Analyse I

Série 3

1. En utilisant le théorème binomial montrer que, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots = 2^n, \qquad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \mp \ldots = 0,$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = 2^{n-1}, \qquad \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots = 2^{n-1}.$$

2. A partir de la définition des coefficients binomiaux démontrer que, pour $k = 1, 2, 3, \ldots$ et pour n arbitraire (un nombre entier ou un nombre réel),

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$$

Etendre cette formule pour obtenir, pour $m = 1, 2, 3, \ldots$ et pour $k \geq m$,

$$\binom{n+2}{k} = \binom{n}{k-2} + 2\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \qquad \text{et} \qquad \binom{n+m}{k} = \sum_{\ell=0}^{m} \binom{m}{\ell}\binom{n}{k-\ell}.$$

Remarque. Une démonstration possible est de comparer les coefficients de l'égalité $(1+x)^n \cdot (1+x)^m = (1+x)^{n+m}$.

3. A partir du théorème binomial généralisé, trouver la formule (pour un entier $m \geq 0$)

$$(1-x)^{-m-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k}{m} x^k.$$

4. Vérifier l'égalité

$$1 + 3x + 6x^2 + 10x^3 + 15x^4 + \ldots = \frac{1}{(1-x)^3}, \qquad |x| < 1,$$

a) en multipliant la série pour $\frac{1}{1-x}$ deux fois par elle-même,
b) en utilisant le théorème binomial généralisé.

5. En s'inspirant de l'exercice précédent, trouver la fonction représentée par la série

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + \ldots = ?$$

6. En comparant le carré de

$$(1+x)^{-1/2} = 1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \ldots$$

avec la série de $1/(1+x)$, déterminer les coefficients a, b, c pour trouver

$$(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + - \ldots .$$

Comparer ce résultat avec le théorème binomial généralisé.

7. Vérifier la formule (Euler 1755, Opera Omnia X, p. 280)

$$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1\cdot 3}{100\cdot 200} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{100\cdot 200\cdot 300} + \text{ etc.}\right),$$

en utilisant $2{*}5^2 = 7^2{+}1$ et la série de l'exercice précédent, “quae ad computum in fractionibus decimalibus instituendum est optissima”.

Trouver encore une autre formule pour $\sqrt{2}$ qui découle de $2 * 5^2 = 7^2 + 1$ basée sur la série pour $(1+x)^{1/2}$.

8. Démontrer par récurrence les *inégalités de Bernoulli*

$$\begin{aligned} (1+a)^n &\geq 1 + na && \text{pour} \quad a \geq -1, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \\ 1 - na < (1-a)^n &< \frac{1}{1+na} && \text{pour} \quad 0 < a < 1, \quad n = 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

9. Pour étudier la convergence de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ vers e, considérons les suites

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{et} \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

En utilisant la deuxième inégalité de l'exercice précédente avec $a = 1/n^2$, montrer que $a_n > a_{n-1}$, $b_n < b_{n-1}$,

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < \mathrm{e} < \ldots < b_3 < b_2 < b_1$$

et que $b_n - a_n \leq 4/n$.