Correction des exercices du cours de Probabilités

Exercice n°5.1 :

► Soient U_1, U_2, U_3 trois variables indépendantes de loi uniforme sur [0,1], on notera $U_i \sim U_{[0,1]}$.

$$\mathbb{P}(U_i = U_j) = 1 - \mathbb{P}(U_i \neq U_j) = 1 - (\mathbb{P}(U_i > U_j) + \mathbb{P}(U_j > U_i)) = 1 - 2\mathbb{P}(U_i > U_j)$$

Or

$$\mathbb{P}(U_i > U_j) = \mathbb{E}(1_{U_i > U_j}) = \int_0^1 \int_0^1 1_{x>y} dxdy = 1/2$$

donc $\mathbb{P}(U_i = U_j) = 0$, *i.e* les variables U_1, U_2, U_3 sont *ps* distinctes.

► On ordonne les variables U_1, U_2, U_3 en $U_{(1)} < U_{(2)} < U_{(3)}$. Alors, si f est une fonction continue bornée sur $[0,1]^3$

$$\mathbb{E}(f(U_{(1)},U_{(2)},U_{(3)}) = \int_{[0,1]^3} f(x \wedge y \wedge z, x + y + z - (x \wedge y \wedge z) - (x \vee y \vee z), (x \vee y \vee z)) dxdydz$$

On découpe ensuite $[0,1]^3$ (en oubliant les diagonales de mesure nulle d'aprés la première question) en les six parties du type $\{(x,y,z) \in [0,1]^3, x < y < z\}$ (6 parties car il y a 6 façon de permuter x,y et z), alors par symétrie

$$\mathbb{E}(f(U_{(1)},U_{(2)},U_{(3)}) = 6 \int_{\{(x,y,z)\in[0,1]^3, x<y<z\}} f(x,y,z) dxdydz$$

On déduit que $(U_{(1)},U_{(2)},U_{(3)})$ a pour densité

$$6 \times 1_{0<x<y<z<1}$$

► Plus généralement, si $U_1,U_2,...,U_n$ sont n variables indépendantes de loi uniforme sur $[0,a]$, alors le vecteur ordonné $(U_{(1)},U_{(2)},...,U_{(n)})$ a pour densité

$$\frac{n!}{a^n} \times 1_{0<x_1<x_2<...<x_n<a}$$

Pour obtenir les lois marginales, il suffit d'intégrer selon les autres variables. En particulier, la loi de $(U_{(1)},U_{(n)})$ admet pour densité

$$\frac{n!}{a^n} \times \int_{(x_2,x_3,...,x_{n-1})\in[0,a]^{n-2}} 1_{0<x_1<x_2<...<x_n<a} dx_2 dx_3 ... dx_{n-1} = \frac{n!}{a^n} \frac{(x_n - x_1)^{n-2}}{(n-2)!} = n(n-1) \frac{(x_n - x_1)^{n-2}}{a^n}$$

Pour $a = 1$ on trouve que $(U_{(1)},U_{(n)})$ a pour densité $n(n-1)(x_n - x_1)^{n-2}$

► Une autre façon de calculer la densité de $(U_{(1)},U_{(n)})$ consiste à écrire

$$\mathbb{P}(x < U_{(1)} < U_{(n)} < y) = \mathbb{P}(x < U_i < y, i = 1...n) = \mathbb{P}(x < U_1 < y)^n = 1 - (y-x)^n$$

Alors en prenant les dérivées partielles en x et y, on trouve que la densité est $n(n-1)(y-x)^{n-2}$

► Soient $0 < x < y < 1$,

$$\mathbb{P}(U_{(1)} < x < y < U_{(n)}) = 1 - \mathbb{P}(U_{(1)} \geq x \cup U_{(n)} \leq y)$$

Or

$$\mathbb{P}(U_{(1)} \geq x \cup U_{(n)} \leq y) = \mathbb{P}(U_{(1)} \geq x) + \mathbb{P}(U_{(n)} \leq y) - \mathbb{P}(x \leq U_{(1)} < U_{(n)} \leq y)$$

Donc

$$\mathbb{P}(U_{(1)} \geq x \cup U_{(n)} \leq y) = (1-x)^n + y^n - (1 - (y-x)^n) \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

d'où

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}(U_{(1)} < x < y < U_{(n)}) = 1$$

Exercice n°5.2 :

