus E)$

2. Déduire les affirmations suivantes du point précédent.
a) ∂E est un ensemble fermé.
b) E est fermé si et seulement si E contient sa frontière.
c) E est ouvert si et seulement si E est disjoint de sa frontière.

7.4 Ouverts et fermés relatifs

Les définitions d'ouvert et de fermé s'étendent de manière naturelle aux parties d'un ensemble $F \subset \mathbb{R}$.

Définition 7.23. *Soit $F \subset \mathbb{R}$. Une partie $E \subset F$ est un **ouvert de F** si, pour tout $x \in E$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap F \subset E$. E est un **fermé de F** si $F \setminus E$ est un ouvert de F.*

Exemple 7.24. Considérons $F := [0,1)$ et $E_1 := (0,1)$, $E_2 := [0,1)$, $E_3 := [0, \frac{1}{2})$, $E_4 := [0, \frac{1}{2}]$ et $E_5 := [\frac{1}{2}, 1)$. Les ensembles E_1, E_2 et E_3 sont ouverts dans F et les ensembles E_2, E_4 et E_5 sont fermés dans F. ◇

Proposition 7.25. *Soit $F \subset \mathbb{R}$. Alors, $E \subset F$ est un ouvert (resp. fermé) de F si et seulement si il existe $A \subset \mathbb{R}$ ouvert (resp. fermé) dans $\mathbb{R}$ tel que $E = A \cap F$.*

Démonstration. On discute le cas de E ouvert. Le cas de E fermé s'en déduit par passage au complémentaire.
$\boxed{\Rightarrow}$ Soit $E \subset F$ un ouvert de F. Pour chaque $x \in E$, il existe $\epsilon_x > 0$ tel que $(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap F \subset E$. Alors, l'ensemble $A := \bigcup_{x \in E}(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (c'est une union d'ouverts) et $E \subset A \cap F = \bigcup_{x \in E}(x - \epsilon_x, x + \epsilon_x) \cap F \subset E$, ce qui montre que $E = A \cap F$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ouvert de $\mathbb{R}$. Alors, pour tout $x \in A \cap F$, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(x - \epsilon, x + \epsilon) \subset A$. On a donc également $(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap F \subset A \cap F$, ce qui montre que $A \cap F$ est un ouvert de F. □

Comme application de ces notions, nous allons établir une caractérisation de la continuité en termes d'ouverts (relatifs). Cette dernière permet d'étendre la notion de continuité à des contextes beaucoup plus généraux, comme cela sera expliqué dans le cours de topologie générale.

Proposition 7.26. *Soit $F \subset \mathbb{R}$ et $f : F \to \mathbb{R}$. Alors, f est continue si et seulement si, pour tout ouvert $E \subset \mathbb{R}$, $f^{-1}(E)$ est un ouvert de F.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $f : F \to \mathbb{R}$ continue. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ouvert, $x_0 \in f^{-1}(E)$ et $y_0 := f(x_0) \in E$. D'une part, E étant ouvert, il existe $\epsilon > 0$ tel que $(y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon) \subset E$. D'autre part, f étant continue, il existe $\delta > 0$ tel que $|f(x) - y_0| < \epsilon$ pour tout $x \in F$ tel que $|x - x_0| < \delta$. Posons $I := F \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Alors, $f(I) \subset E$, c'est-à-dire $I \subset f^{-1}(E)$. Il suit que $f^{-1}(E)$ est un ouvert de F.
$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $x_0 \in F$ et $y := f(x_0)$. Fixons $\epsilon > 0$. L'intervalle $J := (y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon)$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. Par conséquent, $f^{-1}(J) \subset F$ est un ouvert de F contenant x_0. Il existe donc $\delta > 0$ tel que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap F \subset f^{-1}(J)$. En particulier, pour tout $x \in F$ tel que $|x - x_0| < \delta$, on a $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$, ce qui montre que f est continue. $\square$

7.5 Ensembles compacts

Une catégorie de sous-ensembles jouant un rôle particulièrement important en analyse est celle des ensembles compacts. Dans $\mathbb{R}$ (et, plus généralement, dans les espaces métriques), ces derniers peuvent être caractérisés en termes de suites.

Définition 7.27. *$E \subset \mathbb{R}$ est **(séquentiellement) compact** si toute suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergeant vers un point de E.*

Un intervalle fermé et borné $[a, b]$ est donc compact, par le Théorème de Bolzano–Weierstrass. Comme on a pu le voir dans les chapitres précédents, il a souvent été utile de travailler sur de tels intervalles, car cela garantissait l'existence des extrema d'une fonction continue, sa continuité uniforme, etc. Ceci explique l'importance des ensembles compacts, car ce sont précisément ceux pour lesquels ces arguments restent valables. Le résultat suivant fournit une caractérisation explicite des compacts de $\mathbb{R}$.

Proposition 7.28. *$E \subset \mathbb{R}$ est compact si et seulement si E est fermé et borné.*

Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $E \subset \mathbb{R}$ compact. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ une suite convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Alors, toutes ses sous-suites convergent également vers x. E étant compact, on en conclut que $x \in E$ et donc que E est fermé (Proposition 7.14).

Supposons, par l'absurde, que E n'est pas borné. Dans ce cas, il existe une suite $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$. Or, dans ce cas, aucune des sous-suites de (u_n) n'est bornée et, par conséquent, aucune n'est convergente (par la Proposition 2.8). Ceci contredit l'hypothèse que E est compact.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que $E \subset \mathbb{R}$ soit fermé et borné. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. Alors, (u_n) est bornée et, par le Théorème de Bolzano–Weierstrass, admet donc une sous-suite convergente. Notons ℓ sa limite. E étant fermé, la Proposition 7.14 implique que $\ell \in E$. On en conclut que E est compact. $\square$

7.6 L'ensemble de Cantor

Dans cette dernière section, on introduit un sous-ensemble remarquable de $\mathbb{R}$ introduit par Georg Cantor en 1884 et on étudie certaines de ses propriétés élémentaires.

L'ensemble de Cantor est construit de façon itérative (*cf.* Figure 7.1) :

- ▷ on commence avec l'ensemble $C_0 := [0, 1]$;
- ▷ on retire de C_0 l'intervalle $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$: $C_1 := C_0 \setminus (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = [0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$;

- ▷ on retire de C_1 les intervalles ouverts de longueur $\frac{1}{9}$ centrés sur chacun des intervalles de C_1 : $C_2 \coloneqq [0, \frac{1}{9}] \cup [\frac{2}{9}, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, \frac{7}{9}] \cup [\frac{8}{9}, 1]$;
- ▷ on répète cette opération une infinité de fois.

L'ensemble de Cantor est l'ensemble $C_\infty \coloneqq \bigcap_{n\geqslant 0} C_n$ obtenu à la fin de cette procédure.

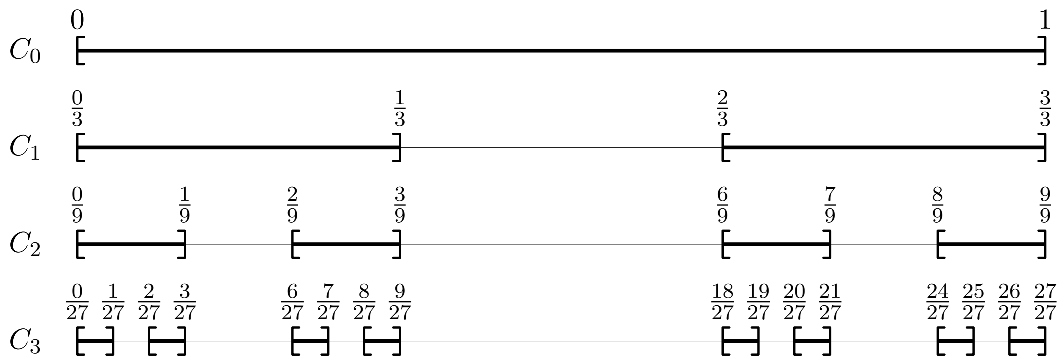


FIGURE 7.1: Les premières étapes de la construction de l'ensemble de Cantor.

