Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°4.1.1 :

► On considère une variable aléatoire X dont la loi est la loi uniforme sur un intervalle d'entier de longueur l *i.e* un intervalle de la forme $[|a,a+l-1|] := [a,a+l-1] \cap \mathbb{Z}$. Alors l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=a}^{a+l-1} k \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{a+k}{l} = a + \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} k = a + \frac{l-1}{2}$$

Remarque 1 *Si l est pair, alors la moyenne n'appartient pas $[|a,a+l-1|]$*

Le moment d'ordre 2 est

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=a}^{a+l-1} k^2 \times \mathbb{P}(X=k) = \sum_{k=0}^{l-1} \frac{(a+k)^2}{l} = a^2 + a(l-1) + \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} k^2$$

Donc la variance est

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{l}\sum_{k=0}^{l-1} k^2 - (\frac{l-1}{2})^2 = \frac{(l-1)(2l-1)}{6} - \frac{(l-1)^2}{4}$$

Exercice n°4.1.2 :

► Si l'on sait que la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ peut être vue comme la somme de n variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, on obtient directement que si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$:

$$\mathbb{E}(X) = np, \qquad \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np(1-p)$$

► Sinon, on peut faire le calcul direct en sachant que $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$:

$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{n} k\, C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\, C_{n-1}^{k-1}\, p^k(1-p)^{n-k} = n\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^{k+1}(1-p)^{n-k-1}$

$\mathbb{E}(X) = np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^{k+1}(1-p)^{n-k-1} = np$

$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2\, C_n^k\, p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} k \times n \times C_{n-1}^{k-1}\, p^k(1-p)^{n-k}$

$\mathbb{E}(X^2) = np\sum_{k=0}^{n-1}(k-1)C_{n-1}^k p^k(1-p)^{n-k-1} + np\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k(1-p)^{n-k-1}$

Alors $\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = np(n(p-1)) + np - (np)^2 = np(1-p)$

Exercice n°4.1.3 :

► Voir le cours pour le début
► On a

$$\mathbb{P}(X=k) = \frac{C_{Np}^k C_{N(1-p)}^{n-k}}{C_N^n} = \frac{C_n^k C_{N-n}^{Np-k}}{C_N^{Np}}$$

Or lorsque $N \to +\infty$,

$$\frac{C_{N-n}^{Np-k}}{C_N^{Np}} = \frac{(Np)!(N(1-p))!}{(Np-k)!(N(1-p)-(n-k))!} \to p^k(1-p)^{n-k}$$

Donc

$$\mathbb{P}(X=k) \to C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercice n°4.1.4 :

► Soit X une variable de loi $\mathcal{G}(p)$, alors $\mathbb{P}(X>n) = (1-p)^n$ donc pour $m,n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(X > n+m | X > n) = \mathbb{P}(X > n+m \,\text{et}\, X > n)/\mathbb{P}(X > n)$$

$$\mathbb{P}(X > n+m | X > n) = \mathbb{P}(X > n+m)/\mathbb{P}(X > n) = (1-p)^m = \mathbb{P}(X > m)$$

Une variable géométrique vérifie donc la propriété de vieillissement.

► Soit maintenant une variable Y à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété de vieillissement. On définit une fonction $F : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ par

$$F(n) = -\log(\mathbb{P}(Y > n))$$

On a bien sûr $F(0) = 0$ et d'après la propriété de vieillissement pour $m,n \in \mathbb{N}^*$:

$$F(n+m) = F(n) + F(m)$$

On déduit facilement que $F(n) = n \times F(1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction F est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on peut donc définir $p \in [0,1]$ par $1-p := e^{-F(1)}$, alors pour $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathbb{P}(Y=n) = 1 - \mathbb{P}(Y \neq n) = 1 - \mathbb{P}(Y > n \quad \text{ou} \quad Y < n) = 1 - \mathbb{P}(Y > n) + \mathbb{P}(Y < n)$$

$$= \mathbb{P}(Y \geq n) - \mathbb{P}(Y > n) = \mathbb{P}(Y > n-1) - \mathbb{P}(Y > n) = e^{-F(n-1)} - e^{-F(n)}$$

$$= e^{-(n-1)F(1)} - e^{-nF(1)} = e^{-(n-1)F(1)}(1 - e^{-F(1)}) = (1-p)^{n-1} \times p$$

Y est une donc une variable de loi $\mathcal{G}(p)$.
Les seules variables à valeurs dans$\mathbb{N}^*$ qui vérifie la propriété de vieillissement sont les varibles de loi géométriques !

Exercice n°4.1.5 :

► Soit X une variable de loi géométrique sur $\mathbb{N}^*$, alors d'après l'exercice 3.4

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{k \geq 0} (1-p)^k = \frac{1}{1-(1-p)} = \frac{1}{p}$$

Autre solution : on peut noter que pour $|x| < 1$, si $f(x) = \sum_{k \geq 0} (1-x)^k = 1/x$ alors

$$-f'(x) = \sum_{k \geq 0} k(1-x)^{k-1} = 1/x^2$$

Donc,

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{k\geq 0} k(1-p)^{k-1} = -p \times f'(p) = p \times 1/p^2 = 1/p$$

De même, $f''(x) = 2/x^3 = \sum_{k\geq 0} k(k-1)(1-x)^{k-2}$, donc

$$\mathbb{E}(X^2) = \sum_{k\geq 0} k^2 p(1-p)^{k-1} = \sum_{k\geq 0} k(k-1)p(1-p)^{k-1} + \sum_{k\geq 0} kp(1-p)^{k-1}$$

$$= p(1-p)\sum_{k\geq 0} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p\sum_{k\geq 0} k(1-p)^{k-1} = p(1-p) \times f''(p) - p \times f'(p)$$

Alors la variance est égale à

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = p(1-p) \times \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p}\right)^2 = \frac{1-p}{p^2}$$

Exercice n°4.1.6 :

► Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, alors

$$\mathbb{E}(X) = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} k \times \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda$$

Puis

$$\mathbb{E}(X) = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0} k^2 \times \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k\geq 0}[k(k-1)+k] \times \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda}\lambda^2\sum_{k\geq 2} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\lambda\sum_{k\geq 1} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda^2 + \lambda$$

D'où

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

► Soit $X_n \sim \mathcal{B}(n,p_n)$ avec $n \times p_n \to \lambda$ lorsque $n \to +\infty$ (en particulier, $p_n \to 0$). Alors

$$\mathbb{P}(X_n = k) = C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k} \sim \frac{1}{k!}\left(\frac{np_n}{1-p_n}\right)^k \left(1 - \frac{np_n}{n}\right)^n \to \frac{1}{k!}\lambda^k e^{-\lambda}$$

Exercice n°4.1.7 : ► Soit X une variable aléatoire dont la loi est une loi de Poisson de paramètre λ, on écrira $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$, cela signifie que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Alors, on a

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{\mathbb{P}(X = k)}{\mathbb{P}(X = k+1)} = \frac{k+1}{\lambda}$$

La suite $x_k = \mathbb{P}(X = k)$, est donc croissante pour $k \leq \lambda - 1$ et décroissante pour $k \geq \lambda - 1$. On en déduit que la valeur la plus probable est $k = \lfloor \lambda \rfloor$