Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°4.2.1 :

► On considère une variable aléatoire X dont la loi est la loi uniforme sur un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$. Alors l'espérance de X est

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Le moment d'ordre 2 est

$$\mathbb{E}(X^2) = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} = \frac{(a+b)^2-ab}{3}$$

Donc la variance est

$$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{(a+b)^2-ab}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

Exercice n°4.2.2 :

► Soit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors pour $s,t \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}(Y > s+t \,|\, Y > s) = \mathbb{P}(Y > s+t)/\mathbb{P}(Y > s) = e^{-\lambda(s+t)}/e^{-\lambda s} = e^{-\lambda t} = \mathbb{P}(Y > t)$$

► Soit X qui vérifie la propriété de vieillissement ci dessus, on introduit la fonction $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$

$$F(s) = -\log(\mathbb{P}(X > s))$$

alors on a

$$F(s+t) = F(s) + F(t)$$

On montre facilement que $F(s) = s \times F(1)$, c'est vrai pour les entiers, les rationnels, puis par continuité sur les réels. On en déduit que $\mathbb{P}(X > s) = e^{-\lambda s}$ avec $\lambda = F(1) > 0$.

Exercice n°4.2.3 :

► Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, alors

$$E(X) = \int_{s\geq 0} \mathbb{P}(X > s) ds = \int_{s\geq 0} e^{-\lambda s} ds = \left[\frac{-e^{-\lambda s}}{\lambda}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$$

$$E(X^2) = \int_{s\geq 0} \mathbb{P}(X^2 > s) ds = \int_{t\geq 0} \mathbb{P}(X > t) 2t dt = \int_{t\geq 0} 2te^{-\lambda s} dt = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$E(X^2) - E(X)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Exercice n°4.2.4 :

▶ On vérifie aisément que $\mathbb{E}(X) = m$ et $var(X) = \sigma^2$ puis que $X \in \cap_{p<+\infty} \mathbb{L}^p$

▶ L'idée ici est d'intègrer par partie :

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \int_x^{+\infty} \frac{1}{t} \times (te^{-t^2/2})dt = \left[-\frac{e^{-t^2/2}}{t}\right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$$

$$i.e \quad \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \frac{e^{-x^2/2}}{x} - \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt$$

or si $x \geq A$

$$0 \leq \int_x^{+\infty} \frac{1}{t^2}e^{-t^2/2}dt \leq \frac{1}{A^2}\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt$$

On a donc bien

$$\frac{A^2}{A^2+1}\frac{e^{-x^2/2}}{x} \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leq \frac{e^{-x^2/2}}{x}$$

On déduit alors que

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \sim \frac{e^{-x^2/2}}{x} \quad \text{lorsque} \quad x \to +\infty$$

▶ Soit $Y \sim \mathcal{N}(m,\sigma^2)$, alors $X := (Y-m)/\sigma \sim \mathcal{N}(0,1)$, si h est une fonction conitnue bornée sur $\mathbb{R}$ alors

$$\mathbb{E}(h(Y)) = \mathbb{E}(h(\sigma(X+m))) = \int_{\mathbb{R}} h(\sigma(x+m))\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx = \int_{\mathbb{R}} h(y)\frac{e^{-(y-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}dy$$

$i.e\,Y$ a pour densité $\frac{e^{-(y-m)^2/2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice n°4.2.5 :

▶ Si l'étudiant part à 7h15, il a 45 minutes pour faire son trajet. S'il souhaite arriver à l'heure, il doit choisir la variable Z telle que $\mathbb{P}(Z \geq 45)$ est minimum. Or

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X \geq 45) = \mathbb{P}((X-35.2)/5 \geq (45-35.2)/5) = \mathbb{P}(N \geq (45-35.2)/5) \\ \\ \mathbb{P}(Y \geq 45) = \mathbb{P}((Y-40)/2 \geq (45-40)/2) = \mathbb{P}(N \geq (45-40)/2) \end{cases}$$

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$. Comme $(45-35.2)/5) \leq (45-40)/2)$ il faut qu'il choississe le chemin correspondant à la variable Y.

▶ Dans le cas où il part à 7h30 on a

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X \geq 30) = \mathbb{P}((X-35.2)/5 \geq (30-35.2)/5) = \mathbb{P}(N \geq (30-35.2)/5) \\ \\ \mathbb{P}(Y \geq 30) = \mathbb{P}((Y-40)/2 \geq (30-40)/2) = \mathbb{P}(N \geq (30-40)/2) \end{cases}$$

où $N \sim \mathcal{N}(0,1)$ Comme $(30-40)/2) \leq (30-35.2)/5)$, il vaut mieux choisir ici le chemin correspondant à la variable X

Exercice n°4.2.6 :

► C'est immédiat...

Exercice n°4.2.7 :

► Concernant l'existence, c'est la principe de la borne inf...

► Soit $x \in \mathbb{R}$, alors par définition $G(F(x)) := \inf\{y \in \mathbb{R}, F(y) \geq \mathbb{F}(x)\}$, comme $F(x) \geq F(x)$!!! l'infimum est au plus égal à x donc $G(F(x)) \leq x$

► Soit $p \in [0,1]$ tel que $G(p) \in \mathbb{R}$. Clairement, pour $y > G(p)$ on a $F(y) \geq p$. Soit alors une suite (y_n) convergent en décroissant vers $G(p)$, comme F est continue à droite on a

$$F(G(p)) \geq \lim_n \searrow F(y_n) \geq p$$

► Pour le sens $\Rightarrow$ il suffit d'appliquer F et d'utiliser sa croissance. Pour les sens $\Leftarrow$, c'est immédiat vu la définition de la fonction G.

► Si $U \sim U_{[0,1]}$ alors pour $x \in \mathbb{R}$, d'après l'équivalence montrée ci dessus

$$P(G \circ U \leq x) = \mathbb{P}(U \leq F(x)) = F(x)$$

La fonction de répartition de $G \circ U$ n'est autre que F.

► Si F est bijective, alors G est simplement l'inverse de la fonction F. Par exemple, la variable $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ a pour fonction de répartition $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ qui est bijective d'inverse $G(y) = F^{-1}(y) = -\frac{1}{\lambda}\log(1-y)$. Si U est une variable uniforme sur $[0,1]$, la variable $Y = F^{-1}(U)$ suit une loi $\mathcal{E}(\lambda)$.