Clairement, C_n est composé de 2^n intervalles fermés disjoints, chacun de longueur 3^{-n}. Ainsi, la longueur totale des intervalles de C_n est égale à $(\frac{2}{3})^n$, ce qui tend évidemment vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

L'observation précédente pourrait conduire à penser qu'il ne reste plus grand chose dans C_∞. Un instant de réflexion montre que les extrémités de chacun des intervalles apparaissant à n'importe quelle étape de la construction ne sont jamais retirées. Il reste donc une infinité de points. C_∞ contient en réalité beaucoup plus de points que ce que cet argument ne laisse à penser. Nous reviendrons sur ce point dans la Section 7.6.2. Analysons tout d'abord quelques-unes des remarquables propriétés topologiques de C_∞.

7.6.1 Propriétés topologiques

Introduisons un peu de terminologie supplémentaire :

- ▷ Une partie $E \subset \mathbb{R}$ est **nulle part dense** si l'intérieur de son adhérence est vide.
- ▷ Un point $x \in E \subset \mathbb{R}$ est un **point isolé** de E s'il existe un voisinage $V \in \mathscr{V}(x)$ tel que $V \cap E = \{x\}$.
- ▷ Un ensemble $E \subset \mathbb{R}$ est dit **parfait** si E est fermé et ne contient aucun point isolé.

Exemple 7.29. $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$ est nulle part dense et tous ses points sauf 0 sont isolés. $[0, 1]$ est parfait. ◇

Proposition 7.30. *C_∞ est un ensemble compact, nulle part dense et parfait.*

Démonstration. D'une part, il suit de la Proposition 7.12 que chaque ensemble C_n est fermé (étant une union finie d'intervalles fermés). La même proposition implique donc que C_∞ est également fermé (c'est une intersection d'ensembles fermés)

D'autre part, C_∞ étant borné (c'est un sous-ensemble de $[0, 1]$), sa compacité est une conséquence de la Proposition 7.28.

De plus, C_∞ ne contient aucun intervalle ouvert non vide (la longueur totale des intervalles de C_n tendant vers 0 avec n) et est donc d'intérieur vide. Le fait que C_∞ est nulle-part dense suit du fait que $\overline{C_\infty} = C_\infty$ (c'est un ensemble fermé).

Il reste à vérifier que C_∞ ne contient aucun point isolé. Soit $x \in C_\infty$ et fixons $\epsilon > 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $3^{-n} < \epsilon$. Considérons la $n^{\text{ème}}$ approximation C_n de C_∞. C_n est composé de 2^n intervalles de longueur 3^{-n}. Soit $I = [a, b]$ le seul de ces intervalles qui contienne x. Évidemment, $I \subset (x - \epsilon, x + \epsilon)$. Par conséquent, ses extrémités a et b appartiennent à $C_\infty \cap (x - \epsilon, x + \epsilon)$ et au moins l'un de ces deux points est distinct de x. ϵ étant arbitraire, il suit que x n'est pas un point isolé. $\square$

7.6.2 « Taille » de l'ensemble de Cantor

Les résultats précédents tendaient plutôt à dire que C_∞ est un sous-ensemble de $[0, 1]$ de « petite taille » : sa « longueur » (plus précisément la limite de la longueur totale des intervalles de C_n) est égale à 0 et C_∞ est nulle part dense.

Pour conclure cette section, nous allons montrer, de façon quelque peu informelle, un résultat indiquant que C_∞ est un sous-ensemble de $[0, 1]$ de « grande taille » : il existe une surjection de C_∞ dans $[0, 1]$, ce qui montre que C_∞ « contient autant de points que $[0, 1]$ » ! En particulier, C_∞ contient bien plus que les extrémités des intervalles apparaissant dans sa construction (les points obtenus de cette façon sont clairement tous rationnels). [1]

La façon la plus simple de voir cela consiste à représenter les points de $[0, 1]$ en base 3. En procédant de façon similaire à ce qui est fait dans l'Exemple 2.22, on peut représenter tout nombre $x \in [0, 1]$ sous la forme $0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots$ avec $(\mathsf{x}_k) \in \{0, 1, 2\}^{\mathbb{N}^*}$. Plus précisément,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{x}_k 3^{-k}.$$

Observez à présent que

$$[0, 1/3] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 0\} \qquad \text{et} \qquad [2/3, 1] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 2\}\,.$$

En effet, on a, par exemple, $\sum_{k=2}^{\infty} \mathsf{x}_k 3^{-k} \leqslant 2 \sum_{k=2}^{\infty} 3^{-k} = 1/3$. Ainsi, C_1 contient tous les nombres de $[0, 1]$ dont le développement en base 3 commence par $0{,}0\ldots$ ou $0{,}2\ldots$. De même, à l'étape suivante, l'intervalle $[0, 1/3]$ se trouve décomposé en comme $[0, 1/9] \cup (1/9, 2/9) \cup [2/9, 1/3]$, et l'intervalle du milieu est retiré. Observez que

$$[0, 1/9] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 0, \mathsf{x}_2 = 0\} \qquad \text{et} \qquad [2/9, 1/3] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 0, \mathsf{x}_2 = 2\}\,.$$

De la même façon, $[2/3, 1] = [2/3, 7/9] \cup (7/9, 8/9) \cup [8/9, 1]$ et

$$[2/3, 7/9] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 2, \mathsf{x}_2 = 0\} \qquad \text{et} \qquad [8/9, 1] = \{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \,|\, \mathsf{x}_1 = 2, \mathsf{x}_2 = 2\}\,.$$

En poursuivant ainsi, on conclut que

$$C_\infty = \big\{0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots \;\big|\; \mathsf{x}_k \in \{0, 2\} \text{ pour tout } k \geqslant 1\big\}.$$

On peut à présent facilement construire une surjection $f : C_\infty \to [0, 1]$ par

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathsf{x}_k 3^{-k} \mapsto \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathsf{x}_k}{2} 2^{-k}.$$

En d'autres termes, f envoie un élément de l'ensemble de Cantor dont le développement en base 3 est $0{,}\mathsf{x}_1\mathsf{x}_2\mathsf{x}_3\ldots$ sur un élément de $[0, 1]$ dont le développement en base 2 est $0{,}\mathsf{y}_1\mathsf{y}_2\mathsf{y}_3\ldots$ avec

$$\mathsf{y}_k := \begin{cases} 0 & \text{if } \mathsf{x}_k = 0, \\ 1 & \text{if } \mathsf{x}_k = 2. \end{cases}$$

1. On ne l'a pas discuté dans ce cours, mais la taille de l'ensemble $\mathbb{Q}$ est beaucoup plus petite que celle de l'ensemble $\mathbb{R}$. Plus précisément, $\mathbb{Q}$ est **dénombrable**, ce qui signifie qu'il existe une fonction bijective de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{N}$ (en d'autres mots, on peut numéroter les éléments de $\mathbb{Q}$), alors que l'ensemble $\mathbb{R}$ ne l'est pas.

7.7 Exercices supplémentaires

Exercice 7.12

1. Soit C_∞ l'ensemble de Cantor.

a) Montrer que $\frac{1}{4} \in C_\infty$ et, en utilisant le fait que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$, montrer que $\frac{\pi}{4} \notin C_\infty$. *(Indication : montrer que* $1/4 = 0{,}02020202\ldots$ *en base* 3.*)*

b) Donner un exemple de nombre appartenant à $C_\infty \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

c) Montrer que, C_∞ est **totalement discontinu** : pour tout $x, y \in C_\infty$ satisfaisant $x < y$, il existe $z \notin C_\infty$ tel que $x < z < y$.

A Calcul de primitives

Cet appendice ne sera pas couvert en cours. Il est présent pour vous aider lors de la résolution de certains exercices vous demandant de trouver les primitives d'une fonction. Il vous est donc fortement conseillé de lire son contenu si vous avez des difficultés avec ce type de calculs.