► Soient Y_1,...,Y_n des variables indépendantes $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$. On ordonne les variables en $(Y_{(1)},Y_{(2)},...,Y_{(n)})$ alors pour $x \in \mathbb{R}^+$

$$\mathbb{P}(Y_{(1)} > x) = \mathbb{P}(Y_i > x, i = 1...n) = \mathbb{P}(Y_1 > x)^n = e^{-n\lambda x}$$

On conclut que $Y_{(1)} \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

Exercice n°5.3 :

► Soient X_1,...,X_n des variables indépendantes $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$. Soit $k \in \mathbb{N}$ alors

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = k \cap X_1 = l) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = l \cap X_2 = l - k)$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(X_1 = l)\mathbb{P}(X_2 = l - k) = \sum_{l=0}^{k} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^l}{l!} \times e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!}$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 = k) = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}}{k!} \sum_{l=0}^{k} C_k^l \lambda_1^l \lambda_2^{k-l} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}$$

On a donc $X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$. Par récurrence, on peut montrer de même que

$$X_1 + X_2 + ... + X_n \sim \mathcal{P}(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i)$$

► Soient $l \leq k$ deux entiers positifs

$$\mathbb{P}(X_i = l \mid X_1 + ... + X_n = k) = \frac{\mathbb{P}(X_i = l \cap X_1 + ... + X_{i-1} + X_{i+1} + ... + X_n = k - l)}{\mathbb{P}(X_1 + ... X_n = k)}$$

Par indépendance

$$\mathbb{P}(X_i = l \mid X_1 + ... + X_n = k) = \frac{\mathbb{P}(X_i = l) \times \mathbb{P}(X_1 + ... + X_{i-1} + X_{i+1} + ... + X_n = k - l)}{\mathbb{P}(X_1 + ... X_n = k)}$$

$$= \frac{\left[e^{-\lambda_i}\frac{\lambda_i^l}{l!}\right] \times \left[e^{-\sum_{j\neq i}\lambda_j}\frac{(\sum_{j\neq i}\lambda_j)^{k-l}}{(k-l)!}\right]}{e^{-\sum_j \lambda_j}\frac{(\sum_j \lambda_j)^k}{k!}} = C_k^l(p)^l(1-p)^{k-l} \quad \text{où} \quad p = \lambda_i / \sum_{j=1}^n \lambda_j$$

On conclut que la loi de X_i sachant $X_1 + ... + X_n = k$ est une loi binomiale $\mathcal{B}(k,p)$ d'où

$$\mathcal{L}(X_i \mid \sum_{j=1}^n X_j) \sim \mathcal{B}(X_1 + ... + X_n, \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^n \lambda_j})$$

On déduit alors aisément l'espérance et la variance...

► ...

Exercice n°5.4 :

► Soient X_1 et X_2 deux variables indépendantes $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. On ordonne les variables en $X_{(1)} < X_{(2)}$, alors pour $x \geq 0$

$$\mathbb{P}(X_{(1)} > x) = \mathbb{P}(X_1 > x \,\cap\, X_2 > x) = \mathbb{P}(X_1 > x) \times \mathbb{P}(X_2 > x) = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$$

Donc $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\lambda_1 + \lambda_2)$.

$$\mathbb{P}(X_{(2)} \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x \,\cap\, X_2 \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x) \times \mathbb{P}(X_2 \leq x) = (1 - e^{-\lambda_1 x})(1 - e^{-\lambda_2 x})$$

Alors $X_{(2)}$ a pour densité $\lambda_1 e^{-\lambda_1 x} + \lambda_2 e^{-\lambda_2 x} - (\lambda_1 + \lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)x}$.

► On suppose que $\lambda_1 = \lambda_2$. Soit f une fonction continue bornée, alors

$$\mathbb{E}(f(X_{(1)},X_{(2)} - X_{(1)})) = \int_{\mathbb{R}^+}\int_{\mathbb{R}^+} f(x \wedge y, x \vee y - x \wedge y)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}^{+2},\, x<y} f(x, y-x)\lambda^2 e^{-\lambda(x+y)}dxdy = 2\int_{\mathbb{R}^+} f(x,v)\lambda^2 e^{-\lambda(v+2x)}dxdv$$

