Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°1.2.1 :

► L'espace des épreuves est $\Omega = \{1{,}2{,}3{,}4{,}5{,}6\}^2$ que l'on munit de la tribu des parties $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$ et de la mesure uniforme. On note X_1 et X_2 les variables aléatoires correspondant au valeurs des premier et second dés respectivement. Soit $S = X_1 + X_2$ et C l'évènement $C = \{S = 5\}$. Pour $k = 1{,}2{,}3{,}4$ on a alors

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid C) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k \cap S = 5)}{\mathbb{P}(S = 5)} = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k \cap X_2 = 5 - k)}{\mathbb{P}(S = 5)}$$

Comme $X_1 \perp X_2$ on a alors

$$\mathbb{P}(X_1 = k \mid C) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = k)\mathbb{P}(X_2 = 5 - k)}{\mathbb{P}(S = 5)} = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times 9 = \frac{1}{4}$$

car $\mathbb{P}(X_i = p) = 1/6$ pour $p = 1{,}2{,}3{,}4{,}5$ et $\mathbb{P}(S = 5) = 4/36 = 1/9$ d'après l'exercice 1.1.8

Exercice n°1.2.2 :

► On associe les nombres 1 à "fille" et 0 à "garçon". Comme on sait que le couple a deux enfants, l'espace des épreuves est $\Omega = \{0{,}1\}^2$. On le munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme (on suppose que l'on a autant de chance d'avoir une fille qu'un garçon et que le genre des frères et soeurs n'est pas lié). On note $(X_1{,}X_2)$ le genre des deux enfants, X_1 étant l'ainée, et S la variable $S = X_1 + X_2$, on fait l'hypothèse (sauf dans la question 2) que le couple a au moins une fille, *i.e* $S \geq 1$

► La probabilité que l'autre enfant soit une fille est

$$\mathbb{P}(S = 2 \mid S \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = 1 \cap X_2 = 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

► Si une fille ouvre la porte, mettons $X_j = 1$ alors,

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_j = 1) = 1/2 \qquad \text{par indépendance}$$

► Une fille ouvre la porte, cette info s'écrit $X_1 = 1 \cup X_2 = 1$, et est équivalente à $S \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(S = 2 \mid S \geq 1) = 1/3 \qquad \text{par indépendance}$$

► Si l'ainée (une fille) ouvre la porte, on a donc $X_1 = 1$, cette dernière info contenant $S \geq 1$, alors

$$\mathbb{P}(X_2 = 1 \mid X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = 1/2 \qquad \text{par indépendance}$$

Exercice n°1.2.3 :

Le problème ici est de bien interpréter l'énoncé. On donne deux corrections, dans la première (la meilleure), on colle vraiment au texte, dans la seconde, on fait l'hypothèse qu'au départ les prisonniers sont libérés/éxécutés avec probabilité 1/2, puis qu'on les informe de la situation.
► Dans les deux cas, on désigne "condamné" par 1 et "libéré" par 0 et note (X,Y,Z) l'état des prisonniers.

Si on colle au texte

Si l'on colle au texte, l'espace des épreuves se résume à $\Omega = \{(0,0,1),(0,1,0),(1,0,0)\}$ et naturellement

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = \mathbb{P}(Z = 1) = 1/3$$

Si le goelier ne dis rien on a donc $\mathbb{P}(X = 1) = 1/3$. Maintenant, si le geolier désigne un prisonnier à libérer, par exemple $(Y = 0)$ alors par la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(X = 1|Y = 0) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0)}{\mathbb{P}(Y = 0)} = \frac{\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)}{\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1) + \mathbb{P}(Y = 0 \mid Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 0 \mid Z = 1)}$$

On note $p = \mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 1)$, comme $\mathbb{P}(Y = 0 \mid Y = 1) = 0$ et $\mathbb{P}(Y = 0 \mid Z = 1) = 1$

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid Y = 0) = \frac{p}{1 + p}$$

Si le geolier est impartial, *i.e* $p = 1/2$, on trouve la même proba que plus haut.

Si on interprete le texte

► On peut interpréter le texte comme suit : au départ les prisonniers sont libérés/éxécutés avec probabilité 1/2, et ensuite on vient les voir en leur disant que deux d'entre eux vont être libérés et un exécuté. Alors l'espace des épreuves est $\Omega = \{0,1\}^3$ que l'on munit de la tribu des parties et de la mesure uniforme. Si l'on note $S = X + Y + Z$, l'hypothèse que 2 prisonniers seront libérés et 1 exécuté s'écrit $S = 1$.

► L'événement "le geolier parle à X" s'écrit $\{Y = 0 \cup Z = 0\}$, alors

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid S = 1 \cap (Y = 0 \cup Z = 0)) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0 \cap Z = 0)}{\mathbb{P}(S = 1 \cap (Y = 0 \cup Z = 0))} = \frac{1}{2}$$

► Si le geolier ne dis rien

$$\mathbb{P}(X = 1 \mid S = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = 1 \cap Y = 0 \cap Z = 0)}{\mathbb{P}(S = 1)} = \frac{1}{3}$$

► Avec cette interprétation, on trouve que le geolier a bien raison.