Le but de ce cours n'est pas de faire de vous des experts du calcul de primitives. C'est en effet une compétence de moins en moins utile, les outils informatiques automatisant cela étant aujourd'hui extrêmement performants. Néanmoins, il est attendu de vous que vous soyez capables de le faire à la main dans des cas relativement simples (comme ceux donnés dans les exercices). Pour cette raison, nous nous contenterons de ne présenter ici qu'une poignée des très nombreuses méthodes existantes. L'étudiant désirant toutefois développer sa virtuosité dans ce type de calculs pourra aisément trouver de nombreuses ressources sur internet ou à la bibliothèque.

Insistons finalement sur une différence importante entre le calcul de dérivées et celui de primitives : en partant d'une fonction (dérivable) exprimée en termes de fonctions usuelles en utilisant les opérations arithmétiques et la composition de fonctions, on peut toujours exprimer sa dérivée dans les mêmes termes. *Ce n'est en général pas le cas pour les primitives !* Par exemple, on peut démontrer que les primitives de la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ ne peuvent pas s'exprimer en termes des fonctions usuelles ; il est donc vain de chercher à les déterminer [1].

A.1 Primitives de quelques fonctions usuelles

La liste suivante contient les primitives de diverses fonctions souvent rencontrées. Elle ne doit évidemment pas être employée si on vous demande de déterminer *ces* primitives, mais peut se révéler utile lorsque vous cherchez à ramener le calcul de la primitive d'une fonction plus compliquée à une primitive déjà connue (par exemple, via un changement de variable ou une intégration par parties).

Remarque A.1. ▷ *Les primitives indiquées peuvent être utilisées sur tout intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel l'intégrande est bien défini.*

▷ *On n'indique à chaque fois qu'une des primitives, sans indiquer explicitement la constante additive.*

▷ *On peut vérifier la validité de ces primitives en calculant leur dérivée.* ◇

1. Les personnes utilisant régulièrement les primitives de cette fonction, en théorie des probabilités ou en statistiques par exemple, peuvent évidemment lui donner un nom et l'ajouter à leur collection de fonctions « usuelles ». La **fonction d'erreur** est ainsi définie par $\mathrm{erf}(x) \coloneqq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Logarithme, exponentielle, puissances

$$\int x^{-1}\,\mathrm{d}x = \log|x|, \qquad \int x^a\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a+1}x^{a+1} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),$$
$$\int \log x\,\mathrm{d}x = x\log x - x, \qquad \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x.$$

Fonctions trigonométriques et leurs réciproques

$$\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x, \qquad \int \arcsin x\,\mathrm{d}x = x\arcsin x + \sqrt{1-x^2},$$
$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x, \qquad \int \arccos x\,\mathrm{d}x = x\arccos x - \sqrt{1-x^2},$$
$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\log\cos x, \qquad \int \arctan x\,\mathrm{d}x = x\arctan x - \log\sqrt{1+x^2}.$$

Fonctions hyperboliques et leurs réciproques

$$\int \sinh x\,\mathrm{d}x = \cosh x, \qquad \int \operatorname{arsinh} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arsinh} x - \sqrt{1+x^2},$$
$$\int \cosh x\,\mathrm{d}x = \sinh x, \qquad \int \operatorname{arcosh} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{arcosh} x - \sqrt{x^2-1},$$
$$\int \tanh x\,\mathrm{d}x = \log\cosh x, \qquad \int \operatorname{artanh} x\,\mathrm{d}x = x\operatorname{artanh} x + \log\sqrt{1-x^2}.$$

Fonctions rationnelles et irrationnelles

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \arctan x, \qquad \int \frac{1}{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\log\left|\frac{x+1}{x-1}\right|,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin x, \qquad \int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\arcsin x + x\sqrt{1-x^2}\big),$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \operatorname{arsinh} x, \qquad \int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\big(\operatorname{arsinh} x + x\sqrt{1+x^2}\big).$$

A.2 Quelques remarques sur l'intégration par changement de variable

Avant de se lancer dans une recherche d'un changement de variable judicieux ou d'une intégration par parties, il est conseillé de passer quelques instants à vérifier que l'intégrande ne peut pas être mis sous la forme de la dérivée d'une fonction, auquel cas trouver une primitive est immédiat. Par exemple, dans le cas d'un intégrande du type $\frac{f'}{f} = (\log|f|)'$:

$$\int \frac{\sin^2 x\cos x}{1+\sin^3 x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \big(\log|1+\sin^3 x|\big)'\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\log|1+\sin^3 x|.$$

D'autres exemples sont des intégrandes du type $\frac{f'}{2\sqrt{f}} = (\sqrt{f})'$, $f'e^f = (e^f)'$, $f'\cos(f) = (\sin(f))'$, $f'g + fg' = (fg)'$, $\frac{f'g-fg'}{g^2} = (\frac{f}{g})'$, etc.

Plus généralement, les cas les plus simples pour une intégration par changement de variable ont lieu lorsque l'on réalise que l'intégrande est de la forme $f(g(x))\,g'(x)$, où la primitive de f est connue. L'intégrande ne prend cependant pas toujours une forme aussi simple. Nous donnons à présent quelques techniques pouvant se révéler utiles dans de telles situations.

Un premier exemple est le calcul de $\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$. Cet intégrande n'a pas la forme désirée : il manque un e^x au numérateur. Une solution est d'additionner 0 à l'intégrande de façon judicieuse :

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x = \int \Bigl(1-\frac{e^x}{1+e^x}\Bigr)\,\mathrm{d}x = x - \log(1+e^x).$$

Comme deuxième exemple, considérons le calcul de primitive de $1/\cosh x$: cette fois, on multiplie par 1 de façon judicieuse,

$$\int \frac{1}{\cosh x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{e^x+e^{-x}}\cdot\frac{e^x}{e^x}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x.$$

À ce stade, la substitution $u \coloneqq e^x$, $\mathrm{d}u = e^x\mathrm{d}x$ permet de conclure :

$$2\int \frac{e^x}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{1}{u^2+1}\,\mathrm{d}u = 2\arctan u = 2\arctan(e^x).$$

A.3 Quelques remarques sur l'intégration par parties

Si vous ne parvenez pas à trouver un changement de variable adéquat, vous pouvez essayer une intégration par parties. Une telle approche n'est possible que si l'intégrande prend la forme d'un produit de deux fonctions dont au moins une possède une primitive connue.

Souvent, la difficulté principale avec cette technique est de choisir convenablement la fonction à intégrer et celle à dériver. Une indication que vous avez fait un mauvais choix est lorsque la fonction obtenue après intégration par parties est pire que celle de départ ! Vous pouvez souvent le déterminer de tête (avec un peu de pratique). Par exemple si on vous demande de déterminer $\int xe^x$, intégrer x et dériver e^x n'est pas une bonne idée, puisque vous allez vous retrouver à devoir déterminer $\int x^2e^x$, ce qui n'a pas amélioré la situation... Par contre, le choix inverse (dériver x et intégrer e^x) conduit au résultat désiré sans effort :

$$\int xe^x\,\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\,\mathrm{d}x = xe^x - e^x.$$

Notons que pour calculer $\int f$ via une intégration par parties, il peut être occasionnellement utile d'appliquer cette technique au produit $f\cdot 1$. Un exemple classique est le calcul de $\int \log x\,\mathrm{d}x$:

$$\int \log x\,\mathrm{d}x = \int 1\cdot\log x\,\mathrm{d}x = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\log x - x.$$

Dans certaines circonstances, il peut être nécessaire d'enchaîner plusieurs applications de l'intégration par parties. C'est le cas, par exemple, si vous cherchez à calculer $\int P(x)f(x)\,\mathrm{d}x$ où P est une fonction polynomiale et f une fonction telle que $\sin x$, $\cos x$ ou e^x. En effet, chaque application réduit le degré du polynôme et ne rend pas la partie impliquant la fonction f plus compliquée. On a, par exemple,

$$\begin{aligned}\int x^2\sin x\,\mathrm{d}x &= -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,\mathrm{d}x = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2\int \sin x\,\mathrm{d}x\\ &= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x.\end{aligned}$$

Notons également que cette technique peut également être utile lorsqu'elle « tourne en rond ». Par exemple, deux applications de l'intégration par parties conduisent à

$$\int e^x\sin x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - \int e^x\cos x\,\mathrm{d}x = e^x\sin x - e^x\cos x - \int e^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

d'où l'on conclut que

$$\int e^x \sin x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} e^x \sin x - \frac{1}{2} e^x \cos x.$$

Finalement, elle permet parfois d'obtenir des **formules de réduction**. Soit $I_n = \int f_n$ une intégrale indéfinie dépendant d'un paramètre $n \in \mathbb{N}$. Une formule de réduction permet d'exprimer I_n en termes des I_k avec $k < n$. Considérons, par exemple, $I_n \coloneqq \int \sin^n x \, \mathrm{d}x$. On a alors, en utilisant une intégration par parties et l'identité $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$,

$$\begin{aligned} I_n &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x \, \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \, \mathrm{d}x - (n-1) \int \sin^n x \, \mathrm{d}x \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) I_{n-2} - (n-1) I_n, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit que $I_n = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$. Comme $I_0 = x$ et $I_1 = -\cos x$, on peut déterminer les I_n itérativement : $I_2 = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} x$, $I_3 = -\frac{1}{3} \sin^2 x \cos x - \frac{2}{3} \cos x$, etc.

