Analyse I

Série 1

1. Avec des dessins similaires à ceux de Mohammed ibn Musa Al-Khwârizmî (voir cours), trouver les deux solutions de l'équation $x^2 + 15 = 8x$.
2. Un problème "inverse" : on se donne

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{1944} + 44} - \sqrt[3]{\sqrt{1944} - 44}.$$

Chercher une équation de degré 3 à coefficients entiers qui possède x comme racine. Dessiner la fonction correspondante à l'aide de quelques valeurs de x.
On trouve ainsi un résultat surprenant.

3. Par la formule de Cardano, trouver la solution réelle de l'equation

$$x^3 + 16x^2 - 192x - 25600 = 0.$$

Pour se convaincre qu'il n'y a pas d'autre solution réelle, faire un dessin du polynôme.

4. (L. Euler, *Volls. Anleitung zur Algebra*, St. Petersburg 1770, Opera Omnia Vol. I). On veut résoudre une équation de degré 4 où les coefficients sont symétriques

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = 0.$$

Chercher r et s tels que

$$x^4 + 5x^3 + 8x^2 + 5x + 1 = (x^2 + rx + 1)(x^2 + sx + 1)$$

et trouver les 4 racines.

5. Une deuxième méthode pour résoudre les équations symétriques de degré 4 : diviser l'équation par x^2 et introduire la nouvelle variable

$$u = x + \frac{1}{x}. \tag{1}$$

Calculer u^2 et exprimer l'équation comme un polynôme en u. Pour chaque valeur de u la relation (1) donne une équation de degré 2 pour x.
Appliquer cette méthode au problème de l'exercice précédent.

6. On cherche trois nombres x, y, z pour lesquels

$$x + y + z = 0, \qquad xy + xz + yz = 6, \qquad xyz = 20.$$

Examens : un écrit sur les exercices, un oral sur le cours. Note finale = moyenne des deux examens avec la même pondération.