Analyse I

Série 7

1. Résoudre
$$z^{10} + 1 = 0$$
a) à l'aide des fonctions trigonométriques ;
b) en divisant $z^{10} + 1$ par $z^2 + 1$ et en trouvant les racines par méthode algébrique.
Montrer alors que
$$\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4} \ .$$

2. Calculer les dérivées de
$$y = (\sin x)^2, \qquad y = \sin(x^2), \qquad y = \frac{x}{1 + x^4}, \qquad y = xe^{-x^2}$$
et esquisser l'allure de ces fonctions.

3. Soit $f(x)$ un polynôme
$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \ldots (x - \alpha_n). \tag{1}$$
Calculer la dérivée et trouver
$$f'(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{f(x)}{x - \alpha_i} \ .$$

4. Calculer les dérivées de
$$f(x) = \arctan x \qquad \text{et} \qquad g(x) = \arctan\Bigl(\frac{1 + x}{1 - x}\Bigr) \ .$$
Est-ce que le résultat vous étonne ?
En utilisant le théorème d'addition pour $\tan(u + v)$ avec $u = \pi/4$ et $v = \arctan x$, démontrer que la différence $f(x) - g(x)$ est constante sur l'intervalle $(-\infty, 1)$ et aussi sur l'intervalle $(1, \infty)$. Déterminer les valeurs de ces constantes.

5. (Leibniz 1710). Démontrer que la deuxième dérivée d'un produit de fonctions $y = uv$ est donnée par
$$y'' = u''v + 2u'v' + uv''.$$
Calculer ensuite y''' et trouver une formule générale pour la n-ème dérivée de y.

6. (Euler, Inst. Calc. Diff., opera, vol X, p. 458). Étudier la fonction
$$y = \frac{2 - 3x + x^2}{2 + 3x + x^2}.$$
Maxima, minima, convexe, concave, points d'inflexion ?

7. (Euler, ICD, p. 471) La série de nombres

$$\sqrt[1]{1} = 1, \quad \sqrt[2]{2} \approx 1.4142, \quad \sqrt[3]{3} \approx 1.4422, \quad \sqrt[4]{4} \approx 1.4142, \quad \sqrt[5]{5} \approx 1.3797, \ldots$$

laisse supposer que la fonction $y = \sqrt[x]{x} = x^{1/x}$ possède un maximum près de $x \approx 3$. Où exactement ?

8. Considérons la courbe de points pour lesquels le produit des distances aux points $(1,0)$ et $(-1,0)$ est égal à 1 (la "lemniscate" de Jac. Bernoulli 1694, voir la figure). Montrer qu'elle est décrite par l'équation

$$(x^2 + y^2)^2 - 2x^2 + 2y^2 = 0.$$

Calculer par dérivation implicite la dérivée de la courbe et trouver les points pour lesquels $y'(x) = 0$. Trouver aussi une représentation paramétrique (avec comme paramètre l'angle $\varphi = \arctan(y/x)$) et calculer la dérivée à l'aide de celle-ci.

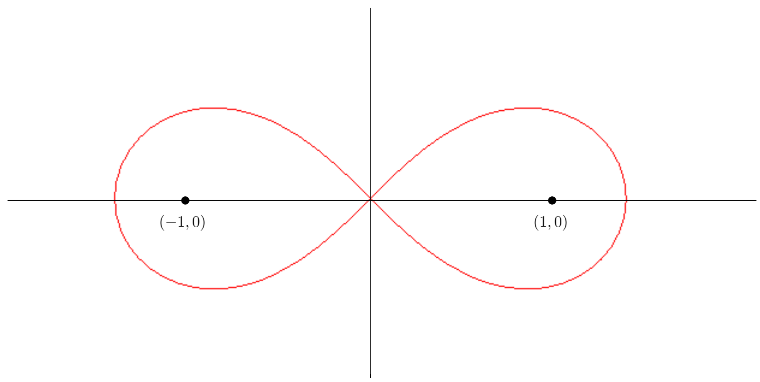

FIGURE 1 – Lemniscate de Bernoulli.