A.4 Intégration de fonctions rationnelles

Une classe importante d'intégrandes dont les primitives peuvent être systématiquement déterminées est celle des fonctions rationnelles. Dans cette section, nous décrivons une procédure permettant de le faire. Celle-ci repose sur la décomposition d'une fonction rationnelle en somme de fractions simples.

A.4.1 Décomposition en fractions simples

Soit donc $R \coloneqq P/Q$ une fonction rationnelle. Par division euclidienne de P par Q, on peut écrire R sous la forme

$$R = P_1 + \frac{P_2}{Q_2},$$

où P_1, P_2 et Q_2 sont des fonctions polynomiales telles que P_2 et Q_2 n'aient aucun facteur commun et que le degré de Q_2 soit au moins égal au degré de P_2. On peut également supposer, sans perte de généralité, que le coefficient du monôme de plus haut degré de Q_2 est égal à 1.

Exemple A.2. Considérons le cas où $P(x) \coloneqq x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 2x + 1$ et $Q(x) \coloneqq x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x - 2$. On a alors

$$R(x) = x + \frac{3x+1}{x^3 + x^2 - 2}.$$

On a donc $P_1 \coloneqq x$, $P_2 \coloneqq 3x + 1$ et $Q_2 \coloneqq x^3 + x^2 - 2$. ◇

Les primitives de la fonction polynomiale P_1 ne posant aucune difficulté, on peut se concentrer sur celles de la fonction rationnelle $R_2 \coloneqq P_2/Q_2$.

L'étape suivante consiste à décomposer Q_2 en produit de polynômes irréductibles. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les racines réelles (distinctes) de Q_2. Par le théorème fondamental de l'algèbre (qui sera démontré dans le cours d'algèbre et/ou celui d'analyse complexe),

$$Q_2(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - a_i)^{k_i} \cdot \prod_{j=1}^{m} (x^2 + 2b_j + c_j)^{\ell_j},$$

où $k_1, \ldots, k_n$ et $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sont des entiers positifs et les facteurs $x^2 + 2b_j + c_j$ sont les facteurs irréductibles (tous distincts) de Q_2 (on a donc $b_j^2 < c_j$ pour tout $j \in [\![1, m]\!]$). On peut alors montrer que

$$\frac{P_2(x)}{Q_2(x)} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{\alpha_{i,r}}{(x - a_i)^r} + \sum_{j=1}^{m} \sum_{r=1}^{\ell_j} \frac{\beta_{j,r} x + \gamma_{j,r}}{(x^2 + 2b_j + c_j)^r}, \tag{A.1}$$

pour certains coefficients $\alpha_{i,r}$, $\beta_{j,s}$ et $\gamma_{j,s}$.

Exemple A.3. Retournons à l'exemple. Dans ce cas,

$$Q_2(x) = (x-1)(x^2+2x+2).$$

Il existe donc des coefficients α, β et γ tels que

$$R_2(x) := \frac{3x+1}{(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{\alpha}{x-1} + \frac{\beta x+\gamma}{x^2+2x+2} = \frac{(\alpha+\beta)x^2+(2\alpha-\beta+\gamma)x+(2\alpha-\gamma)}{(x-1)(x^2+2x+2)}.$$

Il reste à déterminer les coefficients α, β et γ. D'une part

$$\alpha = \lim_{x\to 1}(x-1)R_2(x) = \lim_{x\to 1}\frac{3x+1}{(x^2+2x+2)} = \frac{4}{5}.$$

D'autre part, on doit avoir $\alpha+\beta=0$, $2\alpha-\beta+\gamma=3$ et $2\alpha-\gamma=1$, d'où l'on tire $\beta=-4/5$ et $\gamma=3/5$. On a donc finalement

$$R_2(x) = \frac{4}{5(x-1)} + \frac{-4x+3}{5(x^2+2x+2)}.$$ ◇

À ce stade, on a réduit le problème à la détermination des primitives des termes apparaissant dans le membre de droite de (A.1).

A.4.2 Intégration des fractions simples

On a déjà vu les primitives des termes du premier type dans (A.1) :

$$\int \frac{\alpha}{(x-x_0)^r}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \alpha\log|x-x_0| & \text{si } r=1,\\ \frac{\alpha}{1-r}(x-x_0)^{-(r-1)} & \text{si } r\geqslant 2.\end{cases}$$

Il reste donc à déterminer les primitives des termes du second type dans (A.1) :

$$\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2b+c)^r},$$

avec $b^2<c$. Écrivons tout d'abord le dénominateur sous la forme

$$(x^2+2b+c)^r = \big((x+b)^2+c-b^2\big)^r,$$

puis effectuons le changement de variable $t := (x+b)/\sqrt{c-b^2}$:

$$\int\frac{\beta x+\gamma}{(x^2+2b+c)^r}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\beta x+\gamma}{((x+b)^2+c-b^2)^r}\,\mathrm{d}x = (c-b^2)^{\frac12-r}\int\frac{\beta\sqrt{c-b^2}\,t-\beta b+\gamma}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t.$$

On est donc ramené à la recherche de primitives du type $\int(At+B)/(t^2+1)^r\,\mathrm{d}t$. Pour ce faire, on sépare l'intégrande en deux :

$$\int\frac{At+B}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t = \frac{A}{2}\int\frac{2t}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t + B\int\frac{1}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t.$$

Le premier terme du membre de droite se traite facilement puisqu'il est de la forme $\int f'/f^r$. Occupons-nous donc du second terme $I_r(t) := \int\frac{1}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t$. Le plus simple est probablement de procéder par réduction. Observons tout d'abord que le cas $r=1$ est facile :

$$I_1(t) = \int\frac{1}{t^2+1}\,\mathrm{d}t = \arctan t.$$

Supposons donc $r \in \mathbb{N}$, $r \geqslant 2$. En faisant une intégration par parties, on obtient

$$I_r(t) = \int \frac{1}{(t^2+1)^r}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^r} + 2r\int \frac{t^2}{(t^2+1)^{r+1}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{(t^2+1)^r} + 2rI_r(t) - 2rI_{r+1}(t).$$

On conclut donc que

$$I_{r+1}(t) = \frac{t}{2r(t^2+1)^r} + \frac{2r-1}{2r}I_r(t).$$

Exemple A.4. En retournant une dernière fois à l'exemple qui nous accompagne dans cette section, la procédure ci-dessus fournit

$$\begin{aligned}\int R &= \int x\,\mathrm{d}x + \frac{4}{5}\int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{5}\int \frac{-4x+3}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^2}{2} + \frac{4}{5}\log|x-1| - \frac{2}{5}\log|x^2+2x+2| + \frac{7}{5}\arctan(x+1).\end{aligned}$$ $\diamond$

A.4.3 Changements de variable menant à des fonctions rationnelles

Finalement, mentionnons quelques changements de variables permettant de ramener le calcul de diverses primitives au cas des fonctions rationnelles. Dans la suite, $R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ est une fonction rationnelle en n variables $u_1, \dots, u_n$.