La densité de $(X_{(1)},X_{(2)} - X_{(1)})$ s'écrit comme un produit de densité, on en déduit d'une part que $X_{(1)}$ et $X_{(2)} - X_{(1)}$ sont indépendantes, d'autre part que $X_{(1)} \sim \mathcal{E}(2\lambda)$ et $X_{(2)} - X_{(1)} \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Exercice n°5.5 : Sur les lois $\Gamma(a,b)$

Une variable de loi $\Gamma(a,b)$ est une variable à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue s'écrit

$$\frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx}\, 1_{x\geq 0}$$

On remarque qu'une loi $\Gamma(1,\lambda)$ est en fait une loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Soient maintenant deux variables indépendantes X et Y de lois respective $\Gamma(n,\lambda)$ et $\Gamma(1,\lambda)$, alors la variable $X+Y$ suit une loi $\Gamma(n+1,\lambda)$. En effet, si f est une fonction continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X+Y)) = \int_{\mathbb{R}^{+2}} f(x+y) \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \times \lambda e - \lambda y dx dy = \int_{\mathbb{R}^{+2}} f(x+y) \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda(x+y)} dx dy$$

$$= \int_{(x,u)\in\mathbb{R}^{+2}, u>x} f(u) \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda u} dx du = \int_{\mathbb{R}^+} f(u) \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda u} \left(\int_0^u x^{n-1} dx \right) du$$

$$i.e \quad \mathbb{E}(f(X+Y)) = \int_{\mathbb{R}^+} f(u) \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda u} u^n du \quad \text{et} \quad X+Y \sim \Gamma(n+1,\lambda)$$

Calculons la moyenne et la variance d'une variable $X \sim \Gamma(a,b)$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}^+} x \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} x^a e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = \frac{a}{b}$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{\mathbb{R}^+} x^2 \times \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathbb{R}^+} x^{a+1} e^{-bx} dx = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+2)}{b^{a+2}} = \frac{a(a+1)}{b^2}$$

On en déduit

$$var(X) = \frac{a(a+1)}{b^2} - \left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b^2}$$

Exercice n°5.6 :

►Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors si f est une fonction continue bornée

$$\mathbb{E}(f(X^2)) = \int_{\mathbb{R}} x^2 \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \int_{\mathbb{R}^+} f(y) y^{-1/2} e^{-y/2} dy$$

On a donc $X^2 \sim \Gamma(1/2,1/2)$. D'autre part, on peut généraliser l'exercice 5.5 en montrant que si $U \sim \Gamma(a,\lambda)$ et si V est indépendante de U avec $V \sim \Gamma(b,\lambda)$ alors $U+V \sim \Gamma(a+b,\lambda)$.
Dès lors, si X et Y sont indépendantes, de loi $\mathcal{N}(0,1)$, la variable $X^{2+}Y^2 \sim \Gamma(1,1/2)$, ce qui revient encore à dire que $X^{2+}Y^2 \sim \mathcal{E}(1/2)$

Exercice n°5.7 :

► Calculons la loi de (U,V), soit h une fonction continue bornée :

$$\mathbb{E}(h(U,V)) = \int_D h(xy,x/y)\frac{dxdy}{x^2y^2}$$

où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \geq 1, y \geq 1\}$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ ne chargeant pas les hyperplans, on a aussi

$$\mathbb{E}(h(U,V)) = \int_{\mathring{D}} h(xy,x/y)\frac{dxdy}{x^2y^2}$$

On considère le changement de variable

$$\psi : (x,y) \in \mathring{D} \to (xy,x/y) \in \Delta$$

où $\Delta = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2, u > v > 0, uv > 1\}$. Le jacobien associé est $\frac{1}{2v}$ donc

$$\mathbb{E}(h(U,V)) = \int_{\mathring{D}} h(u,v)\frac{dudv}{2u^2v}$$

La densité du couple (U,V) est donc donnée par

$$g(u,v) = \frac{1}{2u^2v}1_\Delta(u,v)$$

Le domaine Δ n'étant pas de type rectangle, on peut affirmer que U et V ne sont pas indépendantes.

