Exercices du Cours de Probabilités, L3S5, UE 14A

(Licence de Physique de l'Université Louis Pasteur)

J. FRANCHI

I. Fondements de la théorie des probabilités

1 Probabilité

Exercice n^o 1.1 Est-il plus probable d'obtenir au moins une fois 6 en lançant 4 dés usuels, ou bien d'obtenir au moins une fois un double 6 en lançant 24 fois 2 dés usuels ?

Exercice n^o 1.2 On lance n fois de suite 3 dés normaux. Pour quelles valeurs de n la probabilité d'avoir obtenu au moins un 421 dépasse-t-elle $\frac{1}{2}$?

Exercice n^o 1.3 On lance 5 pièces de monnaie. Calculer les probabilités des événements suivant : "la 1ère pièce donne face" ; "face sort exactement 2 fois" ; "face sort au plus 3 fois".

Exercice n^o 1.4 On lance 10 dés usuels. Calculer les probabilités des événements suivant : "6 ne sort pas" ; "6 sort 1 fois exactement" ; "6 sort 3 fois exactement" ; "6 sort 2 fois au moins" ; "6 sort 3 fois au moins".

Exercice n^o 1.5 Une armoire contient 10 paires de chaussures, parmi lesquelles on prélève au hasard 8 chaussures. Quelle est la probabilité d'avoir ainsi k paires de chaussures exactement ?

Exercice n^o 1.6 Une urne contient n boules noires et b boules blanches. Deux joueurs X et Y tirent avec remise une boule dans l'urne, tour à tour, X tirant le premier. Quelle est la probabilité que X soit le premier à tirer une boule noire ? Même question sans remise.

Exercice n^o 1.7 Une loterie comporte 100 billets, dont les seuls billets gagnants suivant : 1 billet gagne 50 euros, 5 billets gagnent chacun 30 euros, 10 billets gagnent chacun 10 euros. Quelle est la probabilité qu'un acheteur de 3 billets gagne 30 euros (au moins, puis exactement) ?

Exercice n^o 1.8 Un joueur X lance 2 dés usuels, et obtient ainsi la somme S.

a) Calculer la probabilité que $S > n$, en fonction des différentes valeurs de l'entier n .

b) Un joueur Y relance les 2 dés et obtient une somme T. Quelles sont les probabilités que $S = T$, que $S > T$, que $S \geq T$?

Exercice n^o 1.9 Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n, qu'on tire tous 1 à 1, sans remise. $i)$ Calculer $p_n := \mathbb{P}$(au moins un jeton sorte au rang indiqué par son numéro), sa limite p_∞, et majorer $|p_n - p_\infty|$.

$ii)$ Soit $p_n(k) := \mathbb{P}$(exactement k jetons sortent au rang indiqué par leur numéros), pour $k \in \{1, .., n\}$. Déduire de (i) une formule pour $p_n(k)$, puis $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(k)$ (pour tout $k \in \mathbb{N}$).

1.1 Probabilités conditionnelles

Exercice n^o 1.2.1 Lancer de 2 dés usuels : $\Omega = \{1, .., 6\}^2$. $\mathbb{P}$ uniforme. Soient X_1 le chiffre indiqué par le premier dé, S la somme des chiffres indiqués par les 2 dés, et $C = \{S = 5\}$. Dresser le tableau des valeurs de $\mathbb{P}(\cdot/C)$, puis de $\mathbb{P}(X_1 = \cdot/C)$.

Exercice n^o 1.2.2 Vous allez chez des gens dont vous savez qu'ils ont 2 enfants, dont au moins une fille. a) Quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

b) En l'absence de l'information qu'ils ont au moins une fille (pour cette question seulement), mais en voyant une fille ouvrir la porte, quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ? c) Une fille vous ouvre la porte ; quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ? d) La fille qui vous a ouvert vous dit qu'elle est l'aînée des 2 enfants ; quelle est la probabilité que l'autre enfant soit aussi une fille ?

Exercice n^o 1.2.3 Trois condamnés X, Y, Z sont informés que l'un d'eux, choisi au hasard, va être exécuté, et que les 2 autres vont être libérés. Mais ils ne doivent pas encore savoir qui le hasard a désigné. X demande au geôlier de lui nommer l'un de ses 2 codétenus devant être libéré, arguant que cette information serait innocente, puisqu'il sait que l'un des 2 au moins doit l'être. Le geôlier refuse, arguant que cette information modifierait réellement l'estimation que X peut faire de ses chances. Qui a raison ?

Exercice n^o 1.2.4 Une urne contient b boules blanches et n boules noires. Quand une boule est tirée, on le remet dans l'urne, avec ℓ boules de la même couleur. On effectue ainsi 3 tirages au hasard. a) Quelle est la probabilité que la 1ère boule tirée soit noire sachant que la seconde est blanche ? b) Quelle est la probabilité que la 3ème boule soit noire ?

Exercice n^o 1.2.5 Vous attendez un ami de Vancouver, qui voyage jusqu'à Strasbourg avec changement d'avion à New York, Londres et Francfort. La probabilité d'attentat est estimée à p pour chacun des 4 vols, avec indépendance entre les 4 vols. Votre ami n'arrivant pas, quelle est la probabilité que l'attentat ait eu lieu : a) dans le 1er avion ? b) dans le 2ème avion ? c) dans le 3ème avion ? c) dans le 4ème avion ?

Exercice n^o 1.2.6 Trois machines U, V, W produisent une même pièce dans une usine. U assure 40% de la production, V 35%, et W le reste. U produit 20% de pièces défectueuses, V 15%, et W 10%.

a) Quelle est la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse ?

b) Quelle est la probabilité qu'une pièce défectueuse prise au hasard provienne de U ?

Exercice n^o 1.2.7 12% des individus d'une population sont porteurs d'une certaine maladie. Un test relatif à cette maladie est fiable à 95%, dans le cas d'un malade comme dans le cas d'un sujet sain. a) Quelle est la probabilité qu'un individu présentant un test positif soit effectivement malade ? b) Quelle est la probabilité qu'un individu présentant un test négatif soit effectivement sain ?

Exercice n^o 1.2.8 Émile possède 5 pièces de monnaie, dont 2 sont normales, 2 ont 2 côtés "face", et une a 2 côtés "pile".

a) Il prend une pièce au hasard et la lance ; quelle est la probabilité qu'il voie "face" ?

b) Il voit "face" ; quelle est la probabilité que l'autre côté de la pièce soit aussi "face" ?

Il relance la même pièce.

c) Quelle est la probabilité que le côté caché de la pièce soit "face" ?

d) Il voit de nouveau "face" ; quelle est la probabilité que l'autre côté de la pièce soit aussi "face" ? Il choisit ensuite au hasard une des autres pièces et la lance.

e) Quelle est la probabilité de voir de nouveau "face" (pour la troisième fois) ?