Supposons tout d'abord que l'on cherche à déterminer les primitives d'une fonction rationnelle trigonométrique $R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)$. Le changement de variable $x = 2\arctan t$, $\mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$ et l'observation que (par le point 5 de l'Exercice 6.6)

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}, \qquad \cot x = \frac{1-t^2}{2t}$$

impliquent que

$$\int R(\sin x, \cos x, \tan x, \cot x)\,\mathrm{d}x = \int R\Big(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1-t^2}, \frac{1-t^2}{2t}\Big)\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$

ce qui réduit le problème à celui de déterminer les primitives d'une fonction rationnelle en t.

Exemple A.5.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2}\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int \frac{4t-4t^2}{(1+t^2)^2(1+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= \int \Big(\frac{-2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{4}{(1+t^2)^2} - \frac{2}{1+t}\Big)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{2t}{1+t^2} - \log\Big(1+\frac{2t}{1+t^2}\Big) = \sin x - \log(1+\sin x).\end{aligned}$$ $\diamond$

Remarquons toutefois que si ce changement de variable automatise le calcul des primitives, il existe, dans de nombreuses situations, des changements de variables menant à des calculs substantiellement plus courts. Par exemple, dans l'exemple précédent, le changement de variable $t := \sin x$ simplifie notablement les calculs...

L'approche précédente s'étend à la recherche des primitives de diverses autres classes de fonctions. Le tableau suivant résume les changements de variable pertinents pour certaines de ces classes :

Intégrande	Substitution
$R(e^x, \cosh x, \sinh x, \tanh x)$	$x = \log t$
$R(x, \sqrt{a^2 + b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \sinh t$
$R(x, \sqrt{a^2 - b^2x^2})$	$x = \frac{a}{b} \sin t$
$R(x, \sqrt{b^2x^2 - a^2})$	$x = \frac{a}{b} \cosh t$

B Chapitres choisis

Cet appendice ne sera couvert en cours (en partie ou totalement) que si le temps le permet. Son but est de présenter quelques jolis sujets d'analyse mettant en application les idées et techniques développées au cours du semestre.

B.1 La méthode de Newton

Dans cette section, nous présentons une méthode permettant d'approximer numériquement les zéros d'une fonction. L'algorithme employé a été introduit par Isaac Newton en 1669, dans le cas particulier des zéros d'une fonction polynomiale (limitation naturelle étant donné que son approche est antérieure à l'introduction de la notion de dérivée). Cette méthode a ensuite été étendue par divers mathématiciens (en particulier, Raphson en 1690 et Simpson en 1740). De très nombreuses et importantes extensions en ont depuis été faites ; certaines seront vraisemblablement discutées dans le cours d'analyse numérique.

Présentons à présent l'algorithme de façon informelle (voir aussi l'illustration sur la Figure B.1). La preuve de sa validité, sous des hypothèses adéquates, sera donnée dans la Section B.1.2.

Soit donc $a < b$ deux réels et $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur (a, b). On désire trouver une approximation d'une solution de l'équation $f(x) = 0$.

- ▷ On commence avec un point $x_0 \in (a, b)$ (idéalement, à proximité du zéro désiré).
- ▷ On approxime la fonction f par la tangente au graphe de f au point $(x_0, f(x_0))$, à savoir la droite d'équation $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
- ▷ On définit x_1 comme le point d'intersection de cette droite avec l'axe des abscisses : $x_1 \coloneqq x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.
- ▷ On répète cette construction, obtenant ainsi une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple B.1. On fixe $a \in \mathbb{R}_+$ et on cherche à résoudre l'équation $x^2 = a$. On a donc $f(x) \coloneqq x^2 - a$. En partant du point $x_0 \in \mathbb{R}$, la méthode de Newton fournit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par

$$x_{n+1} \coloneqq x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big).$$

On retrouve donc la suite donnée par la méthode de Héron, dont on avait montré la convergence vers $\sqrt{a}$, pour tout choix de $x_0 > 0$, dans l'Exemple 2.21. ◇

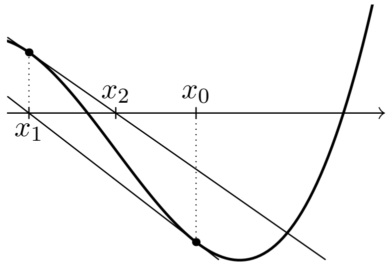


FIGURE B.1: Les premières itérations de la méthode de Newton : étant donné x_n, le point x_{n+1} est le point d'intersection de la tangente au graphe de f au point $(x_n, f(x_n))$ avec l'axe des abscisses.

L'exemple précédent montre que, dans de bonnes conditions, la suite (x_n) converge vers un zéro de la fonction f. Évidemment, de nombreuses choses peuvent mal se passer : la pente de la tangente peut s'annuler, la suite (x_n) peut tendre vers l'infini ou osciller, etc. Nous donnerons plus bas des conditions suffisantes pour garantir que cette suite converge bien vers un zéro de f. Avant cela, discutons brièvement de la notion de contractions.

B.1.1 Contractions

Définition B.2. *Soit $a < b$ deux réels et $\alpha \in [0, 1)$. Une fonction $f : [a, b] \to [a, b]$ est une **α-contraction** si*

$$\forall x, y \in [a, b], \qquad |f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|.$$

En d'autres termes, f est une α-contraction si f est α-Lipschitzienne pour un $\alpha < 1$. En particulier :

- ▷ une contraction f est nécessairement uniformément continue (Exemple 3.40) ;
- ▷ si f est une contraction, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$ (Théorème du point fixe de Brouwer, Corollaire 3.32) ;
- ▷ une condition suffisante pour que f soit une α-contraction est qu'elle soit continue sur $[a, b]$, dérivable sur (a, b) et telle que $\sup_{(a,b)} |f'| \leqslant \alpha < 1$ (Exercice 4.7, point **15.**).

Ainsi, une contraction possède toujours au moins un point fixe. Le lemme suivant montre qu'elle en possède un unique.

Lemme B.3. *Soit $f : [a, b] \to [a, b]$ une α-contraction. Alors, il existe un unique $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) = x_0$. De plus, si $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} := f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$, alors $|u_n - x_0| \leqslant \alpha^n |u_0 - x_0|$. En particulier, $\lim_{n\to+\infty} u_n = x_0$.*

Démonstration. On sait déjà que f possède un point fixe. Supposons que $x_0, y_0 \in [a, b]$ soient tels que $f(x_0) = x_0$ et $f(y_0) = y_0$. Alors, $|x_0 - y_0| = |f(x_0) - f(y_0)| \leqslant \alpha |x_0 - y_0|$. Comme $\alpha < 1$, ceci n'est possible que si $x_0 = y_0$. Le point fixe est donc unique.

Soit $u_0 \in [a, b]$ et $u_{n+1} := f(u_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. On va montrer que $|u_n - x_0| \leqslant \alpha^n |u_0 - x_0|$ par récurrence. Évidemment, $|u_0 - x_0| \leqslant \alpha^0 |u_0 - x_0|$. De plus, si l'on suppose $|u_n - x_0| \leqslant \alpha^n |u_0 - x_0|$, alors

$$|u_{n+1} - x_0| = |f(u_n) - f(x_0)| \leqslant \alpha |u_n - x_0| \leqslant \alpha^{n+1} |u_0 - x_0|,$$

ce qui démontre le résultat. □

B.1.2 Convergence de la méthode de Newton

Théorème B.4. *Soit $a < b$ deux réels et $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. Supposons qu'il existe $x_* \in (a, b)$ tel que $f(x_*) = 0$ et $f'(x_*) \neq 0$. Alors, si u_0 est choisi suffisamment proche de x_*, la suite définie par*

$$u_{n+1} \coloneqq u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

converge vers x_*.

