Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°1.1.1 :

► On jette 4 dés, l'ensemble des tirages est donc $\Omega = \{1,...,6\}^4$ qui est un ensemble fini, on choisit naturellement comme tribu la tribu des parties $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Les dés étant normaux, on munit cet espace de la probabilité uniforme. On considère l'évènement $A = \{\text{on tire au moins un six}\}$. On a $A^c = \{\text{on ne tire aucun six}\} = \{1,2,3,4,5\}^4$ alors

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{|A^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{5^4}{6^4} \simeq 0.5171$$

► Maintenant, si on jette 2 dés 24 fois, l'ensemble des tirages est $\Omega = \overbrace{\{1,...,6\}^2 \times ... \times \{1,...,6\}^2}^{24 \text{ fois}}$. Là encore on choisit la tribu des parties. Soit $B = \{\text{on tire au moins un double six}\}$ alors

$$B^c = \{\text{on ne tire aucun double six}\} = \overbrace{\{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{6,6\} \times ... \times \{1,2,3,4,5,6\}^2 - \{6,6\}}^{24 \text{ fois}}$$

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(B^c) = 1 - \frac{|B^c|}{|\Omega|} = 1 - \frac{(36-1)^{24}}{36^{24}} = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \simeq 0.4914$$

► On conclut que tirer au moins un six en jettant quatre dés est plus probable que d'obtenir un double six en jettant 24 fois deux dés.

Exercice n°1.1.2 :

► On lance n fois trois dés, l'ensemble des tirages est $\Omega = \overbrace{\{1,...,6\}^3 \times ... \times \{1,...,6\}^3}^{n \text{ fois}}$ que l'on munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme. On considère l'évènement

$$A = \{\text{on obtient au moins un 421 au cours des } n \text{ tirages}\}$$

$$A^c = \{\text{on n'obtient aucun 421 au cours des } n \text{ tirages}\}$$

Comme les n lancés sont indépendants, on a

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\text{on n'obtient pas de 421 pour 1 tirage})^n := \mathbb{P}(B)^n$$

L'évènement B^c "on obtient un 421" s'écrit $\{1,2,4\} \cup \{1,4,2\} \cup \{2,1,4\} \cup \{2,4,1\} \cup \{4,1,2\} \cup \{4,2,1\}$.

$$\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{|\{1,2,4\} \cup \{1,4,2\} \cup \{2,1,4\} \cup \{2,4,1\} \cup \{4,1,2\} \cup \{4,2,1\}|}{|\{1,2,3,4,5,6\}^3|} = 1 - \frac{6}{6^3} = \frac{35}{36}$$

Finalement,

$$\mathbb{P}(\text{on obtient au moins un 421 au cours des } n \text{ tirages}) = P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n$$

$$\mathbb{P}(A) \geq \frac{1}{2} \iff \frac{1}{2} \geq \left(\frac{35}{36}\right)^n \iff n \geq \frac{\log(1/2)}{\log(35/36)} \simeq 24.6$$

► Il faut donc lancer au moins 25 fois pour avoir un chance sur deux d'obtenir un 421.

Exercice n°1.1.3 :

► On lance 5 fois une pièce de monnaie, si on désigne "pile" par 0 et "face" par 1, l'espace des épreuves est $\Omega = \{0,1\}^5$. Soient les évenements

A={la première pièce donne face}
B={face sort deux fois exactement}
C= {face sort au plus trois fois}

Ces évènements s'écrivent

A= $\{1\} \times \{0,1\}^4$
B= $\{1,1,0,0,0\} \cup \{1,0,1,0,0\} \cup \{1,0,0,1,0\} \cup \{1,0,0,0,1\} \cup \{0,1,1,0,0\} \cup \{0,1,0,1,0\} \cup \{0,1,0,0,1\} \cup \{0,0,1,1,0\} \cup \{0,0,1,0,1\} \cup \{0,0,0,1,1\}$
C= {face ne sort pas ou sort 1 fois exactement ou fois exactement ou fois exactement}