Exercice n^o 1.2.9 Un livre a une probabilité $p > 0$ de se trouver dans une commode comportant k tiroirs, et des chances égales de se trouver dans chacun des tiroirs.

i) On ouvre les $(k-1)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ?

ii) Soit $j \in \{2, .., k-1\}$. On ouvre les $(k-j)$ premiers tiroirs, sans le trouver ; quelle est la probabilité de le trouver dans le dernier tiroir ? dans l'un des j derniers tiroirs ?

Exercice n^o 1.2.10 Le quart d'une population est vacciné contre le choléra. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour 4 non-vaccinés, et qu'il y a un malade sur 12 parmi les vaccinés. Quelle est la probabilité qu'un non-vacciné tombe malade ? Le vaccin est-il efficace ?

1.2 Événements indépendants

Exercice n^o 1.2.1 Montrer que 2 événements A et B sont indépendants ssi A et B^c le sont, et ssi A^c et B^c le sont, ou bien encore (lorsqu'ils sont non négligeables) ssi $\mathbb{P}(A/B) = \mathbb{P}(A)$, et ssi $\mathbb{P}(B/A) = \mathbb{P}(B)$.

Exercice n^o 1.2.2 Un urne contient des jetons numérotés, rouges ou noirs. Lors du tirage d'un jeton la probabilité d'en tirer un rouge est $3/5$; d'en tirer un de numéro impair est $2/3$; d'en tirer un rouge et pair est p. Que vaut la probabilité d'en tirer un noir impair ? Pour quelles valeurs de p les événements "noir" et "impair" sont-ils indépendants ?

Exercice n^o 1.2.3 On jette un dé normal n (≥ 3) fois de suite. Montrer que les événements {les lancers j et k donnent le même résultat} sont deux à deux indépendants, mais non indépendants.

Exercice n^o 1.2.4 Sur $\Omega := \{a,b,c,d\}$ on définit $I\!P$ par : $I\!P(\{a\}) = \alpha$, $I\!P(\{b\}) = \beta$, $I\!P(\{c\}) = \gamma$, $I\!P(\{d\}) = \delta$. Trouver les valeurs de α, β, γ , δ telles que les événements $A := \{b,c\}$, $B := \{c,a\}$, $C := \{a,b\}$ soient 2 à 2 indépendants mais non indépendants.

Exercice n^o 1.2.5 Pour ridiculiser un astrologue (ou un "voyant", ou n'importe quelle autre sorte de charlatan), on le défie de prédire le résultat de 11 lancers successifs d'une pièce de monnaie usuelle. Quelle est la probabilité (en fonction de $n \in \{0,1,..,5\}$) qu'il se trompe au plus n fois ?

2 Lemmes de Borel-Cantelli

Exercice n^o 2.1 Montrer que si une suite de v.a. $\{Y_n \mid n \in I\!N\}$ est telle que $\sum_n \|Y_n\|_2^2$ converge, alors cette suite converge presque sûrement vers 0.

Exercice n^o 2.2 a) Montrer que si Y est une v.a.r. ≥ 0 , alors $I\!E(Y)^2 \leq I\!E(Y^2) \times I\!P(Y > 0)$.
b) Déduire que si $\{A_1, .., A_n\}$ sont des événements non tous négligeables, alors

$$I\!P\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) \geq \Big(\sum_{j=1}^n I\!P(A_j)\Big)^2 \Big/ \Big[\sum_{j=1}^n I\!P(A_j) + 2 \sum_{1\leq i<j\leq n} I\!P(A_i \cap A_j)\Big] .$$

c) Déduire que pour le deuxième lemme de Borel-Cantelli il suffit de supposer l'indépendance des événements 2 à 2 (en plus de la divergence de la série).
d) Montrer que s'il existe un $c > 0$ tel que $I\!P(A_i \cap A_j) \leq c\, I\!P(A_i) I\!P(A_j)$ pour tous $i \neq j$ et si $\sum_j I\!P(A_j) = \infty$, alors $I\!P(\limsup_j A_j) > 0$.
e) Considérons un jeu illimité de pile ou face, avec $p := I\!P(\text{"}pile\text{"}) \in]0,1[$.
Notons X_j la variable de Bernoulli valant 1 ssi le j-ième lancer donne pile, et posons $A_j^k := \{X_j = .. = X_{j+k-1} = 1\}$, pour $j,k \in I\!N^*$. Montrer que $I\!P\Big(\cap_k \cup_j A_j^k\Big) = 1$. Interpréter.

3 Variables aléatoires et leur lois

Exercice n^o 3.1 On tire au hasard et sans remise toutes les boules d'une urne remplie de r boules rouges et n boules noires.

1) Montrer que que la probabilité de tirer une boule rouge au k-ième tirage ne dépend pas de k. (Il y a au moins 2 solutions bien différentes)

2) Quelle est l'espérance du rang de la k-ième boule rouge ? (On pourra considérer le vecteur $(X_1, X_2 - X_1, .., X_r - X_{r-1}, r+n+1-X_r)$, X_j désignant le rang de la j-ième boule rouge).

Exercice n^o 3.2 Une urne U contient initialement 2 boules blanches, et une urne U' 2 boules noires. A chaque instant, on tire au hasard une boule par urne, et on les interchange.

Notons X_k le nombre de boules blanches dans U au k-ième instant, et V_k le vecteur-colonne donnant la loi de X_k.

a) Quelle est la relation entre V_{k+1} et V_k ?
b) Calculer $\lim_{\{k\to\infty\}} I\!\!P(X_k = 2)$.
Soient T le premier instant où U contient deux boules noires, $p_k := I\!\!P(T \ge k, X_k = 1)$, et $q_k := I\!\!P(T \ge k, X_k = 2)$.
c) Exprimer (p_{k+1}, q_{k+1}) en fonction de (p_k, q_k), puis p_{k+1} en fonction de (p_k, p_{k-1}).
d) Déduire la valeur de p_k, puis la loi de T. Que vaut $I\!\!P(T = \infty)$?

Exercice n^o 3.3 Un marchand de journaux a X clients par jour, X étant une v.a. entière intégrable, de loi supposée connue. Il gagne a par journal vendu, perd b par journal invendu, et perd c par client insatisfait. Quel est le nombre n de journaux qu'il doit commander par jour pour optimiser son gain moyen ?

Exercice n^o 3.4 Montrer que pour toute v.a.r. $Z \ge 0$, on a $I\!\!E(Z) = \int_0^\infty I\!\!P(Z > s)\, ds$. Particulariser au cas où Z prend ses valeurs dans $I\!\!N$.

Exercice n^o 3.5 Au cours d'un jeu illimité de pile ou face avec $I\!\!P$(pile)$= p$, on note X_k le rang de la k-ième apparition de "pile". Calculer la loi de X_k, son espérance et sa variance. Pour $n \in I\!\!N^*$, calculer $I\!\!P\Big((\exists\, k \in I\!\!N^*)\ X_k = n\Big)$.

