Analyse I

Série 4

1. En s'inspirant de la méthode vue en cours, donner des valeurs approchées de ln(2) et ln(5) à partir des relations
$$3 = \sqrt{\frac{9}{8}} \cdot \sqrt{8}, \quad 5 = \sqrt{\frac{25}{24}} \cdot \sqrt{24}.$$
(Newton 1671, *Method of Fluxions*; Euler 1748, *Introductio*, §123) Montrer que la relation $2 = (3/2) \cdot (4/3)$ implique les relations suivantes
$$\ln 2 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{7}}\right), \qquad \ln 3 = \ln\left(\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}}\right) + \ln 2,$$
ce qui permet le calcul approché simultané de ln(2) et ln(3). Faire les calculs numériques à l'aide de Maple ou Matlab.
2. Trouver α, β, γ pour que
$$2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \cdot \frac{1+\beta}{1-\beta} \cdot \frac{1+\gamma}{1-\gamma}$$
et calculer simultanément ln(2), ln(3) et ln(5).
3. (Newton 1669, "Inventio Basis ex Area data"). Supposons que l'aire z sous l'hyperbole $y = 1/(1+x)$ (entre 0 et x) soit donnée par la formule
$$z = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \dots \,. \tag{1}$$
Trouver quelques termes d'une série de la forme
$$x = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + a_4 z^4 + \dots$$
qui vérifie l'égalité (1). En déduire la série connue de la fonction exponentielle.
4. À partir des valeurs connues pour $\alpha = 15°$ et pour $\beta = 18°$, démontrer que
$$\sin 3° = \frac{\sqrt{2}}{16}\Big(\big(\sqrt{3}+1\big)\big(\sqrt{5}-1\big) - \big(\sqrt{3}-1\big)\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ \Big).$$
5. En considérant un polygone régulier à 2^{N+1} côtés, montrer que
$$2^N \cdot \sin\frac{90°}{2^N} < \frac{\pi}{2} < 2^N \cdot \tan\frac{90°}{2^N}\ .$$
6. Exprimer l'expression
$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin(\alpha+\beta)$$
comme produit de trois facteurs de sinus.
Résultat. $4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

7. F. Ayres (dans Calculus, Chap. 52, Ex. 11) propose la formule

$$\sqrt{1+\sin x} = \sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\ .$$

A-t-il raison ?

8. Les *fonctions hyperboliques.*
Considérons l'hyperbole définie par $u^2 - v^2 = 1$ (figure de gauche). Pour un x donné, soit P le point sur l'hyperbole tel que l'aire de la figure hachurée soit égale à $x/2$. On désigne par $(\cosh x, \sinh x)$ les coordonnées de P.

a) Démontrer que

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et en conséquence

$$\begin{aligned} \sinh x &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \\ \cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

Indication (Foncenex 1759, Lambert 1770) : Dans la figure de droite, où la courbe a pour équation $y = 1/(2x)$, les aires des triangles ACB et PCQ sont égales. Donc, les aires de ACPA et ABQPA sont aussi les mêmes et sont égales à $(\ln a)/2$, si l'on désigne par $a/\sqrt{2}$ la distance entre C et Q.

b) Montrer que

$$\begin{aligned} \sinh(x+y) &= \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y, \\ \cosh(x+y) &= \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y. \end{aligned}$$