Démonstration. Considérons la fonction $g(x) \coloneqq x - f(x)/f'(x)$, qui est bien définie dans un voisinage de x_*, car $f'(x_*) \neq 0$. On a

$$g(x_*) = x_* \qquad \text{et} \qquad g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}.$$

En particulier, g' est une fonction continue. Puisque $g'(x_*) = 0$, il existe donc $\delta > 0$ tel que $|x - x_*| < \delta \Rightarrow |g'(x)| < \frac{1}{2}$. Ainsi, pour tout $x \in (x_* - \delta, x_* + \delta)$, il suit du théorème des accroissements finis que

$$|g(x) - x_*| = |g(x) - g(x_*)| = |g'(c_x)| \cdot |x - x_*| \leqslant \tfrac{1}{2}\delta,$$

pour un nombre c_x entre x_* et x. Par conséquent, $g : [x_* - \delta/2, x_* + \delta/2] \to [x_* - \delta/2, x_* + \delta/2]$ est une $\frac{1}{2}$-contraction. La conclusion suit donc du Lemme B.3 dès que u_0 est choisi dans $[x_* - \delta/2, x_* + \delta/2]$. □

B.2 La fonction de Takagi

Dans cette section, nous étudions les propriétés d'une fonction remarquable : la fonction de Takagi. Également connue sous le nom de « courbe du blanc-manger » en référence à sa ressemblance avec un entremet du même nom, cette fonction a été introduite par Teiji Takagi en 1901. Il s'agit de la fonction dont le graphe orne la page de titre de ce polycopié. Cette fonction est un exemple simple de fonction partout continue qui n'est nulle part dérivable.

B.2.1 Construction de la fonction de Takagi

Introduisons la fonction $D : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \min\{|x - n| \mid n \in \mathbb{Z}\}$, mesurant la distance entre un réel x et l'entier le plus proche. Introduisons également, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $u_n^x \coloneqq \sum_{k=0}^{n} 2^{-k} D(2^k x)$. La figure B.2 illustre les fonctions $x \mapsto u_n^x$ obtenues pour les premières valeurs de n (seule une période est représentée).

La **fonction de Takagi** est la fonction $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$M(x) \coloneqq \lim_{n\to\infty} u_n^x.$$

Comme cela a déjà été mentionné, une illustration de la fonction M est donnée sur la page de titre de ce polycopié (une seule période représentée).

Le lemme suivant montre que cette définition est valide.

Lemme B.5. *Pour chaque x, la suite $(u_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. De plus, la convergence est uniforme en x : pour tout $\epsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant N$,*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad |M(x) - u_n^x| < \epsilon.$$

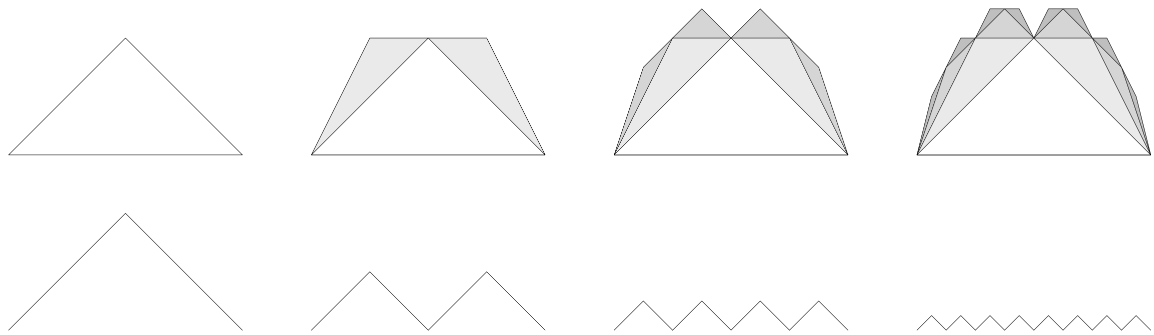


FIGURE B.2: Les premières étapes de la construction de la fonction de Takagi. Haut : $x \mapsto u_n^x$ pour $n = 0, 1, 2, 3$. Bas : $x \mapsto 2^{-n} D(2^n x)$ pour $n = 0, 1, 2, 3$. Chacune des fonctions $x \mapsto u_n^x$ est obtenue à partir de la précédente en lui ajoutant la fonction $x \mapsto 2^{-n} D(2^n x)$.

Démonstration. L'observation principale est que $0 \leqslant D(x) \leqslant \frac{1}{2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La suite $(u_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ étant manifestement croissante, la convergence suit du fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^x \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} = 1$. L'uniformité suit immédiatement de

$$|M(x) - u_n^x| = \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k} D(2^k x) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k-1} = 2^{-n-1}. \qquad \square$$

B.2.2 Continuité uniforme

Proposition B.6. *La fonction de Takagi est uniformément continue sur* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Fixons $\epsilon > 0$. D'une part, par le Lemme B.5, on sait qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant N,\ \forall x \in \mathbb{R}, \qquad |M(x) - u_n^x| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{B.1}$$

D'autre part, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $x \mapsto u_n^x$ est manifestement uniformément continue. Il existe donc $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \qquad |x - y| < \delta \Rightarrow |u_n^x - u_n^y| < \frac{\epsilon}{3}. \tag{B.2}$$

Fixons $n \geqslant N$. Il suit donc de (B.1) et (B.2) que, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $|x - y| < \delta$,

$$|M(x) - M(y)| \leqslant |M(x) - u_n^x| + |u_n^x - u_n^y| + |u_n^y - M(y)| < \epsilon. \qquad \square$$

B.2.3 Dérivabilité nulle part

Proposition B.7. *La fonction de Takagi n'est dérivable en aucun point de* $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on introduit $a_n := \ell \cdot 2^{-n}$ et $b_n := (\ell + 1) \cdot 2^{-n}$, où $\ell \in \mathbb{Z}$ est l'unique entier tel que $a_n \leqslant x_0 < b_n$.

Remarquons que, pour tout $k \geqslant n$, $2^{k-n} \in \mathbb{N}$ et donc $D(2^{k-n}\ell) = 0$. On a donc

$$M(a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D(2^k a_n) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} D(2^{k-n}\ell) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} D(2^k a_n).$$

De la même façon, $M(b_n) = \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k} D(2^k b_n)$. Les valeurs prises en ces points sont donc fixées après seulement n étapes de la construction. Nous allons à présent considérer la pente

$$p_n := \frac{M(b_n) - M(a_n)}{b_n - a_n}$$

associée au segment de droite reliant les points $(a_n, M(a_n))$ au point $(b_n, M(b_n))$ dans le graphe de la fonction $x \mapsto u_n^x$ (ce qui correspond à la $n^{\text{ème}}$ étape de la construction de M). On va étudier la façon dont celle-ci varie lorsque n croît. (Voir la figure B.3 pour une illustration.)

Soit $c_n := a_n + 2^{-n-1}$ le point se situant au milieu de l'intervalle $[a_n, b_n]$. Lors de la $(n+1)^{\text{ème}}$ étape, le segment joignant le point $(a_n, M(a_n))$ au point $(b_n, M(b_n))$ est remplacé par deux segments reliant, respectivement, le point $(a_n, M(a_n))$ au point $(c_n, M(c_n))$ et le point $(c_n, M(c_n))$ au point $(b_n, M(b_n))$. Par construction,

$$M(c_n) = \frac{M(a_n) + M(b_n)}{2} + 2^{-n-1}. \tag{B.3}$$

Il y a, à présent, deux cas à considérer, selon que $x_0 < c_n$ ou $x_0 \geqslant c_n$.

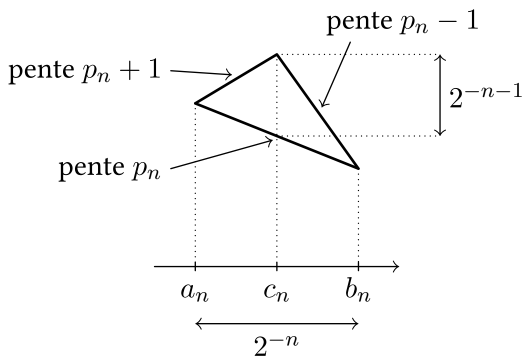


FIGURE B.3: Le segment de droite reliant les points $(a_n, M(a_n))$ et $(b_n, M(b_n))$ du graphe de la fonction $x \mapsto u_n^x$ a une pente p_n. Les segments de droite reliant, respectivement, les points $(a_n, M(a_n))$ et $(c_n, M(c_n))$ et les points $(c_n, M(c_n))$ et $(b_n, M(b_n))$ du graphe de la fonction $x \mapsto u_{n+1}^x$ ont une pente égale, respectivement, à $p_n + 1$ et à $p_n - 1$.