Exercice n^o 3.6 a) Vérifier que $K_V = I\!\!E(V\, {}^t\!V) - I\!\!E(V)^t I\!\!E(V) = \Big(\Big(Cov(V_i, V_j)\Big)\Big)_{1\le i,j\le d}$.
b) Vérifier que pour tout $u \in I\!\!R^d$ on a $Var({}^t uV) = {}^t u K_V u = \sum_{1\le i,j\le d} u_i u_j Cov(V_i, V_j)$.
c) Montrer que K_V est une matrice symétrique positive.
d) Montrer que K_V est inversible ssi il n'existe pas d'hyperplan de $I\!\!R^d$ contenant p.s. V.
e) Soit M une matrice de $\mathcal{M}_{n,d}(I\!\!R)$. Calculer $I\!\!E(MV)$ et K_{MV}. Même question pour AV, si A est une application affine de $I\!\!R^d$ dans $I\!\!R^n$.

Exercice n^o 3.7 Inégalité de Markov, ou de Bienaymé-Tchebitchev :

Vérifier que $I\!\!P[|V| \ge v] \le I\!\!E[|V|^k]/v^k$, pour tous $v > 0$ et $k \ge 0$.

Exercice n^o 3.8 Vous écrivez chaque jour avec probabilité 1 si vous n'avez pas écrit la veille, et avec probabilité 1/2 sinon. Montrez que vous écrivez ainsi en moyenne 243 lettres par an. (Considérer pour chaque jour la variable indicatrice de l'événement "écrire".)

4 Lois usuelles

4.1 Lois usuelles discrètes

Exercice n^o 4.1.1 Calculer l'espérance et la variance d'une v.a. uniforme sur un intervalle de $\mathbb{Z}$.

Exercice n^o 4.1.2 Montrer que l'espérance et la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{B}(n,p)$ valent np et $np(1-p)$.

Exercice n^o 4.1.3 a) Montrer que l'espérance d'une v.a. de loi $\mathcal{H}(N,n,p)$ vaut np.
b) Calculer sa variance. c) Vérifier que $\lim\limits_{N\to\infty} \mathcal{H}(N,n,p)(k) = \mathcal{B}(n,p)(k)$, pour n,p,k fixés.

Exercice n^o 4.1.4 a) Les lois géométriques vérifient la propriété de non-vieillissement :

$\mathbb{P}(N > n+m/N > m) = \mathbb{P}(N > n)$ pour tous $n,m \in \mathbb{N}$.

b) Y a-t-il d'autres lois sur $\mathbb{N}^*$ qui vérifient cette propriété ?

Exercice n^o 4.1.5 Montrer que l'esp. et la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{G}(p)$ valent $\frac{1}{p}$ et $\frac{1-p}{p^2}$.

Exercice n^o 4.1.6 a) Montrer que l'esp. et la variance d'une v.a. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$ valent λ.

b) Vérifier que $\lim\limits_{np\to\lambda} \mathcal{B}(n,p)(k) = \mathcal{P}(\lambda)(k)$, pour $\lambda > 0$ fixé et $n \to \infty$.

Exercice n^o 4.1.7 Quelle est la valeur la plus probable pour une variable aléatoire poissonnienne de paramètre λ ?

Exercice n^o 4.1.8 Un trousseau de n clefs contient une seule clef ouvrant une serrure donnée. On les essaie l'une après l'autre au hasard. Calculer la loi, l'espérance et la variance du du nombre d'essais nécessaires. Même question si on réessaie à chaque fois une clef au hasard sans avoir écarté la précédente.

4.2 Lois usuelles à densité

Exercice n^o 4.2.1 Calculer l'esp. et la variance d'une v.a. uniforme sur un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice n^o 4.2.2 a) Les lois exponentielles vérifient la propriété de non-vieillissement :
si la loi de Y est $\mathcal{E}(\lambda)$, alors $\mathbb{P}(Y > s+t/Y > s) = \mathbb{P}(Y > t)$ pour tous $s,t > 0$.
b) Y a-t-il d'autres lois à densité sur $\mathbb{R}_+$ qui vérifient cette propriété ?
c) En déduire la loi de la durée de vie d'un atome fissile, en fonction de sa demi-vie.

Exercice n^o 4.2.3 Montrer que l'espérance et l'écart-type d'une v.a. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ valent $\frac{1}{\lambda}$.

Exercice n^o 4.2.4 a) Vérifier que $m = \mathbb{E}(X)$ et $\sigma^2 = Var(X)$, et que $X \in \cap_{p<\infty} L^p$.
b) Vérifier que $\frac{A^2\, e^{-x^2/2}}{(A^2+1)\,x} \le \int_x^\infty e^{-t^2/2}dt \le \frac{e^{-x^2/2}}{x}$ sur $[A,\infty[$, pour tout $A > 0$. Donner un équivalent de $\mathbb{P}(X > x)$ quand $x \to +\infty$.
c) Montrer que la densité de X est $t \longmapsto \exp(-(t-m)^2/2\sigma^2)/\sigma\sqrt{2\pi}$.

Exercice n^o 4.2.5 Pour être en cours à 8h, un étudiant en voiture a le choix entre un trajet sur petite route, dont la durée (en minutes) X suit la loi normale de moyenne 35,2 et de variance 25, et un trajet sur autoroute, dont la durée Y suit la loi normale de moyenne 40 et de variance 4. Il désire arriver à l'heure. Quel trajet doit-il préférer s'il part à 7h15 ? Et s'il part à 7h30 ?

Exercice n^o 4.2.6 a) Vérifier que si V est un vecteur gaussien de $\mathbb{R}^d$ et si A est une application affine de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^n$, alors AV est un vecteur gaussien.

b) Montrer que si V est un vecteur gaussien, alors ses coordonnées dans n'importe quelle base sont gaussiennes (ou p.s. constantes).

Exercice n^o 4.2.7 : Simulation Soit F une fonction de répartition sur $\mathbb{R}$. Pour tout $p \in [0,1]$, posons $G(p) := \inf\{x \in \mathbb{R} \,|\, F(x) \geq p\}$. (Nota Bene : $\inf \mathbb{R} = -\infty$ et $\inf \emptyset = +\infty$.)

a) Justifier l'existence dans $\mathbb{R}$ de $G(p)$ si $p \in]0,1[$. b) Montrer que $(\forall x \in \mathbb{R})\ G(F(x)) \leq x$.

c) Montrer que si $G(p) \in \mathbb{R}$, alors $F(G(p)) \geq p$. d) Montrer que $G(p) \leq x \Leftrightarrow F(x) \geq p$.

e) Montrer que si U est une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$, alors $G \circ U$ admet F pour fonction de répartition. Nota Bene : Ceci est utilisé pour simuler des variables aléatoires.

f) Que vaut G lorsque F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0,1[$? Comment simuler la loi $\mathcal{E}(\lambda)$?