Le modèle ci-dessus est aussi celui d'un fameux jeu TV nord américain. A la fin du jeu, le candidat se trouve face à trois portes, derrière lesquelles se trouvent une voiture et deux chèvres. Le présentateur demande au candidat de choisir une porte, (on ne l'ouvre pas), puis il propose au candidat de lui indiquer une porte derrière laquelle il sait que se trouve une chèvre...

Exercice n°1.2.4 :

► On note (X_1,X_2,X_3) les résultats des trois tirages, n pour "noire" et b pour "blanche".

$$\mathbb{P}(X_1 = n|X_2 = b) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = n \cap X_2 = b)}{\mathbb{P}(X_2 = b)} = \frac{\mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = n)\mathbb{P}(X_1 = n)}{\mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = b)\mathbb{P}(X_1 = b) + \mathbb{P}(X_2 = b \mid X_1 = n)\mathbb{P}(X_1 = n)}$$

$$\mathbb{P}(X_1 = n \mid X_2 = b) = \frac{\frac{b}{n+b+l}\frac{n}{n+b}}{\frac{b+l}{n+b+l}\frac{b}{n+b} + \frac{b}{n+b+l}\frac{n}{n+b}} = \frac{nb}{b(b+l)+nb}$$

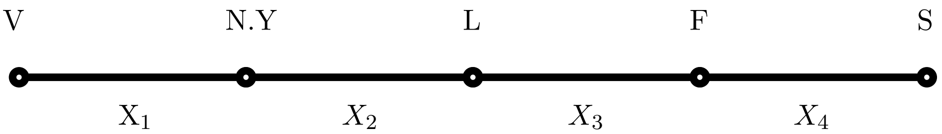
► On écrit $X_3 = n$ comme réunion d'évènements disjoints

$$\{X_3 = n\} = \{X_3 = n \cap X_2 = n \cap X_1 = n\} \sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = n \cap X_1 = b\}$$

$$\sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = b \cap X_1 = b\} \sqcup \{X_3 = n \cap X_2 = b \cap X_1 = b\}$$

et on utilise la formule $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A \mid B \cap C)\mathbb{P}(B \mid C)\mathbb{P}(C)$ etc,etc...

Exercice n°1.2.5 :



► Les variables aléatoires X_i valent respectivement 0 s'il n'y a pas eu d'attentat sur le $i^{ème}$ vol et 1 sinon. On sait qu'il y a eu un attentat donc $S := X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq 1$. Alors pour $i = 1,2,3,4$

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid S \geq 1) = \frac{\mathbb{P}(X_i = 1 \cap S \geq 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \frac{\mathbb{P}(X_j = 0 \text{ pour } j < i, \text{et } X_i = 1)}{\mathbb{P}(S \geq 1)} = \frac{p(1-p)^{i-1}}{1-(1-p)^4}$$

Exercice n°1.2.6 :

► On prélève une pièce X dans le stock, on note D l'ensemble des pièces défectueuses et on notera $X \in U$ (resp. V,W) si X est issue de la machine U, (resp. V,W).

$$\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{P}(X \in D \cap X \in U) + \mathbb{P}(X \in D \cap X \in V) + \mathbb{P}(X \in D \cap X \in W)$$

$$\mathbb{P}(X \in D) = \mathbb{P}(X \in D|X \in U)\mathbb{P}(X \in U) + \mathbb{P}(X \in D|X \in V)\mathbb{P}(X \in V) + \mathbb{P}(X \in D|X \in W)\mathbb{P}(X \in W)$$

$$\mathbb{P}(X \in D) = \frac{20}{100} \times \frac{40}{100} + \frac{35}{100} \times \frac{15}{100} + \frac{25}{100} \times \frac{10}{100} \simeq 0.1575$$

► Si on sait que la pièce est défectueuse alors

$$\mathbb{P}(X \in U|X \in D) = \frac{\mathbb{P}(X \in U \cap X \in D)}{\mathbb{P}(X \in D)} = \frac{\mathbb{P}(X \in D|X \in U)\mathbb{P}(X \in U)}{\mathbb{P}(X \in D)} = \frac{\frac{20}{100} \times \frac{40}{100}}{0.1575} \simeq 0.5079$$

Exercice n°1.2.7 :

► On note T^+ pour un test positif, T^- pour négatif, M pour malade, S pour sain. D'aprés la formule de Bayes

$$\mathbb{P}(M \mid T^+) = \frac{\mathbb{P}(T^+ \mid M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T^+ \mid M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T^+ \mid S)\mathbb{P}(S)} = \frac{\frac{95}{100} \times \frac{12}{100}}{\frac{95}{100} \times \frac{12}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{88}{100}} \simeq 0.7215$$

$$\mathbb{P}(S \mid T^-) = \frac{\mathbb{P}(T^- \mid S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T^- \mid S)\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T^- \mid M)\mathbb{P}(M)} = \frac{\frac{95}{100} \times \frac{88}{100}}{\frac{95}{100} \times \frac{88}{100} + \frac{5}{100} \times \frac{12}{100}} \simeq 0.9929$$

Exercice n°1.2.8 :

Si 1 désigne pile et 0 désigne face l'espace des épreuves est $\Omega = \{0{,}1\} \times \{0{,}1\} \times \{0{,}0\} \times \{0{,}0\} \times \{1{,}1\}$ qu'on muni de la tribu des parties et de la mesure uniforme.