► Pour obtenir les densités f_U et f_V des marginales U et V, il suffit d'intégrer le densité du couple. Si $u \leq 1$ alors $g(u,v) = 0$ de même si $v \leq 0$, $g(u,v) = 0$ d'autre part

$$\frac{1}{2u^2}\int_{1/u}^{u}\frac{dv}{v} = \frac{\log u}{u^2}$$

$$\frac{1}{2v}\left(\int_{1/v}^{+\infty} 1_{(0,1)}(v)\frac{du}{u^2} + \int_{v}^{+\infty} 1_{(1,+\infty)}(v)\frac{du}{u^2}\right) = \frac{1}{2}1_{(0,1)}(v) + \frac{1}{2v^2}1_{(1,+\infty)}(v)$$

On obtient donc

$$f_U(u) = \frac{\log u}{u^2}1_{(1,+\infty)}(u)$$

$$f_V(v) = \frac{1}{2}1_{(0,1)}(v) + \frac{1}{2v^2}1_{(1,+\infty)}(v)$$

► Enfin le calcul donne

$$\mathbb{E}(\frac{1}{\sqrt{UV}}) = \int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{\sqrt{UV}}g(u,v)dudv = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{u^2\sqrt{u}}\int_{1/u}^{u}\frac{dv}{v^2}du$$

$$\mathbb{E}(\frac{1}{\sqrt{UV}}) = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{u\sqrt{u}} - \frac{1}{u^3\sqrt{u}}\right)du = \frac{4}{5}$$

Exercice n°5.8 :

▶ Le temps d'attente T de C n'est autre que $T = X \wedge Y$. D'après l'exercice 5.4, $T \sim \mathcal{E}(2\lambda)$

▶ L'évènement $\{C \text{ sort le dernier}\}$ s'écrit $\{T + Z > X \vee Y\} = \{X \vee Y - T < Z\}$. or d'après l'exercice 5.4, la variable $X \vee Y - T$ est indépendante de T et suit un loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On a donc

$$\mathbb{P}(C \text{ sort le dernier}) = \mathbb{P}(U < V)$$

où U et V sont indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Par symétrie, il vient alors

$$\mathbb{P}(C \text{ sort le dernier}) = \mathbb{P}(U < V) = \frac{1}{2}$$

▶ Le temps du dernier départ est $S = (T + Z) \vee (X \vee Y) = T + (Z \vee [(X \vee Y) - T])$. On a vu que $[(X \vee Y) - T] \sim \mathcal{E}(\lambda)$ est indépendante de T. On montre facilement que $[(X \vee Y) - T]$ est indépendante de $Z \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $(Z \vee [(X \vee Y) - T])$ a donc même loi que $X \vee Y$ et est indépendante de T. La loi de S est donc celle de $U + (V \vee W)$ où U,V,W sont des variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$

Exercice n°5.9 :

▶ Si $X \sim \mathcal{B}(n,p)$ et $Y \sim \mathcal{B}(m,q)$ sont indépendantes alors la variable $Z = X + Y$ est binomiale si et seulement si $p = q$, dans ce cas $Z \sim \mathcal{B}(m + n,p)$ (pour le voir, on peut regarder les fonctions caractéristiques)

Exercice n°5.10 :

▶La loi de X_k est donnée par

$$\mathbb{P}(X_k = n) = \frac{C_{n-1}^{k-1}}{2^n}$$

En effet, si $X_k = n$ on a juste à choisir la place des $k - 1$ premiers piles parmi les $n - 1$ premiers lancers.

▶ On remarque que comme les lancers sont tous identiques et indépendants, la loi de $X_k - X_{k-1}$ sachant X_{k-1} n'est autre que la loi de X_1, donc

$$\mathbb{E}(X_k - X_{k-1} \mid X_{k-1}) = \mathbb{E}(X_1)$$

d'où pour tout $k \geq 1$

$$\mathbb{E}(X_k) = k \times \mathbb{E}(X_1) = k \times \sum_1^{\infty} \frac{n}{2^n} = 2k$$

De même, on trouve que

$$\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(X_{k-1}^2) + 8k - 2 \qquad \text{d'où} \qquad \mathbb{E}(X_k^2) = 4k^2 + 2k$$

La variance est donc donnée par

$$\mathbb{E}(X_k^2) - \mathbb{E}(X_k)^2 = 2k$$

▶ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, comme pour $k \leq l$ on a $\{X_k = n\} \cap \{X_l = n\} = \emptyset$, l'union $\cup_{k>0}\{X_k = n\}$ est une union disjointe et

$$\mathbb{P}(\cup_{k>0} X_k = n) = \sum_{k>0} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(X_k = n) = \sum_{0 \leq k \leq n-1} \frac{C_{n-1}^k}{2^n} = \frac{1}{2}$$