4.3 Quelques lois de la mécanique statistique

Exercice n^o 4.3.1 : Montrer que lorsque le nombre n des états tend vers l'infini de façon que les proportions $n_1/n, .., n_d/n$ convergent vers $p_1, .., p_d$, alors les statistiques de Fermi-Dirac et de Bose-Einstein convergent vers la loi multinômiale (analogue à la statistique de Maxwell).

5 Variables aléatoires indépendantes

Exercice n^o 5.1 a) Soient U_1, U_2, U_3 trois v.a. indépendantes, uniformes sur $[0,1]$. Montrer qu'elles sont p.s. 2 à 2 distinctes. On les réordonne en $V_1 < V_2 < V_3$. Montrer que (V_1, V_2, V_3) admet la densité $6 \times 1_{\{0<v_1<v_2<v_3<1\}}$, et en déduire les densités de V_1, V_2, V_3.

b) Soient $U_1, .., U_n$ des v.a. indépendantes, uniformes sur $[0,1]$, et $J_n := \min\{U_1, .., U_n\}$, $M_n := \max\{U_1, .., U_n\}$. Calculer $\mathbb{P}(x < J_n, M_n < y)$, et en déduire la loi (conjointe) de (J_n, M_n). c) Que vaut $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(J_n < x < y < M_n)$?

Exercice n^o 5.2 Soient $Y_1, .., Y_n$ des v.a. indépendantes, exponentielles. Quelle est la loi de $\min\{Y_1, .., Y_n\}$?

Exercice n^o 5.3 Soient $X_1, .., X_n$ n v.a. indépendantes, X_j étant poissonnienne de paramètre λ_j. a) Quelle est la loi de $X_1 + X_2$, puis de $X_1 + .. + X_n$?

b) Calculer la loi, l'espérance et la variance de X_j sachant $X_1 + .. + X_n$.

c) Soient Y_j, $j \in \mathbb{N}$, des v.a. indépendantes à valeurs dans $\{1, .., n\}$, de même loi donnée par $\mathbb{P}(Y_j = k) = \alpha_k$, pour $1 \leq k \leq n$. Soient N une variable de Poisson de paramètre λ, indépendante des Y_j, et $N_k := \sum\limits_{j=1}^{N} 1_{\{Y_j = k\}}$. Montrer que les variables $N_1, .., N_k$ sont poissonniennes indépendantes.

Exercice n^o 5.4 Soient X_1, X_2 deux v.a.r. indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1, λ_2 . a) Calculer les lois de $J := \min\{X_1, X_2\}$, $M := \max\{X_1, X_2\}$.

b) Supposant que $\lambda_1 = \lambda_2$, montrer que J et $M - J$ sont des variables indépendantes.

Exercice n^o 5.5 Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes, de densité respectivement f, g , avec $n \in I\!N^*$, $f(x) = 1_{\{x>0\}} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}$, et $g(y) = 1_{\{y>0\}} \lambda\, e^{-\lambda y}$.

Calculer la densité de $X + Y$, $I\!E(X + Y)$, et $Var(X + Y)$.

Exercice n^o 5.6 Calculer la densité du carré d'une v.a.r. normale standard, puis de la somme de 2 tels carrés, puis du quotient de deux v.a.r. normales standards indépendantes.

Exercice n^o 5.7 Soient X et Y 2 v.a.r. indépendantes, admettant toutes 2 la densité $t \mapsto t^{-2}\, 1_{[1,\infty[}(t)$. On pose $U := XY$ et $V := X/Y$.

a) Calculer les lois de (U, V), de U, et de V. U et V sont-elles indépendantes ?

b) Calculer $I\!E(U^{-1/2}\, V^{-1})$.

Exercice n^o 5.8 Trois clients A, B, C arrivent au même temps 0 à la poste, où 2 guichets sont ouverts, qu'occupent A et B tout de suite. C remplace le premier des 2 qui a terminé. On admet que les temps de service X, Y, Z requis par ces 3 clients sont des v.a.r.i.i.d. de même loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

a) Quelle est la loi du temps d'attente T de C ? b) Calculer la probabilité que C termine (et parte) le dernier. c) Calculer la loi du temps du dernier départ.

Exercice n^o 5.9 Quand la somme de 2 variables aléatoires binômiales indépendantes est-elle binômiale ?

Exercice n^o 5.10 Au cours d'un jeu illimité de pile ou face avec $I\!P$(pile)$= p$, on note X_k le rang de la k-ième apparition de "pile". Calculer la loi de X_k, son espérance et sa variance. Pour $n \in I\!N^*$, calculer $I\!P\Big((\exists\, k \in I\!N^*)\ X_k = n\Big)$.

Exercice n^o 5.11 On effectue n tirages indépendants avec remise dans une urne contenant une proportion p_j de boules marquées j, pour $1 \leq j \leq r$, $r > 1$ étant fixé. On note N_j le nombre de boules marquées j qu'on tire ainsi. Préciser la loi du vecteur $N := (N_1, .., N_r)$, et calculer l'espérance et la variance de N_j , la covariance de N_j et N_k , et le nombre moyen de j tels que $N_j = 0$.

6 Transformées de Laplace et de Fourier

Exercice n^o 6.1 a) Déduire le corollaire 6 de la définition 19 et de la proposition 12.

b) Soient N gaussienne standard, et ε indépendante de N et uniforme sur ± 1. Montrer que εN est gaussiennne standard, mais que le vecteur $(N, \varepsilon N)$ n'est pas gaussien.

c) Montrer que toute combinaison linéaire (non triviale) de v.a. normales indépendantes est normale. Donner un contrexemple simple s'il n'y a pas indépendance.

d) Montrer que si le vecteur aléatoire V a ses coordonnées gaussiennes et indépendantes, alors il est gaussien (revenir à la définition).

e) Montrer que les coordonnées (dans la base canonique de $\mathbb{R}^d$) d'un vecteur gaussien sont indépendantes ssi la matrice de covariance est diagonale, et donc ssi elles sont non corrélées. Vérifier que c'est faux si le vecteur n'est pas gaussien (même si ses coordonnées sont gaussiennes).

<u>Exercice n^o 6.2</u> Soit V un vecteur gaussien d-dimensionnel, et pour $1 \leq j \leq k$ soient M_j une matrice réelle de format $d_j \times d$ et $V_j := M_j V$. Montrer que V_i et V_j sont indépendants ssi $M_i K_V \, {}^t M_j = 0$. Généraliser à l'indépendance de $V_1, .., V_k$.

<u>Exercice n^o 6.3</u> Soit $\{X_j \,|\, j \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a.i.i.d. $\mathcal{N}(0,1)$. Soit $\{a_j \,|\, j \in \mathbb{N}\}$ une suite de réels tels que $a_j a_{j+1} = 0$ pour tout j et tels que $\sum_j a_j^2 < \infty$. Soit $Y_n := \sum_{j=1}^n a_{n-j} X_j$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Etudier la convergence en loi de la suite Y_n. b) Les v.a. Y_n et Y_{n+1} sont-elles indépendantes ? c) Etudier la convergence dans L^2 de la suite Y_n.