Alors

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|\{1\} \times \{0,1\}^4|}{|\Omega|} = \frac{2^4}{2^5} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{P}(B) = \frac{C_5^2}{|\Omega|} = \frac{5}{16}$$

$$\mathbb{P}(C) = \frac{|C|}{|\Omega|} = \frac{1 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3}{32} = \frac{26}{32} = \frac{13}{16}$$

Exercice n°1.1.4 :

► On lance 10 dés, *i.e* $\Omega = \{1,...,6\}^{10}$, que l'on munit de la tribu des parties. Soient les évenements

A={6 ne sort pas}
B={6 sort une fois exactement}
C= {6 sort trois fois exactement}
D= {6 sort deux fois au moins}
E= {6 sort trois fois au moins}

Ces évènements s'écrivent

A= $\{1,2,3,4,5\}^{10}$
B= $\{6\} \times \{1,2,3,4,5\}^9$ à l'ordre près
C= $\{6\}^3 \times \{1,2,3,4,5\}^7$ à l'ordre près
D= {6 sort deux fois exactement, 3 fois exactement, ..., 10 fois exactement}
E= {6 sort trois fois exactement ou 4 fois exactement ... ou 10 fois exactement}

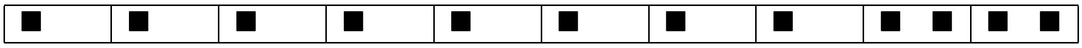
Alors

$$\mathbb{P}(A) = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0.1615, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{C_{10}^1\, 5^9}{6^{10}} = 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{10} \simeq 0.3230, \quad \mathbb{P}(C) = \frac{C_{10}^3\, 5^7}{6^{10}} \simeq 0.1550$$

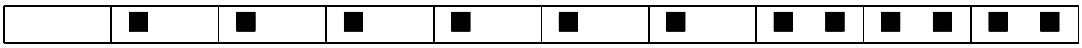
$$\mathbb{P}(D) = \frac{C_{10}^2\, 5^8 + C_{10}^3\, 5^7 + ... + C_{10}^9\, 5 + 1}{6^{10}} \simeq 0.5155, \quad \mathbb{P}(E) = \frac{C_{10}^3\, 5^7 + ... + C_{10}^9\, 5 + 1}{6^{10}} \simeq 0.2248$$

Exercice n°1.1.5 :

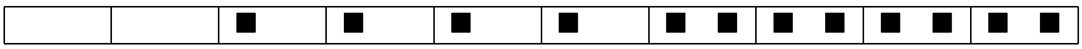
► On prélève au hasard 8 chaussures parmi 10 paires, on note Ω l'ensemble des tirages possibles. Naturellement, on a $Card(\Omega) = C_{20}^{8}$. Après avoir prélevé les huit chaussures, il reste au moins 2 paires et au plus 6 paires, il nous suffit donc de calculer $\mathbb{P}$(il y a k paires de chaussures) pour $k = 2{,}3{,}4{,}5{,}6$



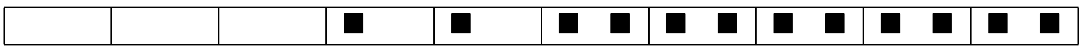
$$\mathbb{P}(2\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{on choisit les chaussures dans 8 tiroirs différents}) = \frac{2^8\, C_{10}^{2}}{|\Omega|}$$



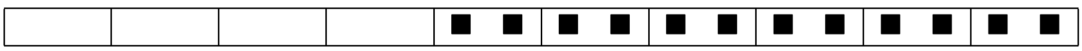
$$\mathbb{P}(3\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{3 boites intactes, 2 chaussures dans une des 7 autres boites}) = \frac{2^6\, C_{10}^{3} C_{7}^{1}}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(4\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{4 boites intactes, 2 chaussures dans deux des 6 autres boites}) = \frac{2^4\, C_{10}^{4} C_{6}^{2}}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(5\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{5 boites intactes, 2 chaussures dans trois des 5 autres boites}) = \frac{2^2\, C_{10}^{5} C_{5}^{3}}{|\Omega|}$$



$$\mathbb{P}(6\text{ paires}) = \mathbb{P}(\text{6 boites intactes, 2 chaussures dans quatre des 4 autres boites}) = \frac{C_{10}^{6}}{|\Omega|}$$

