Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°3.1 :

On note 1 pour rouge et 0 pour noir. On désigne par $Y_k \in \{0,1\}$ le résultat du $k^{ième}$ tirage. On veut montrer que $\mathbb{P}(Y_k = 1)$ ne dépend pas de k.

► Une première solution (naturelle) est de raisonner par récurence, il suffit alors de faire le calcul.

► Une deuxième solution plus efficace est la suivante :

On écrit

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \sum \mathbb{P}(Y_1 = u_1, Y_2 = u_2, \ldots ,Y_k = 1, \ldots ,Y_{n+r} = u_{n+r})$$

où la somme est faite sur les u_i valant 0 ou 1, n u_i valant 0, $r-1$ u_i valant 1. Or on remarque que chaque terme de la somme ci dessus ne dépend pas de k (on peut permuter les tous les 1 entre eux par exemple), il en découle que la somme elle même ne dépend pas de k donc $\forall k \geq 1$,

$$\mathbb{P}(Y_k = 1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{r}{n+r}$$

Exercice n°3.2 :

► Les variables X_k sont à valeurs dans $\{0,1,2\}$ pour $i,j \in \{0,1,2\}^2$ et $k \geq 1$ on pose alors

$$q_{ij}^k = \mathbb{P}(X_k = j \mid X_{k-1} = i),$$

Il est clair qu'en fait q_{ij}^k ne dépend pas de k, pour simplifier, on écrira donc simplement q_{ij} et on notera Q la matrice dont les composantes sont les q_{ij}. Un calcul simple donne

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Par définition, le vecteur $V_k = (V_k)_{i=0,1,2}$ a pour composantes

$$(V_k)_i = \mathbb{P}(X_k = i), \qquad i = 0,1,2$$

La relation

$$\mathbb{P}(X_k = j) = \sum_{i=0}^{2} \mathbb{P}(X_k = j \mid X_{k-1} = i)\mathbb{P}(X_k = i)$$

peut se réécrire

$$(V_k)_j = \sum_{i=0}^{2} q_{ij} \times (V_k)_i$$

ou encore sous forme matricielle

$$V_k = Q^t \times V_{k-1}$$

Comme $X_0 = 2$, on a $V_0 = (0,0,1)^t$ donc

$$V_k = (Q^t)^k \times V_0 = (Q^t)^k \times (0,0,1)^t$$

► On désire calculer $\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}(X_k = 2)$. Pour cela, on doit connaitre $\lim_{k\to\infty}(Q^t)^k$, on diagonalise donc Q^t, on trouve que Q^t est équivalente à la matrice diagonale $diag(1,0,-1/2)$ donc

$\lim_{k\to\infty}(Q^t)^k = diag(1,0,0)$
On conclut alors que $\lim_{k\to\infty}\mathbb{P}(X_k = 2) = 0$

► Nous cherchons le lien entre (p_k,q_k) et (p_{k-1},q_{k-1}).

$$\begin{aligned} p_k &= \mathbb{P}(T \geq k, X_k = 1 \cap T \geq k-1, X_{k-1} = 1) + \mathbb{P}(T \geq k, X_k = 1 \cap T \geq k-1, X_{k-1} = 2) \\ &= \mathbb{P}(X_k = 1 | T \geq k-1, X_{k-1} = 1)p_{k-1} + \mathbb{P}(X_k = 1 | T \geq k-1, X_{k-1} = 2)q_{k-1} \\ & \qquad i.e \qquad p_k = \frac{1}{2}p_{k-1} + q_{k-1} \end{aligned}$$

De même, on trouve

$$q_k = \frac{1}{4}p_{k-1} \quad \text{donc} \quad \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ 1/4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k-1} \\ q_{k-1} \end{pmatrix}$$

Ensuite il vient

$$p_{k+1} = \frac{1}{2}p_k + \frac{1}{4}p_{k-1} \quad etc,etc...$$

Exercice n°3.3 :

► Si le nombre de clients X est plus grand que le nombre n de journaux en stock, alors on vend n journaux et il y a $(X-n)$ clients insatisfaits. Dans ce cas, le gain s'écrit

$$G_n = a \times n - c \times (X - n)$$

► Si le nombre n de journaux est supérieur au nombre X de clients alors, on vend X journaux et il y a $(n-X)$ invendus, donc le gain s'écrit

$$G_n = a \times X - b \times (n - X)$$

► En général, le gain s'écrit comme :

$$G_n = [a \times n - c \times (X-n)]\, 1_{X \geq n} + [a \times X - b \times (n - X)]\, 1_{n > X}$$

En écrivant $\{X \geq n\} = \{X \geq n+1\} \cup \{X = n\} =$ et $\{X < n\} = \{X < n+1\} - \{X = n\}$, on obtient

$$\begin{aligned} G_n &= [an - c(X-n)]\, 1_{X \geq n+1} + [aX - b(n-X)]\, 1_{n+1>X} + [an - c(X-n) - aX + b(n-X)] 1_{X=n} \\ &= [an - c(X-n)]\, 1_{X \geq n+1} + [aX - b(n-X)]\, 1_{n+1>X} \end{aligned}$$

Alors

$$G_{n+1} - G_n = (a+c) \times 1_{X \geq n+1} - b \times 1_{n+1>X}$$

et

$$\mathbb{E}(G_{n+1} - G_n) = (a+b+c) \times \mathbb{P}(X \geq n+1) - b$$

On voit donc que la suite $\mathbb{E}(G_n)$ est croissante tant que

$$\mathbb{P}(X \geq n+1) \geq \frac{b}{a+b+c} \qquad (*)$$

Soit n_0 le plus grand entier tel que $(*)$ soit vérifiée, c'est pour cette valeur que le gain moyen sera maximum.