<u>Exercice n^o 6.4</u> Soit $V := (V_0, ..V_d)$ un vecteur gaussien $(d+1)$-dimensionnel, dont les coordonnées sont $\mathcal{N}(0,1)$ et vérifient : $Cov(V_0, V_j) = p$ pour $1 \leq j \leq d$ et $Cov(V_i, V_j) = p^2$ pour $1 \leq i \neq j \leq d$, p étant un paramètre. Posons $W_j := (1-p^2)^{-1/2}(V_j - pV_0)$ pour $1 \leq j \leq d$. Déterminer successivement les lois de : $(V_0, W_1, .., W_d)$; $S := \sum_{j=1}^d V_j$; S/V_0.

<u>Exercice n^o 6.5</u> a) Calculer les fonctions génératrices des lois usuelles : $\mathcal{B}(n,p)$, $\mathcal{G}(p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$.

b) Calculer les transformées de Fourier des lois usuelles : $\mathcal{U}([m,n])$, $\mathcal{B}(n,p)$, $\mathcal{G}(p)$, $\mathcal{P}(\lambda)$, $\mathcal{U}([a,b])$, $\mathcal{E}(\lambda)$.

c) Retrouver à partir de là les valeurs des espérances et variances de ces différentes lois.

<u>Exercice n^o 6.6</u> Étude de la transmission du nom "Chenin", porté à la génération 0 par un unique homme (= humain mâle). Notons Z_n le nombre d'hommes s'appelant "Chenin" à la génération $n \in \mathbb{N}$, F la fonction génératrice de Z_1 ($F(s) := \mathbb{E}(s^{Z_1})$), p_k la probabilité (supposée fixe) qu'un homme ait k enfants mâles, et posons $m := \sum_{\{k \in \mathbb{N}\}} k\, p_k$.
Supposons l'indépendance entre les descendances des différents hommes.
a) Calculer par récurrence la fonction G_n, génératrice de Z_n, en fonction de F.
b) Vérifier que F est monotone et convexe sur $[0,1]$.
c) En déduire en fonction de m le comportement asymptotique de $\alpha_n := \mathbb{P}(Z_n = 0)$. Interprétation ?

<u>Exercice n^o 6.7</u> Un joueur va au casino avec une fortune initiale $a \in \mathbb{N}^*$. À chaque partie, il gagne 1 avec probabilité p et perd 1 avec probabilité $q = 1-p$. Les parties sont supposées indépendantes.

1) Fixons un entier $b > a$, et notons $P_b(a)$ la probabilité qu'a le joueur d'atteindre la fortune b avant d'être ruiné.

a) Montrer que $P_b(a) = p\, P_b(a+1) + q\, P_b(a-1)$. b) Déduire la valeur de $P_b(a)$.

2) Autorisons le joueur à s'endetter, notons T le premier instant où sa fortune vaut $a+1$,

puis, pour $n \in \mathbb{N}$, $g_n := \mathbb{P}(T = n)$, et enfin g la fonction génératrice de T.

a) Montrer que $\quad g_{n+2} = q\,(g_1 g_n + .. + g_n g_1)$. $\quad$ b) Déduire que $\quad g(s) - ps = qs\, g^2(s)$.
c) Calculer g, $\mathbb{P}(T < \infty)$, et $\mathbb{E}(T)$.

7 Convergences des variables aléatoires

Exercice n^o 7.1 a) Montrer que la convergence presque sûre et la convergence dans L^p entraînent (chacune) la convergence en probabilité.
b) Montrer que la convergence dans L^p entraîne la convergence dans L^q si $p > q$.
c) Supposons que X_n converge en probabilité vers X et que Y_n converge en probabilité vers Y. Soient a et b réels. Montrer que $aX_n + bY_n$ et $X_n \cdot Y_n$ convergent en probabilité.

Exercice n^o 7.2 Trouver

a) Une suite de v.a.r. qui converge dans L^q mais pas dans L^p (pour $p > q$ fixés).

b) Une suite de v.a.r. qui converge dans L^p mais pas presque sûrement (pour $p < \infty$ fixé).

c) Une suite de v.a.r. qui converge presque sûrement mais dans aucun L^p.

Exercice n^o 7.3 Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a.r. indépendantes, telles que $\mathbb{P}(X_n = n) = 1/n$ et $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - 1/n$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que cette suite converge en probabilité, mais ni presque sûrement ni dans aucun L^p.

Exercice n^o 7.4 a) Montrer qu'une suite de v.a. qui converge en probabilité admet une sous-suite qui converge presque sûrement. (Utiliser le premier lemme de Borel-Cantelli.)
b) Montrer qu'une suite convergente en probabilité et dominée par une variable de L^p converge dans L^p.

Exercice n^o 7.5 a) Montrer que $\{X_n\,,\, n \in \mathbb{N}\}$ converge en probabilité vers X ssi $\mathbb{E}(\|X_n - X\| \wedge 1)$ tend vers 0.

b) Vérifier que $(X, Y) \longmapsto \mathbb{E}(\|X - Y\| \wedge 1)$ est une distance sur $L^0(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P}; \mathbb{R}^d)$.

Exercice n^o 7.6 a) Prouver que lorsque X est p.s. constante, les convergences vers X en probabilité et en loi sont équivalentes.
b) Montrer que ces deux convergences sont généralement non équivalentes.

Exercice n^o 7.7 Montrer que si X_n converge en loi vers X et si Y_n converge en probabilité vers 0, alors $X_n \cdot Y_n$ converge en probabilité vers 0. (Distinguer entre $\{|Y_n| > A\}$ et $\{|Y_n| \le A\}$).

Exercice n^o 7.8 Notons $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a.r. indépendantes gaussiennes standard. Etudier la convergence en loi de $\frac{nX_1 + (n-1)X_2 + .. + X_n}{n\sqrt{n}}$.

Exercice n^o 7.9 Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de v.a.r. de fonction de répartition commune F, telle que $\lim\limits_{x\to\infty} x\,(1 - F(x)) = \lim\limits_{x\to\infty} x\,F(-x) = 0$. Posons $M_n := \max\{X_1, .., X_n\}$, et $m_n := \min\{X_1, .., X_n\}$. Montrer que $\frac{M_n}{n}$ et $\frac{m_n}{n}$ convergent en probabilité vers 0.

8 Loi des Grands Nombres

Exercice n^o 8.1 Prouver la formulation suivante de la loi faible des grands nombres :

Si les v.a.r. X_n sont non-corrélées 2 à 2 et ont la même loi admettant un second moment, alors leurs moyennes de Césaro convergent dans L^2 (et donc en probabilité) vers $\mathbb{E}(X_1)$.

Exercice n^o 8.2 Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a.r.i.i.d. telles que $\mathbb{E}(X_1^+) = \infty > \mathbb{E}(X_1^-)$. Montrer que p.s. $\frac{X_1+..+X_n}{n} \longrightarrow +\infty$. (Utiliser $X_n^k := X_n \wedge k$).