Supposons tout d'abord que $x_0 < c_n$). Dans ce cas, $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = c_n$. Donc, par (B.3),

$$p_{n+1} = \frac{M(b_{n+1}) - M(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{M(c_n) - M(a_n)}{(b_n - a_n)/2} = p_n + 1.$$

Lorsque $x_0 \geqslant c_n$, on a $a_{n+1} = c_n$ et $b_{n+1} = b_n$, ce qui implique que

$$p_{n+1} = \frac{M(b_{n+1}) - M(a_{n+1})}{b_{n+1} - a_{n+1}} = \frac{M(b_n) - M(c_n)}{(b_n - a_n)/2} = p_n - 1.$$

Ainsi, quel que soit x_0, on a $|p_{n+1} - p_n| = 1$. En particulier,

$$\text{la suite } (p_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ n'est pas convergente.} \tag{B.4}$$

Supposons, par l'absurde, que M soit dérivable en x_0. En posant $\lambda_n := (b_n - x_0)/(b_n - a_n) \in (0, 1]$, on peut écrire

$$p_n = \lambda_n \frac{M(b_n) - M(x_0)}{b_n - x_0} + (1 - \lambda_n) \frac{M(x_0) - M(a_n)}{x_0 - a_n}.$$

Ceci implique que

$$\bigl|p_n - M'(x_0)\bigr| \leqslant \lambda_n \left|\frac{M(b_n) - M(x_0)}{b_n - x_0} - M'(x_0)\right| + (1 - \lambda_n) \left|\frac{M(x_0) - M(a_n)}{x_0 - a_n} - M'(x_0)\right|.$$

Or, comme on a supposé M dérivable en x_0, le membre de droite tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui implique que la suite (p_n) converge vers $M'(x_0)$, en contradiction avec (B.4). □

B.3 Il n'existe pas de fonction continue uniquement sur les rationnels

Soit $a < b$ deux réels. Étant donné une fonction $F : (a, b) \to \mathbb{R}$, notons

$$C_f := \{x \in (a, b) \mid f \text{ est continue en } x\} .$$

Soit $T : (0, 1) \to \mathbb{R}$ la fonction de Thomae introduite dans l'Exercice 3.4. Ce dernier consistait à montrer que $C_T = (0, 1) \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Ceci conduit naturellement à la question de déterminer s'il est possible de construire une fonction $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ telle que $C_f = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.

Il existe une approche générale permettant de traiter ce type de problème (théorème de Baire), mais celle-ci va au-delà du cadre de ce cours. Il existe néanmoins une façon élémentaire de répondre à cette question, découverte par Vito Volterra lorsqu'il était étudiant. C'est celle-ci que nous présentons dans cette section. L'idée de Volterra est de démontrer tout d'abord un résultat plus général.

Théorème B.8. *Il n'existe pas de paire de fonctions $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ telles que C_f et C_g soient denses dans (a, b) et satisfassent $C_f \cap C_g = \varnothing$.*

Avant de démontrer ce théorème, utilisons-le pour répondre (par la négative) à la question ci-dessus.

Corollaire B.9. *Il n'existe pas de fonction $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ telle que $C_f = (0, 1) \cap \mathbb{Q}$.*

Démonstration. S'il existait une telle fonction f, alors les fonctions f et T seraient telles que C_f et C_T sont denses dans $(0, 1)$ et $C_f \cap C_T = \varnothing$, ce qui contredirait le Théorème B.8. □

Démonstration du Théorème B.8. On procède par l'absurde. Supposons donc que f et g soient telles que C_f et C_g soient denses dans (a, b) et satisfassent $C_f \cap C_g = \varnothing$.

Soit $x_0 \in C_f$ et $\alpha_1 := 1$. f étant continue en x_0, il existe $\delta > 0$ tel que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b)$ et $|f(x) - f(x_0)| < \alpha_1/2 = 1/2$ pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Soit $a_1 < b_1$ tels que $[a_1, b_1] \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. On a, pour tout $x, y \in [a_1, b_1]$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0) - f(y)| < \alpha_1 = 1.$$

C_g étant dense dans (a, b), il existe $x_1 \in [a_1, b_1] \cap C_g$. En procédant comme ci-dessus, on déduit l'existence de $a'_1 < b'_1$ tels que $[a'_1, b'_1] \subset (a_1, b_1)$ et, pour tout $x, y \in [a'_1, b'_1]$, $|g(x) - g(y)| < \alpha_1 = 1$.

On a donc

$$\forall x, y \in [a'_1, b'_1], \qquad |f(x) - f(y)| < \alpha_1 = 1, \quad |g(x) - g(y)| < \alpha_1 = 1.$$

On peut à présent répéter la procédure précédente en partant de l'intervalle (a'_1, b'_1) et avec $\alpha_2 := \frac{1}{2}$. On obtient ainsi $a'_2 < b'_2$ tels que $[a'_2, b'_2] \subset (a'_1, b'_1)$ et

$$\forall x, y \in [a'_2, b'_2], \qquad |f(x) - f(y)| < \alpha_2 = \tfrac{1}{2}, \quad |g(x) - g(y)| < \alpha_2 = \tfrac{1}{2}.$$

On itère cette procédure en utilisant $\alpha_n := 2^{-n+1}$ à la $n^{\text{ième}}$ étape. On obtient ainsi une suite décroissante d'intervalles

$$(a, b) \supset [a'_1, b'_1] \supset (a'_1, b'_1) \supset [a'_2, b'_2] \supset (a'_2, b'_2) \supset [a'_3, b'_3] \supset (a'_3, b'_3) \supset [a'_4, b'_4] \supset \cdots$$

tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\forall x, y \in [a'_n, b'_n], \qquad |f(x) - f(y)| < \alpha_n = 2^{-n+1}, \quad |g(x) - g(y)| < \alpha_n = 2^{-n+1}.$$

Il suit du point **9.** de l'Exercice 1.10 que $\bigcap_{n\geqslant 1}[a'_n, b'_n] \neq \varnothing$. Soit $x_* \in \bigcap_{n\geqslant 1}[a'_n, b'_n]$. Alors, pour tout $n \geqslant 1$, on a $x_* \in (a'_n, b'_n)$ et donc, pour tout $y \in [a'_n, b'_n]$,

$$|f(y) - f(x_*)| < 2^{-n+1}, \quad |g(y) - g(x_*)| < 2^{-n+1}.$$

Ceci montre que $x_* \in C_f \cap C_g$, ce qui contredit l'hypothèse que $C_f \cap C_g = \varnothing$. □

C Solutions des quiz

Vous trouverez ci-dessous les solutions aux quiz proposés dans les différents chapitres. Pour chaque quiz, une liste de carrés blancs ou noirs est donnée : les carrés blancs correspondent aux affirmations fausses, les carrés noirs aux affirmations correctes. L'ordre des carrés est le même que dans les quiz (dans le cas où les propositions sont données sur plusieurs colonnes, les affirmations sont ordonnées ligne par ligne).

