Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°1.3.1 :

► On notera $A \perp B$ pour A et B sont indépendants. On a toujours

$$\mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) - \mathbb{P}(A^c \cup B^c) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A \cap B) - 1]$$

Comme $A \perp B$ équivaut à $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$, on a

$$A \perp B \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1]$$

Or

$$\mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1] = 1 - \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1] = \mathbb{P}(A)[\mathbb{P}(B) - 1] + \mathbb{P}(B^c)$$

$$i.e \quad \mathbb{P}(A^c) + \mathbb{P}(B^c) + [\mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) - 1] = \mathbb{P}(B^c)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c)$$

Finalement

$$A \perp B \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A^c \cap B^c) = \mathbb{P}(A^c)\mathbb{P}(B^c) \Longleftrightarrow A^c \perp B^c$$

► De même, on a toujours

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}((A \cap B) \cup (A \cap B^c)) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap B^c)$$

alors

$$A \perp B \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(A \cap B^c) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B^c) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B^c)$$

d'où

$$A \perp B \Longleftrightarrow A \perp B^c$$

Exercice n°1.3.2 :

► On désigne rouge par R, noir par N, pair par P et impair par I. Par hypothèse

$$\mathbb{P}(R) = \frac{3}{5}, \quad \mathbb{P}(I) = \frac{2}{3}, \quad \mathbb{P}(R \cap P) = p$$

Alors

$$1 - p = \mathbb{P}(N \cup I) = \mathbb{P}(N) + \mathbb{P}(I) - \mathbb{P}(N \cap I) \qquad \text{donc} \quad \mathbb{P}(N \cap I) = p + \frac{1}{15}$$

N et I sont indépendants ssi $\mathbb{P}(N \cap I) = \mathbb{P}(N)\mathbb{P}(I) = \frac{2}{5}\frac{2}{3} = \frac{4}{15}$ $i.e$ pour $p = \frac{3}{15}$.

Exercice n°1.3.3 :

► On note X_k le résultat du $k^{ième}$ tirage, naturellement les X_i sont des variables indépendantes. Pour $i \neq j$, on pose $A_{ij} = \{X_i = X_j\}$, on vérifie facilement que les A_{ij} sont deux à deux indépendants, par exemple, si $i \neq j \in [|1,n|]$ et $k \neq l \in [|1,n|] - \{i,j\}$ alors

$$\mathbb{P}(A_{ij} \cap A_{kl}) = \sum_{m,n=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = X_j = m \cap X_k = X_l = n)$$

$$= \sum_{m,n=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = m)\mathbb{P}(X_j = m)\mathbb{P}(X_k = n)\mathbb{P}(X_l = n) = \sum_{m,n=1}^{6} \left(\frac{1}{6}\right)^4 = \frac{1}{36}$$

$$\text{Or} \quad \mathbb{P}(X_i = X_j)\mathbb{P}(X_k = X_l) = \left(\sum_{m=1}^{6} \mathbb{P}(X_i = m)^2\right)\left(\sum_{n=1}^{6} \mathbb{P}(X_k = n)^2\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$$

Donc A_{ij} et A_{kl} sont indépendants.
Cependant, les événements A_{ij} ne sont pas indépendants comme le montre le calcul ci dessous :

$$\mathbb{P}(A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}) = \mathbb{P}(X_1 = X_2 = X_3) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X_1 = k)^3 = \frac{1}{36}$$

$$\neq \mathbb{P}(A_{12})\mathbb{P}(A_{23})\mathbb{P}(A_{13}) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Exercice n°1.3.4 :

► Si A,B,C sont deux à deux indépendants, comme $\alpha + \beta + \gamma = 1 - \delta$, si $\pi := \alpha\beta\gamma$ on doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ \mathbb{P}(\mathrm{A} \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C) \\ \mathbb{P}(\mathrm{B} \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) \end{array}\right. \quad i.e \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma = (b+\gamma)(\gamma+\alpha) \\ \beta = (\beta+\gamma)(\alpha+\beta) \\ \alpha = (\gamma+\alpha)(\alpha+\beta) \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} \gamma^2\delta = \pi \\ \beta^2\delta = \pi \\ \alpha^2\delta = \pi \end{array}\right.$$

On a donc nécessairement $\alpha = \beta = \gamma$. Si $\alpha = 0$ alors $\delta = 1$, sinon $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$

► Pour que A,B,C ne soient pas indépendants, il faut et il suffit qu'une condition du type suivant soit violée

$$\mathbb{P}(A^{e_A} \cap B^{e_B} \cap C^{e_C}) = \mathbb{P}(A^{e_A})\mathbb{P}(B^{e_B})\mathbb{P}(C^{e_C}) \quad \text{où} \quad M^{e_M} = M \text{ ou } M^c$$

Dans le cas $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$ on a

$$P(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq P(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$$

On conclut que si $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1/4$ alors A,B,C sont deux à deux indépendants, mais pas indépendants. En revanche, on vérifie facilement que lorsque $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et $\delta = 1$, les événements A,B,C sont deux à deux indépendants et sont aussi indépendants dans leur ensemble.

Exercice n°1.3.5 :

► On désigne pile par 0 et face par 1, on appelle $(P_1,P_2,...,P_{11}) \in \{0,1\}^{11}$ les prédictions du voyant. Ce sont des nombres déterministes, fixés avant les tirages des pièces. Ensuite, on considère l'espace des épeuves $\Omega = \{0,1\}^{11}$, muni de la tribu des parties et de la mesure uniforme, on désigne par $(X_1,X_2,...X_{11})$ les valeurs (pile, face)prises par les pièces. On construit alors les variables $Y_i = |X_i - P_i|$. Lorsque Y_i vaut 0 cela veut dire que la prédiction est bonne, lorsque $Y_i = 0$ le voyant s'est trompé... On voit facilement que

$$\mathbb{P}(Y_i = 0) = \mathbb{P}(Y_i = 1) = \frac{1}{2}$$

Maintenant on peut déterminé la probabilté que le voyant fasse exactement p erreurs :

$$\mathbb{P}(p \text{ erreurs exactement}) = \frac{C_{11}^p}{2^{11}}$$

La probabilité pour le voyant se trompe au plus n fois

$$\mathbb{P}(\text{au plus } n \text{ erreurs }) = \frac{\sum_{p=0}^{n} C_{11}^p}{2^{11}}$$