Exercice n^o 8.3 a) Soient $p \in [0,1]$ et f une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. Etudier la convergence de $n \longmapsto \sum_{k=0}^n C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} f(k/n)$.

b) Soient $\lambda > 0$ et g une fonction continue bornée de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$. Etudier la convergence de $n \longmapsto e^{-\lambda\, n} \sum_{k\geq 0} \frac{(\lambda\, n)^k}{k!} g(k/n)$; puis de $n \longmapsto e^{-\lambda\, n} \sum_{k=0}^{[\lambda n]} \frac{(\lambda\, n)^k}{k!}$ (utiliser le théorème suivant ; interpréter en terme de médiane).

9 Théorème Central Limite

Exercice n^o 9.1 (Surlocation) Une agence de voyage dispose de 160 places à louer pour une destination donnée. Elle sait que les locations sont honorées par ses clients avec une probabilité fixe p. Elle vend $N = 160\alpha > 160$ places. Pour quelles valeurs de α la probabilité de ne pas louer trop de places vaut-elle $0,95$, $0,975$?

Exercice n^o 9.2 Le prix S_n d'une action au jour n est modélisé ainsi : $S_0 = s > 0$ est fixe, et $S_{n+1} = (1 + r + \sigma\varepsilon_{n+1})\, S_n$, où $r > 0$ est un taux fixe, $\sigma \in]0, 1+r[$ est une volatilité fixe, et $\{\varepsilon_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ est une suite i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$.

a) Etudier le comportement des suites $(\log S_n)/n$ et S_n .
b) Etudier le comportement de la suite $(\log S_n)/\sqrt{n}$.
c) Etudier le comportement de la suite $[(1+r)^2 - \sigma^2]^{(-\sqrt{n}\,/2)} \times S_n^{[1/\sqrt{n}]}$.

Exercice n^o 9.3 Notons $\{X_n, Y_n, Z_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ une famille de v.a.i.i.d. de loi commune $\mathcal{B}(\pm 1, 1/2)$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$R_n := \sum_{k=1}^n X_k Y_k$, $S_n := \sum_{k=1}^n Y_k Z_k$, $T_n := \sum_{k=1}^n Z_k X_k$, puis $V_n := (R_n, S_n, T_n)$.

a) R_n, S_n, T_n sont-elles indépendantes 2 à 2 ? indépendantes ?
b) Quelle est la loi de R_n ? c) Calculer la transformée de Fourier de V_n .
d) Etudier la convergence de V_n/n , puis de $V_n/\sqrt{n}$.

Exercice n^o 9.4 3016 mathématiciens sont invités à un colloque ; en moyenne un sur 4 répondra favorablement, et les réponses sont supposées indépendantes les unes des autres. Combien les organisateurs doivent-ils prévoir de places, afin que la probabilité de ne pas en manquer soit $\geq 0,99$?

Exercice n^o 9.5 Une compagnie assure 10000 clients sur la vie, qui payent chacun une prime annuelle de A euros. On estime que chaque client a une probabilité de décès au cours d'une année égale à 6/1000, indépendamment les uns des autres. La prime de décès est de B euros.

a) Quelle est la loi du nombre annuel des décès ? Comment peut-on l'approcher ?

b) Si $B = 1000$, pour quels A la compagnie a-t-elle une probabilité $< 1/100$ d'être en déficit ? c) Si $A = 15$, pour quels B la compagnie a-t-elle une probabilité $> 0,7$ de faire un bénéfice annuel > 50000 euros ?

Exercice n^o 9.6 Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi commune $\mathcal{B}(p)$. Posons $Y_n := X_n X_{n+1}$ et $S_n := (Y_1 + .. + Y_n)/n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Calculer la loi et l'espérance de Y_n, puis la covariance de Y_n et de Y_{n+k}, l'espérance de S_n^2, et enfin montrer que S_n converge en probabilité vers p^2.

Exercice n^o 9.7 Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1.

a) Montrer que $\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{X_1+..+X_n-n}{\sqrt{n}}\Big)^-\Big] = \frac{n^{(n+\frac{1}{2})}e^{-n}}{n!}$.

b) Montrer que $\Big(\frac{X_1+..+X_n-n}{\sqrt{n}}\Big)^-$ converge en loi vers N^-, partie négative d'une gaussienne centrée réduite.

c) Montrer que $\frac{X_1+..+X_n-n}{\sqrt{n}}$ est bornée dans L^2, puis que $\mathbb{E}\Big[\Big(\frac{X_1+..+X_n-n}{\sqrt{n}}\Big)^-\Big] \longrightarrow \mathbb{E}(N^-)$.

d) Retrouver la formule de Stirling.

10 Exemple des marches aléatoires

Exercice n^o 10.1 Montrer que N est un temps d'arrêt ssi $\{N = n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, que $\mathcal{F}_N := \{A \in \mathcal{F}_\infty \,|\, (\forall n \in \mathbb{N})\ A \cap \{N = n\} \in \mathcal{F}_n\}$, et que $\mathcal{F}_N$ est une tribu.

Exercice n^o 10.2 Soient N et N' deux temps d'arrêt.

a) Vérifier que $\min\{N, N'\}$ et $\max\{N, N'\}$ sont aussi deux temps d'arrêt.

b) Montrer que les événements $\{N < N'\}$, $\{N \leq N'\}$, $\{N = N'\}$ appartiennent à $\mathcal{F}_{\min\{N,N'\}}$, puis que $\mathcal{F}_{\min\{N,N'\}} = \mathcal{F}_N \cap \mathcal{F}_{N'}$.

Exercice n^o 10.3 Soit N un temps d'arrêt. Supposons que $\mathbb{E}(\|X_1\|)$ et $\mathbb{E}(N)$ sont finies. a) Montrer que $\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1) \times \mathbb{E}(N)$. (Ecrire $S_N = \sum_j X_j 1_{\{N<j\}^c}$).

b) Déduire (pour la marche simple, $d = 1$) que $\min\{n | S_n = 1\}$ et T ne sont pas intégrables.

Exercice n^o 10.4 a) Montrer que $\mathbb{P}(T_k < \infty) = \mathbb{P}(T < \infty)^k$.

b) Pour tout $v \in \mathbb{Z}^d, v \neq 0$, notons $T_k(v)$ le k-ième temps de passage en v. Montrer que

$$\mathbb{P}(T_k(v) < \infty) = \mathbb{P}(T_1(v) < \infty) \times \mathbb{P}(T < \infty)^{k-1}.$$

Exercice n^o 10.5 Marche aléatoire simple sur un arbre homogène.

Soit $\mathcal{A}$ un arbre : c'est un graphe (non vide) non orienté sans boucle, de sorte que 2 points (ou sommets) quelconques de l'arbre sont reliés par un unique chemin injectif ; le nombre d'arêtes que comporte ce chemin définit la distance entre ces deux points ; elle fait de l'arbre un espace métrique. Supposons $\mathcal{A}$ homogène : chaque point admet exactement d voisins (i.e. points situés à distance 1), et connexe.