Page	Solution	Page	Solution	Page	Solution
18	■□□■	19	□■■■	20	□□□■□■■
21	□□■■□□	35	□□■■□□■	36	■■□
39	□□□□■□	43	■■■■□□	44	■□□
46	□■□■■□	47	□□□□■□	48	■□
58	□□■■■	58	□□■□	60	■□■
63	■■	77	□□■■□		

Index

A

addition 13
adhérence d'un ensemble 128
antécédent 7
application 6
assertion mathématique 1
associativité
de l'addition 13
de la multiplication 14
asymptote
horizontale 56
verticale 56
asymptotique 34
axiomes
arithmétique 13
ordre 15

B

base du logarithme 118
binôme de Newton 23
borne
borne inférieure 20
borne supérieure 20
ensemble borné 20
bornes d'une intégrale 93

C

coefficient binomial 23, 50
commutativité
de l'addition 13
de la multiplication 14
compact 131
complémentaire 5
complétude 20
composition de fonction 8
condition
nécessaire 3
nécessaire et suffisante 2
suffisante 3
conjecture de Syracuse 44
conjonction 2
constante d'Euler–Mascheroni 122
continuité 131
continuité 57
uniforme 66
contractante (application) 51
contraction 144
contraposée 3
convergence
au sens de Cesàro 50
d'une suite numérique 34
convexité 89
convexité d'une fonction 28
corps commutatif 15
couple ordonné 6
critère de Cauchy 104
critère de d'Alembert 49
croissante
fonction croissante 18
suite croissante 39

D

degré 18
dense 26
dérivable (fonction) 71
dérivée 71
formulation de Weierstrass 85

dichotomie 61
différence symétrique 11
différentiable (fonction) 73
discontinuité 57
discriminant 31
disjonction 2
distance 19
distributivité 15
division 15
domaine d'arrivée 7
domaine de définition 7

E

e **(nombre d'Euler)** 41, 116, 118
 irrationalité 41
élément 4
 élément neutre
  additif 13
  multiplicatif 14
ensemble 4
 de Cantor 131
 entiers naturels $\mathbb{N}$ 17
 entiers relatifs $\mathbb{Z}$ 17
 entiers strictement positifs $\mathbb{N}^*$ 17
 homéomorphisme 65
 nombres irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ 26
 nombres rationnels $\mathbb{Q}$ 17
 nombres réels non nuls $\mathbb{R}^*$ 16
 nombres réels positifs $\mathbb{R}_+$ 16
 nombres réels strictement positifs $\mathbb{R}_+^*$ 16
 vide $\varnothing$ 5
équation
 équation différentielle 113, 116
 équation fonctionnelle 115, 117
équation quadratique 31
équivalence 2
espace métrique 19
exponentielle 116
extérieur d'un ensemble 128
extremum local 75

F

factorielle 23
famille indexée 7
fermé 126
 relatif 130
flocon de von Koch 50
fonction 6
 bijective 8
 bornée 60
 caractéristique d'un ensemble 7
 caractéristique des rationnels 58
 continue 57, 131
 convexe 28, 68, 89
 croissante 18
 d'erreur 135
 de Kronecker 7
 décroissante 18
 dérivable 71
 dérivable n fois 79
 dérivée 71
 différentiable 73
 Höldérienne 69
 identité 7
 impaire 27
 infiniment dérivable 79
 injective 8
 intégrable 93, 103
 inverse 9
 lipschitzienne 66, 86
 majorée 60
 minorée 60
 monomiale 18
 monotone 18
 paire 27
 périodique 27, 70
 polynomiale 18
 rationnelle 18
 réciproque 9, 108
 strictement croissante 18
 strictement décroissante 18
 strictement monotone 18
 surjective 8
 uniformément continue 66
fonction de Takagi 145
fonctions hyperboliques
 argument cosinus 119
 argument sinus 119
 argument tangente 119
 cosinus 118
 sinus 118
 tangente 118
fonctions trigonométriques
 arccosinus 110
 cosécante 112
 cosinus 110
 cotangente 112
 sécante 112
 sinus 110

tangente 112
formes indéterminées 43
formule de Binet 31
formule de Leibniz 87
formule de Taylor
avec reste intégral 107
Taylor–Lagrange 79
Taylor–Young 83
fraction irréductible 17
frontière d'un ensemble 130

G

grand O 82
groupe
abélien 13, 14

H

homéomorphisme 65

I

image 7
image réciproque 7
inclusion 5
induction 22
inégalité
arithmético-géométrique 30
de Bernoulli 22
de Cauchy–Schwarz 19, 108
de Jensen 31
de Minkowski 108
des accroissements finis 78
triangulaire 18, 97
infimum 20
intégrale 93
impropre 103
indéfinie 100
intégrande 93
intégration
changement de variable 101
dérivation par rapport aux bornes 101
par parties 101
intérieur d'un ensemble 128
interpolation linéaire 55
intersection 5
intervalle 21
borné 21
fermé 21
longueur 21
ouvert 21
intervalle d'intégration 93
inverse
additif 13
multiplicatif 14

L

limite 34
à droite 103
à gauche 103
d'une fonction à l'infini 56
d'une fonction en un point 53
inférieure 45
supérieure 45
lipschitzienne (fonction) 66, 86
localement intégrable 103
logarithme 114
base 118
lois de De Morgan 3, 6

M

majorant 20
majoré 20
maximum
d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ 20
d'une fonction 60
maximum global 75
maximum local 75
méthode de Héron 40, 143
minimum
d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ 20
d'une fonction 60
minimum local 75
minorant 20
minoré 20
modus ponens 3
monôme 18
monotone
fonction monotone 18
moyenne arithmético-géométrique 51
multiplication 14

N

négation 2
nombre
constante d'Euler–Mascheroni 122
constante de connectivité de $\mathbb{Z}^2$ 122
d'Euler e 41, 116, 118
de Fermat 30
dyadique 29

entier naturel . . . 17
entier relatif . . . 17
entier strictement positif . . . 17
impair . . . 26
irrationnel . . . 26
pair . . . 26
π . . . 109, 113
premier . . . 31
rationnel . . . 17

nombres
π . . . 111

notation de Landau . . . 81

nulle part dense . . . 132

O

ordre . . . 16
strict total . . . 16

ouvert . . . 125
relatif . . . 130

P

parfait . . . 132

partie d'un ensemble . . . 5

partie entière . . . 27

période d'une fonction . . . 27

petit o . . . 82

π . . . 109
formule de Viète . . . 113
irrationalité . . . 111

point
adhérent . . . 128
intérieur . . . 128

point critique . . . 76

point fixe
attractif . . . 87
répulsif . . . 87

point limite . . . 53

point stationnaire . . . 76

polynôme . . . 18
de Taylor . . . 80

préimage . . . 7

primitive . . . 99

principe d'Archimède . . . 21

produit cartésien . . . 6

prolongement d'une fonction . . . 7
par continuité . . . 68

puissance
exposant entier . . . 17
exposant rationnel . . . 25
exposant réel . . . 118

Q

quantificateur
existentiel . . . 5
universel . . . 5

R

racine $n^{\text{ème}}$ . . . 25

racine d'un polynôme . . . 31, 63

raffinement d'une subdivision . . . 92

raisonnement
par contraposition . . . 4
par double implication . . . 4
par l'absurde . . . 4
par récurrence . . . 22
forte . . . 31

réciproque (d'une assertion) . . . 3

récurrence . . . 22
forte . . . 31

représentation décimale . . . 40

restriction d'une fonction . . . 7

S

séparé . . . 126

série
géométrique . . . 37
harmonique . . . 48

signe (fonction) . . . 55

somme de Riemann . . . 95

somme télescopique . . . 38

sommes de Darboux . . . 92

sous-ensemble . . . 5

soustraction . . . 14

subdivision . . . 91
uniforme . . . 94

suite . . . 7
bornée . . . 35
convergente . . . 34
croissante . . . 39
de Cauchy . . . 47
de Fibonacci . . . 31, 33
décroissante . . . 39
divergente . . . 34
majorée . . . 35
minorée . . . 35
sous-additive . . . 51
sous-suite . . . 44
suites adjacentes . . . 40

tendant vers l'infini 42
suite numérique 33
supremum 20

T

tableau de variations 78
tautologie 3
tend vers $+\infty$ 56
test de comparaison 105
théorème
complétude de $\mathbb{R}$ 47
de Bolzano–Weierstrass 47
de Cesàro 50
de Darboux 86, 121
de Heine 67
de la moyenne 99
de Rolle 76
de Taylor–Lagrange 79
des accroissements finis 76
des accroissements finis géneralisé ... 78
des gendarmes 38
des suites adjacentes 40
des valeurs intermédiaires 61
du point fixe de Banach 51
du point fixe de Brouwer 64
inégalité des accroissements finis 78
lemme de Fekete 51
transitivité 16
triangle de Pascal 24
trichotomie 16

U

union 5

V

valeur absolue 18
valeur d'adhérence 45
valeur logique 1
variable d'intégration 93
variations d'une fonction 78
voisinage 126