Analyse I

Série 2

1. Démontrer : Si pour une équation de degré 3
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{on pose} \qquad x + \frac{a}{3} = u$$
on obtient pour u une équation plus simple.
Appliquer la même idée à l'équation de degré 4
$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

2. Le 15 décembre 1536, Zuanne de Tonini da Coi a posé le problème
$$\begin{aligned} x + y + z &= 20 \\ x : y &= y : z \\ x \cdot y &= 8 \end{aligned}$$
à Tartaglia, qui n'a pas pu le résoudre. Essayer de comprendre pourquoi il a échoué.
En éliminant les variables x et z, trouver une équation polynomiale pour y. Quel est le degré de cette équation ?

3. (Euler 1749, Opera Omnia vol. VI, p.78–147). Résoudre l'équation de degré 4
$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$
en cherchant u, α et β pour que
$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = (x^2 + ux + \alpha)(x^2 - ux + \beta). \tag{1}$$
Développer le produit, comparer les coefficients et trouver une équation de degré 3 pour u^2. Après avoir trouvé une solution positive de cette dernière par la formule de Cardano, il ne reste plus qu'à calculer les zéros des deux équations quadratiques en (1).
Appliquer cette méthode à l'équation de l'exercice 2, c.-à-d.,
$$x^4 + 8x^2 - 160x + 64 = 0$$
(Utiliser Maple si les calculs deviennent trop compliqués).

4. Certains "tests d'intelligence" vous donnent une suite de nombres comme
$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 26,\ 42,\ 64,\ 93,\ \ldots$$
et vous demandent lequel de ces nombres a été mal imprimé et quels seront les nombres suivants.
Répondre à cette question en calculant le schéma des différences finies de cette suite et en la comparant à celui de la suite
$$\ldots,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots\ .$$

5. Voici une liste de valeurs de $\ln x$ calculées par Briggs en 1624 avec beaucoup de peine

$$
\begin{aligned}
\ln 11 &= 2.397895273 \\
\ln 12 &= 2.484906650 \\
\ln 13 &= 2.564949357 \\
\ln 14 &= 2.639057330 \\
\ln 15 &= 2.708050201 \\
\ln 16 &= 2.772588722
\end{aligned}
$$

   Calculer, à l'aide du polynôme d'interpolation, des approximations pour $\ln 11.5$ et $\ln 13.5$. Laquelle de ces valeurs est la plus précise ?

6. On connaît depuis l'antiquité (Ptolemée A.D.150) la valeur de

$$\sin 3^\circ = \frac{\sqrt{2}}{16}\Big((\sqrt{3}+1)(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{3}-1)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\Big).$$

   En employant l'identité $\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha\,\cos^2\alpha - \sin^3\alpha$, on voit que $x = \sin 1^\circ$ est solution de l'équation polynomiale $-4x^3 + 3x = \sin 3^\circ$ ou

$$x = \frac{\sin 3^\circ + 4x^3}{3}. \tag{2}$$

   Deviner une valeur approximative pour x (p. ex. $x = \sin 3^\circ/3$), la mettre à droite de cette formule, pour obtenir une meilleure valeur à gauche, et ainsi de suite. Al-Kāshī (Samarkand 1429) a obtenu par cette méthode (en base 60)

$$\sin 1^\circ = 0;\ 1,\ 2,\ 49,\ 43,\ 11,\ 14,\ 44,\ 16,\ 19,\ 16\dots\ .$$

   Vérifier si cette valeur est juste. Montrer aussi que la formule de Tartaglia-Cardano ne peut pas être appliquée à l'équation (2) sans difficulté supplémentaire.

7. a) Calculer le polynôme de degrée 6 qui passe par les valeurs

$$0,\ 1,\ 32,\ 243,\ 1024,\ 3125,\ 7776 \qquad \text{pour } x = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6.$$

   b) Utiliser le schéma des différences de cet exemple pour calculer

$$1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5 = ?$$

Examens : un écrit sur les exercices, un oral sur le cours. Note finale = moyenne des deux examens avec la même pondération.