À quoi $\mathcal{A}$ est-il isométrique lorsque $d = 1$ ou 2 ? Fixons $d \geq 3$, et un point $O \in \mathcal{A}$. La marche simple S sur $\mathcal{A}$ part de $S_0 := O$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de S_n sachant S_{n-1} est uniforme sur l'ensemble des d voisins de S_{n-1}. Notons δ_n la distance entre S_0 et S_n.

a) Montrer qu'il existe une suite b de v.a.i.i.d., de loi à déterminer, telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\delta_{n+1} - \delta_n = b_n 1_{\{\delta_n>0\}} + 1_{\{\delta_n=0\}}$. (Définir b_n sur $\{\delta_n = 0\}$ par b'_n indépendante ayant la bonne loi, puis vérifier que b convient en calculant $\mathbb{P}(b_n = 1|b_{n-1}, .., b_0)$.)

b) Montrer que la marche S est transitoire, et qu'elle admet une vitesse de fuite, limite presque sûre de δ_n/n, à déterminer. (Commencer par minorer δ_n.)

11 Processus de Poisson

Exercice n^o 11.1 a) Un processus de Poisson est à accroissements stationnaires : la loi de tout vecteur $(N_{a+t_1} - N_{a+s_1}, .., N_{a+t_n} - N_{a+s_n})$ est indépendante de $a \in \mathbb{R}_+$.

b) Un processus de Poisson est p.s. fini à tout instant : $\mathbb{P}\Big(\bigcap_t \{N_t < \infty\}\Big) = 1$: les événements qu'il décompte ne peuvent pas s'accumuler en un instant fini.

c) En temps t petit, on a : $\mathbb{P}(N_t = 1) = \lambda t + o(t)$ et $\mathbb{P}(N_t \geq 1) = \lambda t + o(t)$.

d) On a presque sûrement : $\lim\limits_{t\to\infty} N_t/t = \lambda = \mathbb{E}(N_t/t)$.

Exercice 11.2 a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la loi de S_n est la loi Gamma de paramètres n et λ, i.e. la loi de densité sur $\mathbb{R}_+$: $s \longrightarrow \frac{(\lambda s)^{n-1}}{(n-1)!} \times \lambda e^{-\lambda s}$.

b) Pour $t > 0$ et $f \in L^1([0, t])$, calculer $\mathbb{E}\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} f(S_n) 1_{\{S_n\leq t\}}\Big)$.

c) Fixons $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que conditionnellement par rapport à $\{N_t = n\}$, le vecteur $(S_1, .., S_n)$ admet la densité de Dirichlet : $(s_1, .., s_n) \longrightarrow \dfrac{n!}{t^n} 1_{\{0<s_1<..<s_n<t\}}$.

d) Montrer que (pour $t > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$) si $U_1, .., U_n$ sont n variables i.i.d. uniformes sur $[0, t]$, et si $(V_1, .., V_n)$ est le vecteur obtenu en ordonnant $U_1, .., U_n$ dans le sens croissant, alors la "statistique d'ordre" $(V_1, .., V_n)$ admet aussi la densité de Dirichlet ci-dessus.

e) Déduire que pour $0 < s < t$, conditionnellement par rapport à $\{N_t = n\}$, la loi de N_s est $\mathcal{B}(n, s/t)$.

Exercice 11.3 a) Soient N et N' deux processus de Poisson indépendants, de paramètres λ et λ'. Montrer que $N + N'$ définit un processus de Poisson de paramètre $\lambda + \lambda'$.

b) Soit $\{X_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ une suite i.i.d. indépendante de N. Le processus défini par $\Sigma_t := \sum_{n=1}^{N_t} X_n$ est appelé "processus de Poisson composé". (Exemple : N peut décrire le nombre de clients d'un magasin et X_n la dépense du n-ième client.) Calculer la transformée de Fourier de Σ_t en fonction de celle des X_n et de la fonction génératrice de N_t, puis l'espérance et la variance de Σ_t.

Exercice 11.4 a) Soit N un processus de Poisson d'intensité λ comptant les passages successifs de voitures sur une route. Un piéton a besoin d'une durée $d > 0$ entre deux voitures pour traverser la route. Calculer la transformée de Laplace du temps Y qu'il doit attendre avant de pouvoir traverser. (On trouve $a \longmapsto \frac{a+\lambda}{ae^{\lambda d}+\lambda e^{-ad}}$.) Calculer l'espérance de Y. (On trouve $\frac{e^{\lambda d}-1-\lambda d}{\lambda}$.)

b) Considérons une route à deux voies, les voitures étant comptées par deux processus de Poisson indépendants, d'intensité λ dans un sens et λ' dans l'autre, et nécessitant des durées respective d et d' pour être traversées. Soient Z le temps que le piéton doit attendre pour traverser les deux voies d'un coup, et Z' le temps qu'il doit attendre pour traverser les deux voies sachant qu'il peut les traverser séparément du fait de la présence d'un refuge au milieu de la route. Donner les transformées de Laplace de Z et de Z', leur espérances, et discuter l'intérêt du refuge.

Exercice 11.5 Le flux (poissonnien) des trams passant aux halles est en moyenne de 12 trams par heure et comporte une proportion $p = 40\%$ de trams de la ligne D (et de $1 - p$ pour la ligne A).

a) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 trams D passent en un quart d'heure donné ?

b) Sachant que 3 trams D sont passés en 20 minutes, quel est le nombre moyen de trams passés dans le même temps ?

c) Sachant que 10 trams sont passés en 45 minutes, quelle est la probabilité que la moitié soient des trams D ?

Exercice 11.6 Pour $t > 0$ fixé, vérifier que $S_{N_t} \leq t < S_{1+N_t}$. S_{N_t} et S_{1+N_t} sont les points de $\mathcal{E}$ précédant et suivant directement l'instant t. Autrement dit, on peut les voir comme les instants de naissance et de décès de l'intervalle "vivant" à l'instant t. Notons $T'_t := t - S_{N_t}$ et $T''_t := S_{1+N_t} - t$ respectivement l'âge de cet intervalle vivant et le temps qu'il lui reste à vivre.

a) Montrer que pour $a, b > 0$ on a $I\!P(T'_t > a, T_t" > b) = e^{-\lambda(a+b)}\, 1_{\{t>a\}}$.

b) Déduire que T'_t et T''_t sont indépendants et donner leur lois.

c) Comparer la durée de vie moyenne de l'intervalle vivant à l'instant t avec celle du n-ième intervalle de $\mathcal{E}$; explication ?

Exercice 11.7 On veut estimer λ par le maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$ dans les deux cas suivant. a) On observe jusqu'à l'instant $t > 0$ fixé, et on connaît donc $N_t, S_1, .., S_{N_t}$. Calculer $\hat{\lambda}$, et vérifier qu'il est sans biais. (Utiliser la densité sachant N_t.)

b) On observe jusqu'à l'instant S_n , pour n fixé, et on connaît donc $S_1, .., S_n$. Calculer $\hat{\lambda}$, et vérifier qu'il est biaisé.