Exercice n°1.1.7 :

▶ Les valeurs possibles pour la somme des gains sont {0,10,20,30,40,50,60,70,80,90,110} les moyens d'y arriver sont

valeurs possibles	moyens	tirages favorables	total tirages favorables
0	0+0+0	$84 \times 83 \times 82 = 571704$	571704
10	10+0+0	$84 \times 83 \times 10 \times 3 = 209160$	209160
20	10+10+0	$84 \times 10 \times 9 \times 3 = 22680$	22680
30	30+0+0	$84 \times 83 \times 5 \times 3 = 104580$	
"	10+10+10	$10 \times 9 \times 8 = 720$	105300
40	30+10+0	$84 \times 10 \times 5 \times 6 = 25200$	25200
50	50+0+0	$84 \times 83 \times 1 \times 3 = 20916$	
"	30+10+10	$10 \times 9 \times 5 \times 3 = 1350$	22266
60	50+10+0	$1 \times 10 \times 84 \times 6 = 5040$	
"	30+30+0	$5 \times 4 \times 84 \times 3 = 5040$	10080
70	50+10+10	$10 \times 9 \times 1 \times 3 = 270$	
"	30+30+10	$5 \times 4 \times 10 \times 3 = 600$	870
80	50+30+0	$84 \times 5 \times 1 \times 6 = 2520$	2520
90	50+30+10	$1 \times 5 \times 10 \times 6 = 300$	
"	30+30+30	$5 \times 4 \times 3 = 60$	360
110	50+30+30	$1 \times 5 \times 4 \times 3 = 60$	60
			total=970200=$100 \times 99 \times 98$

▶ La probabilité qu'un acheteur de 3 billets gagne au moins 30 euros est

$$\mathbb{P} = \frac{105300 + 25200 + 22266 + 10080 + 870 + 2520 + 360 + 60}{100 \times 99 \times 98} \simeq 0.1718$$

▶ La probabilité qu'il gagne exactement 30 euros est

$$\mathbb{P} = \frac{105300}{100 \times 99 \times 98} \simeq 0.1085$$

Exercice n°1.1.8 :

▶ On jette deux dés et on note S leur somme, S est donc une variable aléatoire à valeurs dans {2,3,...,12} et

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}$(S=k)	0	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36
$\mathbb{P}(S > k)$	1	35/36	33/36	30/36	26/36	21/36	15/36	10/36	6/36	3/36	1/36	0

▶ On jette à nouveau les deux dés, on note la somme T. Les deux lancers sont identiques et indépendants donc

$$\mathbb{P}(S = T) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = T = k) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = k)\mathbb{P}(T = k) = \sum_{k=2}^{12} \mathbb{P}(S = k)^2 \simeq 0.1127$$

$$\mathbb{P}(S \neq T) = \mathbb{P}(S > T) + \mathbb{P}(S < T) = 2\mathbb{P}(S > T) = 1 - \mathbb{P}(S = T) \simeq 0.8873$$

$$\text{d'où} \quad \mathbb{P}(S > T) \simeq 0.4436$$

$$\mathbb{P}(S \leq T) = \mathbb{P}(S = T) + \mathbb{P}(S < T) \simeq 0.5563$$

Exercice n°1.1.9 :

► Il existe une bijection entre les tirages de n boules sans remise et les permutations de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$. Ces permutations forment un groupe, que l'on note $\mathfrak{S}_n$. Cette bijection s'exprime :

un tirage de n boules $\Leftrightarrow$ la suite des numéros dans l'ordre d'apparition