► On note X le résultat du lancer de la pièce tirée au hasard. On notera $X \in P_i$ si la pièce tirée est la $i^{ème}$. Alors

$$\mathbb{P}(X = 0) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = 0 \cap X \in P_i) = \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = 0 | X \in P_i)\mathbb{P}(X \in P_i)$$

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X \in P_1) \sum_{i=1}^{5} \mathbb{P}(X = 0 | X \in P_i) = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 1 + 1 + 0\right) = \frac{3}{5}$$

► On désigne par Y la valeur de l'autre coté de la pièce.

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{\mathbb{P}(Y = 0 \ \cap \ X = 0)}{\mathbb{P}(X = 0)} = \frac{\sum_{i=0}^{5} \mathbb{P}(Y = 0 \cap X = 0 \cap X \in P_i)}{\mathbb{P}(X = 0)}$$

$$\mathbb{P}(Y = 0 \mid X = 0) = \frac{\mathbb{P}(X \in P_3) + \mathbb{P}(X \in P_3)}{\mathbb{P}(X = 0)} = \frac{5}{3}\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{5}\right) = \frac{2}{3}$$

► On traite la fin de l'exo de manière linéaire en se servant des résultats déjà obtenus. Pour vérification, les réponses aux questions c), d), e) sont respectivement 5/6, 4/5, 9/10.

Exercice n°1.2.9 :

► On considère le tableau suivant. Dans les cases $i = 1,2,...,k$, on donne la probabilité que le livre se trouve dans le $i^{ème}$ tiroir, dans la case 0, la probabilité que le livre ne se trouve pas dans la commode.

hors de la commode	premier tiroir	second tiroir	...	$k^{ième}$ tiroir
$1-p$	p/k	p/k	...	p/k

Soit X la variable aléatoire qui vaut 0 si le livre n'est pas dans la commode et k si le livre est dans le $k^{ième}$ tiroir.
► On ouvre les $(k-1)$ premiers tiroirs sans trouver le livre donc $X \neq 1,...,X \neq k-1$ alors

$$\mathbb{P}(X = k \mid X \neq 1,...,X \neq k-1) = \frac{\mathbb{P}(X = k \,\cap\, X \neq 1,...,X \neq k-1)}{\mathbb{P}(X \neq 1,...,X \neq k-1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0 \cup X = k)} = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = k)} = \frac{p/k}{(1-p) + p/k} = \frac{p}{k(1-p) + p}$$

► On ouvre les $(k-j)$ premiers tiroirs sans trouver le livre donc $X \neq 1,...,X \neq k-j$

$$\mathbb{P}(X = k \mid X \neq 1,...,X \neq k-j) = \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X \neq 1,...,X \neq k-j)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = 0) + \sum_{k-j+1}^{k} \mathbb{P}(X = k-j+1)} = \frac{p}{k(1-p) + j\,p}$$

Exercice n°1.2.10 :

► On note V pour vacciné, NV pour non vacciné, M pour malade, S pour sain. D'après les hypothèses,

$$\mathbb{P}(V) = \frac{1}{4}, \quad \mathbb{P}(V \mid M) = \frac{1}{5}, \quad \mathbb{P}(NV \mid M) = \frac{4}{5}, \quad \mathbb{P}(M \mid V) = \frac{1}{12}$$

On a

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{\mathbb{P}(NV \,\cap\, M)}{\mathbb{P}(NV)} = \frac{\mathbb{P}(NV \mid M)\mathbb{P}(M)}{1 - \mathbb{P}(V)} = \frac{16}{15}\mathbb{P}(M)$$

Or

$$\mathbb{P}(M \mid V) = \frac{\mathbb{P}(V \,\cap\, M)}{\mathbb{P}(V)} = \frac{\mathbb{P}(V \,\cap\, M)}{1/4} = \frac{1}{12} \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(V \,\cap\, M) = 1/48$$

$$\mathbb{P}(V \mid M) = \frac{\mathbb{P}(V \,\cap\, M)}{\mathbb{P}(M)} = 1/5 \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(M) = \frac{5}{48}$$

Finalement

$$\mathbb{P}(M \mid NV) = \frac{16}{15}\frac{5}{48} = \frac{1}{9}$$

► On peut estimer l'efficacité du vaccin en regardant

$$|\mathbb{P}(M \mid V) - \mathbb{P}(M \mid NV)| = \frac{1}{9} - \frac{1}{12} = \frac{1}{36}$$

C'est pas top...