II. Eléments de statistique mathématique

12 Régression linéaire

Exercice n^o 12.1 Soient $X = (1, 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 15, 18)$ et
$Y = (-33, -97, -134, -141, -130, -102, -32, 37, 343, 860)$. Représenter le nuage, et tester s'il y a une relation $Y = \alpha X^3 + \beta X$, ou $Y = \mathrm{ch}(aX - b) - 150$, ou $Y = \alpha(X - \beta)^2 - 150$.
Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour la valeur y associée à $x = 14$.

13 Vraisemblance et estimation

13.1 Maximum de vraisemblance

Exercice n^o 13.1.1 Supposons qu'un processus de Poisson de paramètre inconnu λ est observé : a) jusqu'à un temps fixe T ; b) jusqu'à la survenue du n-ième événement. Dans chacun de ces deux cas, quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour λ ?

13.2 Biais, risque

Exercice n^o 13.2.1 Soient $X_1, .., X_n, ..$ des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$.

a) Si (pour n fixé) $X_1 + .. + X_n = k$, quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p ? Est-il sans biais ?

b) Supposons qu'on s'arrête au premier n tel que $X_1 + .. + X_n = k$, pour k fixé ; quel est alors l'estimateur du maximum de vraisemblance pour p ? Est-il sans biais ?

13.3 Statistique exhaustive

Exercice n^o 13.3.1 a) Soient $X_1, .., X_n$ des v.a.r.i.i.d. uniformes sur un intervalle $[0, \theta]$. Montrer que $\max\{X_1, .., X_n\}$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance pour θ, et que c'est aussi une statistique exhaustive pour θ.

b) Soient $X_1, .., X_n$ des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{U}([\theta, \theta'])$. Trouver une statistique exhaustive pour (θ, θ'), et les estimateurs du maximum de vraisemblance pour θ et θ'.

Exercice n^o 13.3.2 Soient $X_1, .., X_n$ des v.a.r.i.i.d. de loi $\mathcal{E}(\lambda)$. Montrer que l'estimateur sans biais de risque minimum de $e^{-2\lambda}$ est $\hat{\theta} := 1_{\{S_n > 2\}} \left(\frac{S_n - 2}{S_n}\right)^{n-1}$. (On a noté $S_n := X_1 + .. + X_n$.) (Indication : Considérer $\mathbb{P}(X_1 > 2)$, et utiliser que la loi de X_1 sachant S_n est celle du minimum de $(n - 1)$ v.a.i.i.d. uniformes sur $[0, S_n]$ (à justifier).)

Exercice n^o 13.3.3 Soient $X_1, .., X_n$, $Y_1, .., Y_n$ des v.a.r.i.i.d., les X_j de loi $\mathcal{E}(\lambda)$, et les Y_j de loi $\mathcal{E}(\lambda')$. Trouver une statistique exhaustive pour (λ, λ'), et les estimateurs du maximum de vraisemblance pour λ et λ'. Ont-ils un biais ?

13.4 Intervalles de confiance

Exercice n^o 13.4.1 Une caractéristique électrique d'un composant électronique varie, du fait des dispersions de fabrication, suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \mu^2)$. On se propose d'estimer son espérance μ par un intervalle de confiance. Un prélèvement de 20 composants effectué sur un lot de série a donné les résultats suivant : 10,1 ; 10,5 ; 9,4 ; 10,2 ; 9,5 ; 9,8 ; 10,1 ; 10,3 ; 10,6 ; 9,7 ; 10,2 ; 10,4 ; 10,3 ; 9,6 ; 9,9 ; 9,8 ; 10,1 ; 10,3 ; 10,5 ; 9,8 . $(\overline{x} = 10,055)$.

a) Construire un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 90%. Est-il le plus court parmi tous les intervalles de confiance de niveau de confiance 90% ?

b) Construire un intervalle de confiance pour μ de niveau de confiance 95%.

Exercice n^o 13.4.2 La fiabilité dans le temps d'un composant électrique, c'est-à-dire sa durée de vie X, est supposée de type exponentiel : $I\!P(X \geq t) = \exp(-t/\lambda), t \geq 0$. On cherche à estimer à l'aide d'un intervalle de confiance le paramètre λ. Si la moyenne observée d'un échantillon de taille n est $\overline{x}$, donner un intervalle de confiance de niveau de confiance 95% du paramètre λ. Est-il le plus court parmi tous les intervalles de confiance de niveau de confiance 95% ? Traiter d'abord le cas de n grand, puis ensuite le cas général (plus délicat).

Exercice n^o 13.4.3 Ayant lu dans le magazine ELLE du 19.8.02 que 55% des Français utilisaient des bains moussants, vous décidez de vérifier vous-même l'affirmation du magazine ELLE par un mini-sondage, en posant autour de vous la question :

"Utilisez-vous des bains moussants ? OUI, NON"

et en construisant un intervalle de confiance sur une proportion.

a) Vous envisagez de ne considérer l'affirmation comme confirmée que si cet intervalle de 90% basé sur le groupe des personnes interrogées est inclus dans [54%; 56%]. Est-ce raisonnable ?

b) Découragé(e) par la réponse obtenue en a), vous vous contentez d'un échantillon de 50 personnes. Si la proportion de oui est de 53% parmi les 50 réponses, déterminez un intervalle de confiance de 90% .

13.5 Estimation bayésienne

Exercice n^o 13.5.1 Un processus de Poisson de paramètre inconnu λ est observé durant le temps fixe T. Soit N le nombre d'événements observés durant ce temps. On se donne pour λ la loi a priori $\mathcal{E}(\alpha)$. Calculer l'estimateur bayésien de λ .

14 Tests

Exercice n^o 14.1 Deux associés A et B se partagent les tâches d'un cabinet commun de conseil. L'associé A pense qu'il traite moins de 30% des dossiers. Pour vérifier cela, il décide de choisir au hasard un échantillon de 100 dossiers (traités soit par lui-même, soit par l'associé B), sur lesquels il prévoit d'effectuer deux tests, avec le même risque de rejet à tort de 5%, en prenant successivement comme hypothèse nulle

i) $H_0 : p \leq 30\%$ ii) $H_0' : p \geq 30\%$, p étant la proportion réelle des dossiers traités par A.

a) Pour combien de dossiers traités par A (au plus) l'hypothèse H_0 est-elle acceptée ?

b) Pour combien de dossiers traités par A (au plus) H_0' est-elle rejetée ?

c) Déterminer la probabilité d'accepter l'hypothèse H_0 si la proportion réelle de dossiers traités par A est de 40%.

d) Déterminer la probabilité de rejeter l'hypothèse H_0' si la proportion réelle de dossiers traités par A est de 40%.