Analyse I

Série 5

1. A l'aide de $2^N \cdot \sin(\pi/2^N) \to \pi$ et de formules trigonométriques, déduire le produit infini de Viète (1540-1603)

$$\begin{aligned}
\frac{2}{\pi} &= \cos\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{16}\cdot\ldots\\
&= \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdot\ldots\,.
\end{aligned}$$

2. Montrer

$$\begin{aligned}
\arctan\frac{1}{18} &= 2\arctan 1 - 2\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{2}{3}\\
\arctan\frac{1}{57} &= -\arctan 1 + 3\arctan\frac{1}{2} - \arctan\frac{2}{3}\\
\arctan\frac{1}{239} &= 3\arctan 1 - 4\arctan\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

(appliquer plusieurs fois la formule pour $\arctan u + \arctan v$ aux expressions de droite). En déduire par élimination la formule de Gauss (Werke, vol. 2, p. 477-502)

$$\frac{\pi}{4} = 12\arctan\frac{1}{18} + 8\arctan\frac{1}{57} - 5\arctan\frac{1}{239}\,.$$

Lorsque l'on remplace les trois expressions par leurs séries, combien de termes faut-il considérer pour obtenir une précison de 200 décimales pour π ? A l'aide de Maple, observer que si l'on tronque la série, l'erreur est bornée par le premier terme négligé.

3. Calculer

$$\frac{2+5\,\mathrm{i}}{1-6\,\mathrm{i}},\qquad (2+\mathrm{i}\sqrt{2})^3,\qquad \sqrt[3]{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}$$

et dessiner ces nombres dans le plan complexe.

4. En utilisant les séries pour $\sin x$, $\cos x$, $\sinh x$, $\cosh x$ (voir exercice 8 de la série 4), démontrer que

$$\mathrm{i}\sin x = \sinh(\mathrm{i}\,x),\qquad \cos x = \cosh(\mathrm{i}\,x).$$

5. (Nombres de Bernoulli). Trouver des coefficients B_0, B_1, B_2, B_3, $B_4, \ldots$ pour que l'on ait

$$\frac{x}{e^x-1} = B_0 + \frac{B_1}{1!}x + \frac{B_2}{2!}x^2 + \frac{B_3}{3!}x^3 + \frac{B_4}{4!}x^4 + \ldots \tag{1}$$

(multiplier la formule par $e^x - 1$ et comparer les coefficients).

6. Montrer que la fonction

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{e^x - 1}$$

est liée à $x \cdot \coth x$, qui est une fonction paire ($\coth x = \cosh x / \sinh x$). En déduire que $B_3 = 0$, $B_5 = 0$, $B_7 = 0$, $B_9 = 0, \dots$. Remplacer ensuite x par $\mathrm{i}x$ pour trouver les séries pour

$$x \cdot \cot x = \frac{x \cdot \cos x}{\sin x} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots \ .$$

et, à l'aide de

$$2 \cdot \cot 2x = \cot x - \tan x$$

celle de $\tan x$. Comparer le résultat avec la série trouvée au cours.

Résultat.

$$\tan x = x - \frac{2^4(2^4-1)B_4}{4!}x^3 + \frac{2^6(2^6-1)B_6}{6!}x^5 - \frac{2^8(2^8-1)B_8}{8!}x^7 + \dots$$

7. Chercher à l'aide de

$$v = \cos x = \frac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \arccos v$$

une relation entre arccos et ln.

Remarque. Poser $u = e^{\mathrm{i}x}$ si ça vous aide.

8. Grâce à la formule de Cardano, calculer toutes les racines de

$$x^3 - 6x + 2 = 0. \tag{2}$$

Bien que toutes les racines soient réelles, il faudra utiliser des racines cubiques d'un nombre complexe.

9. Simplifier le calcul des racines de (2) par l'idée suivante (Viète 1591) : poser $x = \mu \cos \alpha$ et remplacer $\cos \alpha$ par x/μ dans l'identité $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ pour obtenir

$$x^3 - \frac{3\mu^2}{4}\,x - \frac{\mu^3}{4}\,\cos 3\alpha = 0.$$

Comparer cette équation avec (2) pour trouver μ, α et x.