On considère l'évènement

$$A = \{\text{au moins jeton sort au rang indiqué par son numéro}\}$$

Son complémentaire est

$$A^c = \{\text{aucun jeton ne sort au rang indiqué par son numéro}\}$$

L'évènement correspondant à A^c via la bijection est $\{$on tire un élément de $\mathfrak{S}_n$ qui n'a pas de point fixe$\}$. Les éléments de $\mathfrak{S}_n$ qui n'ont pas de points fixes sont appelés des dérangements. Notons D_n le nombre de dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Alors on a :

$$p_n = \mathbb{P}(A) = 1 - \frac{D_n}{Card(\mathfrak{S}_n)} = 1 - \frac{D_n}{n!}$$

► Il nous faut maintenant calculer D_n. On utilise la formule du crible. Si U_i désigne l'ensemble des permutations de $\mathfrak{n}$ qui fixe l'élément i alors on a

$$D_n = n! - Card(\bigcup_{i=1}^{n} U_i) = n! - \sum_{\Omega \neq I \subset [|1,n|]} (-1)^{1+Card(I)}\, Card\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right)$$

Si $Card(I) = p$ alors $Card\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = (n-p)!$ et il y a C_n^p sous parties à p éléments dans $[|1,n|]$ donc

$$\sum_{\Omega \neq I \subset [|1,n|]} (-1)^{1+Card(I)}\, Card\left(\bigcap_{i\in I} U_i\right) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} C_n^p (n-p)! = n! \times \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p!}$$

Donc

$$\frac{D_n}{n!} = 1 - \sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{p!} = \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!}$$

► Voici une autre méthode pour calculer D_n. Pour $n \geq 1$, on note P_k l'ensemble des permutations de $\mathfrak{S}_n$ qui possèdent k points fixes exactement. Il est clair que $\{P_0,...,P_n\}$ forme une partition de $\mathfrak{S}_n$ en particulier

$$n! = Card(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} Card(P_k)$$

On va voir que $Card(P_k) = C_n^k D_{n-k}$. En effet, $Card(P_0) = D_n$ et $Card(P_n) = 1 = C_n^n D_0$ car seule l'identité possède n points fixes. Pour $k \geq 1$, un élément de P_k est parfaitement déterminé par par le choix de ses points fixes (C_n^k possibilités) et par le choix de la permutation induite sur les $(n-k)$ éléments restants (D_{n-k} possibilités puisque cette permutation est un dérangement d'un ensemble à $(n-k)$ éléments). On a donc

$$n! = Card(\mathfrak{S}_n) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k D_k$$

ou encore

$$1 = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \frac{D_k}{k!}$$

Dans le membre de droite, on reconnait alors le coefficient d'ordre n du produit de Cauchy des deux séries $D(z) = \sum \frac{D_k}{k!} z^k$ et $e^z = \sum \frac{1}{k!} z^k$ Ces deux séries ont un rayon de convergence ≥ 1 donc pour $|z| < 1$

$$D(z)\, e^z = \sum_{n \geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad i.e \qquad D(z) = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

En développant en série, il vient

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \frac{D_k}{k!} = \sum_{p=0}^{k} \frac{(-1)^p}{p!}$$

► On a donc

$$p_n = 1 - \frac{D_n}{n!} = 1 - \sum_{p=0}^{n} \frac{(-1)^p}{p!} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} p_n = 1 - \frac{1}{e} := p_\infty$$

D'après le critère sur les séries alternées,

$$|p_n - p_\infty| \leq \frac{1}{(n+1)!}$$

► La probabilité $p_n(k)$ s'écrit exactement :

$$p_n(k) = \frac{Card(P_k)}{\mathfrak{S}_n} = \frac{C_n^k D_{n-k}}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{p=0}^{n-k} \frac{(-1)^p}{p!} \frac{1}{k!}$$

$$\text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} p_n(k) = \frac{e^{-1}}{k!}$$

► Une interprétation du modèle ci-dessus est la suivante : on organise une soirée où chacun invité apporte un cadeau puis au milieu de la soirée on redistribue les cadeaux au hasard, la situation idéale étant qu'aucun invité ne reçoive son propre cadeau. La réponse à la première question nous assure que , pour n assez grand, la situation idéale se réalise avec une probabilité $\simeq e^{-1} \simeq 0.3679$