Exercice n°3.4 :

► Soit Z une variable positive. Par définition

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}^+} x \, \mathbb{P}_Z(dx)$$

Or on peut écrire $x = \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,x]}(s)ds$, donc

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}^+} \int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,x]}(s)ds\mathbb{P}_Z(dx)$$

En utlisant le théorème de Fubini Tonelli, on obtient

$$\mathbb{E}(Z) = \int_{\mathbb{R}^+} \left[\int_{\mathbb{R}^+} 1_{[0,x]}(s)\mathbb{P}_Z(dx) \right] ds = \int_{\mathbb{R}^+} \left[P(Z > s) \right] ds$$

Dans le cas où Z est à valeurs dans $\mathbb{N}$ on obtient

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(Z > k)$$

Exercice n°3.5 :

►La loi de X_k est donnée par

$$\mathbb{P}(X_k = n) = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n}$$

En effet, si $X_k = n$ on a juste à choisir la place des $k-1$ premiers piles parmi les $n-1$ premiers lancers.

► On remarque que comme les lancers sont tous identiques et indépendants, la loi de $X_k - X_{k-1}$ sachant X_{k-1} n'est autre que la loi de X_1, donc

$$\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid X_{k-1}) = \mathbb{E}(X_1)$$

d'où pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(X_k) = k \times \mathbb{E}(X_1) = k \times \sum_{1}^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2k$$

De même, on trouve que

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_{k-1}^2) + 8k - 2 \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{E}(X_k^2) = 4k^2 + 2k$$

La variance est donc donnée par

$$\mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = 2k$$

► On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, comme pour $k \leq l$ on a $\{X_k = n\} \cap \{X_l = n\} = \emptyset$, l'union $\cup_{k>0}\{X_k = n\}$ est une union disjointe et

$$\mathbb{P}(\cup_{k>0} X_k = n) = \sum_{k>0} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{C_{n-1}^k}{2^n} = \frac{1}{2}$$

Exercice n°3.6 : Voir le cours

Exercice n°3.7 :

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On fixe $\epsilon > 0$ et $p \geq 0$, alors on a toujours

$$|X| = |X| \times 1_{|X| \geq \epsilon} + |X| \times 1_{|X| < \epsilon}$$

où $|\,.\,|$ est la valeurs abolue si l'on est dans $\mathbb{R}$, la norme euclidienne sinon. Comme $|X| \times 1_{|X|<\epsilon} \geq 0$

$$|X| \geq |X| \times 1_{|X| \geq \epsilon}$$

Maintenant on réalise subitement que sur l'évènement $\{|X| \geq \epsilon\}$, on a $|X| \geq \epsilon$!!! On en déduit

$$|X| \geq \epsilon \times 1_{|X| \geq \epsilon}$$

Puis si on élève à la puissance p

$$|X|^p \geq \epsilon^p \times 1_{|X| \geq \epsilon}$$

En prenant l'espérance, on obtient

$$\mathbb{E}|X|^p \geq \epsilon^p \times \mathbb{P}(|X| \geq \epsilon)$$

Il ne reste plus qu'à diviser par ϵ^p et contempler

$$\mathbb{P}(|X| \geq \epsilon) \leq \frac{\mathbb{E}|X|^p}{\epsilon^p}$$

Exercice n°3.8 :

On définit les variables X_i qui valent 1 si on écrit le jour i et 0 si l'on écrit pas. D'après l'énoncé, on a

$$\mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1) = \frac{1}{2} \qquad \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0) = 1$$

Le nombre de jour où l'on a écrit dans l'année est $S = \sum_{i=1}^{365} X_i$. Par linéarité

$$\mathbb{E}(S) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i)$$

Or ici

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 1)\mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_i = 1 \mid X_{i-1} = 0)\mathbb{P}(X_{i-1} = 0)$$

$$i.e \qquad \mathbb{E}(X_i) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + \mathbb{P}(X_{i-1} = 0) = \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) + 1 - \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)$$

ou encore

$$\mathbb{E}(X_i) = 1 - \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(X_{i-1} = 1)$$

Alors

$$E(S) = \sum_{i=1}^{365} \mathbb{E}(X_i) = 365 - \frac{1}{2} \times \sum_{i=1}^{365} \mathbb{P}(X_{i-1} = 1) = 365 - \frac{1}{2}\mathbb{E}(S)$$

D'où

$$\mathbb{E}(S) = \frac{2}{3} \times 365 \sim 243$$